R-řád

(4b)

Poznámka týkající se R-řádu iteračního procesu.

Lemma Pro libovolné $m \geq 1$ má polynom
$$p_m(t) = t^{m+1} - t^m - 1$$
jediný kladný kořen τ_m. Dále platí $\tau_m \in (1,2)$, $\tau_m > \tau_{m+1}$ a $\lim_{m\to\infty} \tau_m = 1$.

Důkaz Existence kladného (jediného) kořenu plyne z Descartesovy věty (počet kladných kořenů (~~počítaných s násobností~~) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů nebo o sudé číslo menší (1 znaménková změna)

Tento kořen leží v intervalu $(1,2)$, neboť $p_m(1) = -1$, $p_m(2) = 2^{m+1} - 2^m - 1 = 2^m - 1$.

Posloupnost $\{\tau_m\}$ je klesající, neboť
$$p_{m+1}(\tau_m) = \tau_m^{m+2} - \tau_m^{m+1} - 1 =$$
$$= \tau_m(\tau_m^{m+1} - \tau_m^m) - 1 + \tau_m - \tau_m =$$
$$= \tau_m(\underbrace{\tau_m^{m+1} - \tau_m^m}_{0} - 1) + \underbrace{\tau_m - 1}_{>0} > 0$$

Odtud plyne $\tau_{m+1} \in (1, \tau_m)$

Kdyby $\lim_{m\to\infty} \tau_m = \tau > 1$, pak $p_m(\tau) = \tau^m(\tau - 1)$

$\Rightarrow$ $p_m(\tau) > 0$, a tedy pro dostatečně velká m, by polynom p_m měl dva kladné kořeny: a to jeden v intervalu $(1,\tau)$ a druhý větší než τ.