MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Funkcionální analýza a numerické metody

Diplomová práce

Bc. Karel Šultes

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.

Brno 2007

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně na základě konzultací s vedoucí a s užitím literatury uvedené v seznamu.

6.5.2007

Děkuji vedoucí této práce prof. RNDr. Ivance Horové, CSc. za cenné rady, doporučení literatury a také za pečlivé přečtení celého textu.

Úvod

Cílem této diplomové práce je užít nástrojů funkcionální analýzy ke konstrukci obecných numerických algoritmů.
Text je členěn do tří kapitol. První slouží jako úvod pro zavedení symboliky a obsahuje formulaci a důkaz obecné věty o pevném bodě, na kterou se v dalším textu odkazuji. V závěrečné části první kapitoly jsou popsány konvergenční faktory.
Druhá kapitola se věnuje Newtonově metodě pro hledání kořenů operátorových rovnic. Zde je dokázána věta o lokální kovergenci spolu s existenčním tvrzením Kantorovičovy věty, jejíž předpoklady nezávisí na kořeni rovnice.
Poslední kapitola obsahuje návrh algoritmu užívajícího Newtonovu metodu pro hledání kořenů systémů rovnic v prostoru $\mathbb{R}^n$. Tohoto algoritmu je v závěrečné části užito k vyřešení okrajové úlohy diferenciálních rovnic.

Obsah

Kapitola 1

Iterační proces

1.1 Pseudometrické prostory

V úvodu je definován pseudometrický prostor, konvergence v pseudometrickém prostoru a další pojmy, které užijeme zejména v při formulaci a důkazu věty o pevném bodě. Více podrobností lze najít například v [5].

Definice 1. Množina H se nazývá částečně uspořádaná, je-li na ní definovaná relace $\leq$, splňující

1. $h \leq h$ pro libovolné $h \in H$.
2. Jestliže je $f \leq g$ a $g \leq h$, pak je i $f \leq h$.
3. Jestliže je $f \leq g$ a $g \leq h$, pak je i $g = f$.

Tato relace nemusí být definovaná pro libovolné dva prvky z H. Pokud je H vektorový prostor nad polem K, pak požadujme, aby relace $\leq$ navíc splňovala

1. Je-li $\theta_H \leq h$, pak pro libovolné $\alpha \in K$ větší jak θ_K, je $\theta_H \leq \alpha h$
2. Pokud $h_1 \leq k_1$ a $h_2 \leq k_2$, pak $h_1 + h_2 \leq k_1 + k_2$,

kde symbolem θ_V označujeme nulový prvek ve vektorovém prostoru V.

Definice 2. Prostor U nazveme pseudometrickým, je-li každé dvojici $u, v \in U$ přiřazena pseudometrika $\varrho(u, v)$, která je prvkem lineárního částečně uspořádaného prostoru H nad polem K. Navíc na $\varrho(u, v)$, klademe následující podmínky :

1. Platí $\varrho(u, v) = \theta_H$ pro $u = v$.
2. Pro libovolné $u, v, w \in U$ platí $\varrho(u, v) \leq \varrho(u, w) + \varrho(v, w)$.

Dále označujme pseudometrický prostor písmenem U, pseudometriku ϱ a písmenem H příslušný částečně uspořádaný lineární prostor, který vzhledem k jeho účelu, budeme nazývat prostor pseudovzdáleností.
Následující věta nám zaručuje symetrii ϱ a v jistém smyslu nezápornost.

Věta 1.1.1. *Pro libovolné dva $u, v \in U$ platí*

1. $\varrho(v, u) = \varrho(u, v)$.
2. $\varrho(u, v) \geq \theta_H$.

Důkaz. 1. Položme $u = w$, pak z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, u) + \varrho(v, u),$$

odtud je vidět, že $\varrho(u, v) \leq \varrho(v, u)$. Dále položme $v = w$, pak

$$\varrho(v, u) \leq \varrho(v, v) + \varrho(u, v),$$

tedy $\varrho(v, u) \leq \varrho(u, v)$. A to dokazuje $\varrho(v, u) = \varrho(u, v)$.

