R – řád 2

Často se setkáváme s případem, kdy velikost chyby $\|x^{k+1} - x^*\|$ se nedá vyjádřit pouze pomocí $\|x^k - x^*\|$, ale vystupují tam i další chyby $\|x^{k-j} - x^*\|$. Tuto závislost lze vyjádřit takto

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\| \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \|x^{k-j} - x^*\|, \quad (*)$$

Ukážeme, jak lze vyjádřit R-řád iteračního procesu v těchto případech.

<u>Věta</u>. Nechť T je iterační proces a $C(T, x^*)$ množina všech posloupností generovaných procesem T, které konvergují k x^*.
Nechť dále $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ jsou nezáporné konstanty, $\sum_{j=0}^{m} \gamma_j > 0$.

Jestliže pro každou posloupnost $\{x^k\} \in C(T, x^*)$ existuje $k_0 \geq m$ takové, že vztah $(*)$ platí pro všechna $k \geq k_0$, pak

$$Q_R(T, x^*) \geq \tau, \quad (R\text{-řád})$$

kde τ je jediný kladný kořen rovnice $t^{m+1} - t^m - 1 = 0$.

<u>Příklad</u> $f(x) = 0 \Rightarrow$ řešíme metodou sečen

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k)$$

Chyba

$$|x^{k+1} - \xi| \leq M |x^k - \xi| \, |x^{k-1} - \xi|, \quad M \text{ konst.}$$

V tomto případě $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = M$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow Q_R(C, x^*) \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

viz také skripta Horová, Zelinka: Numerické metody