2. Z $v = w$ dostáváme

$$\varrho(u, u) \leq \varrho(u, v) + \varrho(u, v) = 2\varrho(u, v),$$

odtud $\theta_H = \varrho(u, u) \leq 2\varrho(u, v)$.

□

Následující definice umožní definovat konvergenci v pseudometrickém prostoru.

Definice 3. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ prvků z H konverguje k f, značíme $f_n \to f$, jestliže splňuje následující podmínky

1. Platí-li $\forall n \quad f_n = g$, pak $f = g$.
2. Jestliže $f_n \to f$, pak pro libovolnou vybranou posloupnost f_{n_m} platí $f_{n_m} \to f$.
3. Pokud $f_n \to f$ a $g_n \to g$, pak $f_n + g_n \to f + g$.
4. Pokud $f_n \to f$ a $c_n \to c$, kde $c_n, c \in K$, pak $c_n f_n \to cf$.
5. Pokud $f_n \to f$ a $f_n \geq \theta_H$, pak $f \geq \theta_H$.
6. Jestliže $\theta_H \leq f_n \leq g_n$ a $g_n \to \theta_H$, pak $f_n \to \theta_H$.

Definice 4. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\} \in U$ konverguje k prvku $u \in U$, konverguje-li posloupnost vzdáleností $\varrho(u_n, u)$ k prvku $\theta_H \in H$. Značíme $u_n \to u$.
Pro vektorový prostor U, navíc požadujme

1. Pokud $u_n \to u$ a $v_n \to v$, pak $u_n + v_n \to u + v$.

2. Jestliže $u_n \to u$ a $c_n \to c$, kde $c_n, c \in K$, pak $c_n u_n \to cu$.

Definice 5. Posloupnost $\{u_n\}$ nazveme cauchyovskou, jestliže platí

$$\lim_{n,m\to\infty} \varrho(u_n, u_m) = \theta_H. \tag{1.1}$$

Definice 6. Nechť T je operátor, definovaný $T : H \to S$, kde H i S jsou částečně uspořádané prostory. Řekneme, že T je pozitivní, jestliže platí

$$f \geq \Theta_H \quad \text{implikuje} \quad Tf \geq \theta_S. \tag{1.2}$$

1.2 Iterační proces

Nechť U je úplný pseudometrický prostor a nechť T je operátor definovaný na neprázdné podmnožině $D \subset U$.
Budeme se zabývat řešením operátorové rovnice

$$u = Tu, \tag{1.3}$$

které označíme u^* a nazveme pevný bod operátoru T.

Definice 7. Vhodnou numerickou metodou řešení rovnice (1.3) je metoda tzv. postupných aproximací

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

kde pro $u_0 \in D$ dostáváme prvky $u_1, u_2, \ldots$. Tyto prvky se nazývají iterace a postup, pomocí kterého je vytváříme, se nazývá iterační proces.
Iterační proces budeme označovat stejně jako příslušný operátor T.

V této kapitole budeme sledovat, za jakých podmínek lze iterační proces provést bez omezení a kdy bude posloupnost $\{u_n\}$ konvergovat k u^*. To obecně závisí na volbě počátečního prvku u_0, proto množinu všech prvků, pro které odpovídající posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k u^* nazveme počátečním oborem u^*.

Definice 8. Označujme $C(T, u^*)$ množinu všech iteračních posloupností procesu T konvergujících k pevnému bodu u^*.

Poznámka. Definice 7 je speciální případ obecnějšího přístupu k iteračním procesům. Neobsáhne například proces, který k výpočtu následující iterace potřebuje více než jednu iteraci předchozí, popřípadě proces, u kterého se tento počet mění. My však vystačíme s výše uvedenou definicí, která bývá v literatuře označována jako jednokroková stacionární metoda.

1.3 Věta o pevném bodě

V této části je formulována a dokázána obecná věta o pevném bodě, zároveň je zde uveden její speciální případ, který budeme v textu užívat pro důkazy dalších tvrzení.
Nechť U je pseudometrický prostor.

Věta 1.3.1 (Obecná věta o pevném bodě).
Nechť definiční obor D operátora T leží v úplném pseudometrickém prostoru U s příslušným lineárním částečně uspořádaným prostorem H.

1. *Nechť k operátoru T existuje spojitý, pozitivní operátor P definovaný na H a pevně daný prvek $z \in U$ tak, že pro libovolné dva prvky $v, w \in D$ platí*
$$\varrho(Tv, Tw) \leq P(\varrho(v, w) + \varrho(v, z)) - P\varrho(v, z) \tag{1.5}$$

2. *Nechť pro metriky $\varrho, \varrho', \sigma, \sigma'$ z H splňující $\theta_H \leq \varrho \leq \varrho'$ a $\theta_H \leq \sigma \leq \sigma'$, kde θ_H je nulový prvek v H, platí*
$$\theta_H \leq P(\varrho + \sigma) - P\sigma \leq P(\varrho' + \sigma') - P\sigma'. \tag{1.6}$$
Pro $\varrho = \varrho' = \theta_H$ a $\theta_H \leq \sigma \leq \sigma'$ tedy platí
$$\theta_H \leq P\sigma \leq P\sigma'. \tag{1.7}$$

3. *Uvažujme iteraci $\sigma_{n+1} = S\sigma_n$ v prostoru pseudovzdáleností H, kde na operátor S klademe podmínky*
$$\sigma_0 \geq \varrho(u_0, z), \quad \sigma_1 \geq \sigma_0 + \varrho(u_0, u_1). \tag{1.8}$$

4. *Existuje prvek $\gamma \in H$ tak, že $\forall \nu \in H$ platí*
$$S\nu = P\nu + \gamma. \tag{1.9}$$

5. *Předpokládejme, že* σ_n *konverguje k* σ. *Ze spojitosti* P *a z* (1.9) *plyne spojitost operátoru* S. *A tedy i*

$$\sigma = S\sigma. \tag{1.10}$$

6. *Nechť koule* K *prvků* v, *splňujících*

$$K = \{v, \varrho(v, u_1) \leq \sigma - \sigma_1\}. \tag{1.11}$$

   leží v D.

Pak existuje alespoň jedno řešení $u^* \in K$ *rovnice* $u = Tu$ *a posloupnost* $\{u_n\}$ *sestrojená podle* (1.4) *konverguje k* u^*. *Navíc všechny prvky posloupnosti* $\{u_n\}$ *leží v* K *a pro odhad chyby platí*

$$\varrho(u^*, u_n) \leq \sigma - \sigma_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.12}$$

Pokud navíc posloupnost prvků ν_n *definovaná vztahy* $\nu_{n+1} = S\nu_n$ *pro* $n = j, j+1, j+2, \ldots$ *(kde* j *je pevně zvolené číslo) konverguje k prvku* σ, *přičemž* $\nu_j \geq \sigma_j$, *pak průnik definičního oboru* D *s uzavřenou koulí* K_j, *která je definována vztahem*

$$K_j = \{v, \varrho(v, u_j) \leq \nu_j - \sigma_j\}. \tag{1.13}$$

obsahuje nejvýše jeden pevný bod u^* *operátoru* T. *Speciálně, koule* K *definovaná v* (1.11) *obsahuje právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Důkaz věty je rozdělen do šesti bodů, kde v prvních pěti je ukázána existence pevného bodu a v posledním jednoznačnost.

1. Indukcí ukážeme, že prvky σ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tvoří neklesající posloupnost. Tedy, že platí

   $$\sigma_n \leq \sigma_{n+1} \quad (n \geq 0). \tag{1.14}$$

   Podle (1.8) platí (1.14) pro $n = 0$. Předpokládejme, že (1.14) platí až do n, pak pro $n+1$ z (1.9) a z (1.7) máme

   $$\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1} = S\sigma_{n+1} - S\sigma_n = P\sigma_{n+1} - \gamma - P\sigma_n + \gamma \geq \theta_H.$$

   Z pátého předpokladu a z první, druhé a páté podmínky konvergence v definici (3) plyne

   $$\theta_H \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma.$$

2. Ukážeme, že operátor T zobrazuje kouli K do sebe. Tedy, že pro $v \in T$ platí
$$\varrho(u_1, Tv) \leq \sigma - \sigma_1. \tag{1.15}$$
Z trojúhelníkové nerovnosti a z (1.8) platí
$$\varrho(u_0, v) \leq \varrho(u_0, u_1) + \varrho(u_1, v) \leq \sigma_1 - \sigma_0 + \sigma - \sigma_1 \leq \sigma - \sigma_0. \tag{1.16}$$
Potom z (1.5), (1.16) a (1.9) dostáváme
$$\begin{aligned}\varrho(u_1, Tv) &= \varrho(Tu_0, Tv) \leq P(\varrho(u_0, v) + \varrho(u_0, z)) - P\varrho(u_0, z)\\ &\leq P(\sigma - \sigma_0 - \sigma_0) - P(\sigma_0) = S(\sigma) - \gamma - S(\sigma_0) + \gamma = \sigma - \sigma_1.\end{aligned}$$
Tedy platí (1.15), a proto $Tv \in K$.

3. Nyní ukážeme platnost nerovností
$$\varrho(u_m, u_n) \leq \sigma_n - \sigma_m \quad \text{pro} \quad 0 \leq m \leq n, \quad \text{kde} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.17}$$
a
$$\varrho(u_n, z) \leq \sigma_n \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{1.18}$$
Dokážme nejpve (1.17) indukcí. Pro $n = 0$ a $n = 1$ platí (1.17) z (1.8). Nechť (1.17) platí do $n > 0$, ukážeme, že platí i pro $n + 1$. Požadujme navíc, aby $1 \leq m \leq n + 1$, kde platnost pro $m = 0$ ukážeme následně. Podle iteračního předpokladu platí $\varrho(u_n, u_{m-1}) \leq \sigma_n - \sigma_{m-1}$. Předpokládejme ještě, že platí
$$\varrho(u_{m-1}, z) \leq \sigma_{m-1}, \tag{1.19}$$
kde platnost tohoto předpokladu se vysvětlí v průběhu důkazu nerovnosti (1.18).
Podle (1.5) platí
$$\begin{aligned}\varrho(u_{n+1}, u_m) &= \varrho(Tu_n, Tu_{m-1})\\ &\leq P(\varrho(u_n, u_{m-1}) - \varrho(u_{m-1}, z)) - P\varrho(u_{m-1}, z)\\ &\leq P(\sigma_n - \sigma_{m-1} + \sigma_{m-1}) - P\sigma_{m-1}\\ &= P\sigma_n - P\sigma_{m-1}\\ &= S\sigma_n - S\sigma_{m-1} = \sigma_{n+1} - \sigma_m.\end{aligned}$$
Nechť nyní je $m = 0$, pak podle trojúhelníkové nerovnosti a (1.8) máme
$$\varrho(u_0, u_{n+1}) \leq \varrho(u_0, u_1) + \varrho(u_1, u_{n+1}) \leq \sigma_1 - \sigma_0 + \varrho(u_1, u_{n+1}),$$

a tedy podle právě dokázaného platí

$$\varrho(u_0, u_{n+1}) \le \sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_{n+1} - \sigma_1 = \sigma_{n+1} - \sigma_0$$

Odtud za předpokladu (1.19) platí (1.17).
Abychom ukázali platnost (1.19), provedeme první čtyři kroky indukce pro (1.18) přímo a indukční krok pak bude zřejmý.
Pro $n = 0$ platí (1.18) z (1.8). Pro $n = 1$ je $\varrho(u_1, z) \le \varrho(u_1, u_0) + \varrho(u_0, z) \le \sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_0 = \sigma_1$.
Dále na základě symetrie ϱ a trojúhelníkové nerovnosti pro $n = 2$ platí

$$\begin{aligned}\varrho(u_2, z) &\le \varrho(u_2, u_1) + \varrho(u_1, z)\\ &\le \varrho(Tu_1, Tu_0) + \sigma_1 \le \varrho(Tu_0, Tu_1) + \sigma_1\\ &\le P(\varrho(u_0, u_1) + \varrho(u_0, z)) - P\varrho(u_0, z) + \sigma_1\\ &\le P(\sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_0) - P(\sigma_0) + \sigma_1\\ &= S(\sigma_1) - S(\sigma_0) + \sigma_1 = \sigma_2.\end{aligned}$$

Nyní pro $n = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned}\varrho(u_3, z) &= \varrho(u_3, u_2) + \varrho(u_2, z)\\ &\le \varrho(Tu_2, Tu_1) + \sigma_2 \le \varrho(Tu_1, Tu_2) + \sigma_2\\ &\le P(\varrho(u_1, u_2) + \varrho(u_1, z)) - P\varrho(u_1, z) + \sigma_2.\end{aligned}$$

Zde vystupuje vzdálenost $\varrho(u_1, u_2)$, kterou na základě (1.17) můžeme odhadnout rozdílem $\sigma_2 - \sigma_1$. K tomuto výpočtu bylo potřeba odhadu $\varrho(u_0, z) \le \sigma_0$, který však už máme spočítán. Proto pro příslušné indexy m můžeme předpokládat platnost (1.19) v důkazu (1.17).
Tedy

$$\varrho(u_3, z) \le P(\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_1) - P(\sigma_1) + \sigma_2 = \sigma_3.$$

Indukční krok se pak provede podobně jako krok pro $n = 3$, proto platí (1.18).

4. Z $\sigma_n \to \sigma$ a z (1.17) víme, že posloupnost $\{u_n\}$ je cauchyovská. Z úplnosti U plyne, že existuje limitní prvek $u^* \in U$ této posloupnosti. Pro $n \ge m$ z (1.17) a trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že platí

$$\varrho(u^*, u_m) \le \varrho(u^*, u_n) + \varrho(u_m, u_n) \le \varrho(u^*, u_n) + \sigma_n - \sigma_m. \qquad (1.20)$$

Nechť $n \to \infty$, pak $u_n \to u^*$, $\sigma_n \to \sigma$ a

$$\varrho(u^*, u_n) \to \theta_H. \qquad (1.21)$$

Proto pro pevné m a $n \to \infty$ z (1.20) a (1.21) platí tvrzení (1.12). Navíc pro $m = 1$ dostáváme $\varrho(u^*, u_1) \le \sigma - \sigma_1$, neboli $u^* \in K$.

5. Dále ukážeme, že u^* je pevný bod operátoru T.
   Protože $u^* \in K$ je Tu^* definováno. Proto podle (1.6) máme

$$\varrho(Tu_n, Tu^*) \le P(\varrho(u_n, u^*) + \varrho(u_n, z)) - P\varrho(u_n, z),$$

   odtud a vzhledem k (1.18), (1.12), (1.10) a (1.9) dostáváme

$$\varrho(Tu_n, Tu^*) \le P(\sigma - \sigma_n + \sigma_n) - P\sigma_n = P\sigma - P\sigma_n = S\sigma - S\sigma_n = \sigma - \sigma_{n+1}. \tag{1.22}$$

   Užitím (1.23) a (1.21) pro $n \to \infty$ platí

$$\begin{aligned} \varrho(u^*, Tu^*) &\le \varrho(u_{n+1}, Tu^*) + \varrho(u_{n+1}, u^*) \\ &= \varrho(Tu_n, Tu^*) + \varrho(u_{n+1}, u^*) \le \theta_H, \end{aligned}$$

   a tedy vzhledem k definici pseudovzdálenosti v U platí $u^* = Tu^*$.

6. Důkaz jednoznačnosti. Poznamenejme, že pro $\nu_j = \sigma_j$ má koule K_j poloměr rovný θ_H a obsahuje pouze u_j. Odtud v u^* nemusí ležet žádný pevný bod K_j.
   Předpokládejme, že w^* je pevný bod operátoru T ležící v $K_j \cap D$. To znamená, že $\varrho(w^*, u_j) \le \nu_j - \sigma_j$. Indukcí ukážeme, že

$$\varrho(w^*, u_n) \le \nu_n - \sigma_n \quad \text{pro} \quad n = j, j+1, \dots \quad . \tag{1.23}$$

   Pro $n = j$ je zřejmě (1.23) splněno. Nechť $\varrho(w^*, u_n) \le \nu_n - \sigma_n$ je splněno pro $n \ge j$. Pak pro $n+1$ máme

$$\varrho(w^*, u_{n+1}) = \varrho(Tw^*, Tu_n) \le P(\varrho(w^*, u_n) + \varrho(u_n, z)) - P\varrho(u_n, z).$$

   Dále užitím indukčního předpokladu dostáváme

$$\varrho(w^*, u_{n+1}) = P(\nu_n - \sigma_n + \sigma_n) - P\sigma_n = S\nu_n - S\sigma_n = \nu_{n+1} - \sigma_{n+1}.$$

   Tedy (1.23) platí.
   Pro $n \to \infty$ máme $u_n \to u^*$, $\nu_n \to \sigma$ a $\sigma_n \to \sigma$, a tedy z předchozího $\varrho(w^*, u^*) \le \sigma - \sigma = \theta_H$. A proto z definice pseudovzdálenosti dostáváme, že $u^* = w^*$.
   Pokud navíc zvolíme $\nu_j = \sigma$, potom pro $j = 1$ dostaneme kouli K z vztahu (1.11). Protože z pátého předpokladu této věty plyne, že $K \subseteq D$ dostáváme, že K obsahuje právě jeden pevný bod.

$\square$

K užití předchozí věty bylo potřeba ověřit všech šest, respektive sedm předpokladů zajišťujících existenci, respektive jednoznačnost pevného bodu. Často však vystačíme pouze s jejím speciálním případem, kdy prostor U je Banachův a operátor P je lineární. Získáme tak následující větu.

Věta 1.3.2 (Banachova věta o pevném bodě). *Předpokládejme, že K je neprázdná množina v Banachově prostoru U a že $T : K \to K$ je kontraktivní zobrazení s konstantou $0 \leq \alpha < 1$.*
Pak existuje $u^* \in K$ splňující rovnici $u = T(u)$ a zároveň pro libovolné $u_0 \in K$ posloupnost definovaná vztahem $u_{n+1} = T(u_n)$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ konverguje k u^*. Pro odhad chyby platí

$$\varrho(u_m, u_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \varrho(u_1, u_0). \tag{1.24}$$

Důkaz. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady věty 1.3.1.

1. Definujme $Px := \alpha x$. Vzhledem k tomu, že násobení reálným nezáporným číslem α představuje spojitý, lineární a pozitivní operátor.
   A protože platí
   $$\varrho(Tu, Tw) \leq \alpha\varrho(u, w) = \alpha(\varrho(u, w) + \varrho(v, z)) - \alpha\varrho(v, z).$$
   Dostáváme, že je splněn první předpoklad věty 1.3.1, který platí pro libovolné $z \in U$. Volme dále $z = u_0$.

2. Zřejmě pro $\theta_H \leq \varrho \leq \varrho^{'}$ a $\theta_H \leq \sigma \leq \varrho^{'}$ platí
   $$\theta_H \leq \alpha(\varrho + \sigma) - \alpha\sigma \leq \alpha(\varrho^{'} + \sigma^{'}) - \alpha^{'}.$$
   Tedy je splněn i druhý předpoklad.

3. Definujme operátor S následovně
   $$S\varrho = \alpha\varrho + \gamma, \quad \text{kde} \quad \gamma = \varrho(u_0, u_1).$$
   Volme navíc $\sigma_0 = \theta_H$. Pak platí
   $$\varrho(u_0, z) \leq \sigma_0$$
   a
   $$\sigma_1 = S\sigma_0 = \alpha\sigma_0 + \gamma = \theta_H + \varrho(u_0, u_1),$$
   tedy
   $$\sigma_1 \geq \sigma_0 + \varrho(u_0, u_1).$$

4. Plyne přímo z volby S.

5. Z definice S dostáváme, že

$$\sigma_1 = \alpha\sigma_0 + \gamma$$
$$\sigma_2 = \alpha(\alpha\sigma_0 + \gamma) + \gamma.$$

   Platí tedy $\sigma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \gamma$. Vzhledem k tomu, že $0 \leq \alpha < 1$ tato řada konverguje, a proto $\{\sigma_n\}$ konverguje.

6. Šestá podmínka ve větě 1.3.1 zaručuje, že prvky u_n leží v kouli K. Vzhledem k tomu, že operátor T je zobrazení z K do K, není potřeba ji ověřovat.
   Pokud bychom na operátoru T tuto podmínku nepožadovali, pak by bylo nutné navíc předpokládat, že K je koule prvků v, pro které platí

$$\varrho(v, u_1) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\varrho(u_0, u_0).$$

   Pak platí

$$\begin{aligned}\varrho(v, u_1) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\varrho(u_0, u_1)\\ &= (1-\alpha)^{-1}\varrho(u_0, u_1) - \varrho(u_0, u_1).\end{aligned}$$

   Navíc víme, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j x$ konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$, proto platí

$$(1-\alpha)^{-1}\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \gamma, \quad \text{kde} \quad \gamma = \varrho(u_0, u_1).$$

   Podrobnosti lze najít v [5, strana 93]. Nakonec platí

$$\begin{aligned}\varrho(v, u_1) &\leq (1-\alpha)^{-1}\varrho(u_0, u_1) - \varrho(u_0, u_1)\\ &= (1-\alpha)^{-1}\gamma - \gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma - \gamma = \sigma - \sigma_1.\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali existenci. Jednoznačnost pak vyplývá z poznámky na konci důkazu 1.3.1. Zbývá ukázat platnost (1.24). Protože T je kontraktivní zobrazení, dostáváme

$$\varrho(u_{n+1}, u_n) \leq \alpha\varrho(u_n, u_{n-1}) \leq \cdots \leq \alpha^n \varrho(u_1, u_0).$$

A tedy platí

$$\varrho(u_m, u_n) \leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \varrho(u_{n+j+1}, u_{n+j}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\varrho(u_1, u_0).$$

□

1.4 Rychlost konvergence

V následujícím jsou uvedeny tzv. konvergenční faktory, které jsou do jisté míry měřítkem kvality metody.
Nechť U je normovaný prostor s pevně zvolenou normou $\|\cdot\|$ a nechť I značí interval $I = \langle 1, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Definice 9. Mějme $\{u_k\} \subset U$ posloupnost konvergující k u^* a nechť je $p \in I$, pak čislo

$$R_p\{u_k\} = \begin{cases} \limsup_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|^{\frac{1}{k}} & \text{pro } p = 1 \\ \limsup_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|^{\frac{1}{p^k}} & \text{pro } p > 1. \end{cases}$$

nazýváme R-faktorem posloupnosti $\{u_k\}$.

Definice 10. Mějme iterační proces $u_{n+1} = Tu_n$ s pevným bodem u^*. Číslo $R_p(T, u^*) = \sup\{R_p\{u_k\}, \{u_k\} \in C(T, u^*)\}$, kde $C(T, u^*)$ je definované v definici 8, nazýváme R-faktorem iteračního procesu T v bodě u^*.

Uvažujme $\{u_k\}$, posloupnost z $C(T, u^*)$, pak existuje index k_0 takový, že pro všechna $k \geq k_0$ je $0 \leq \|u_k - u^*\| < 1$. Pak zřejmě platí $0 \leq R_p\{u_k\} \leq 1$,a tedy i $0 \leq R_p(T, u^*) \leq 1$ pro všechna $p \in I$.

Věta 1.4.1. *Mějme iterační proces T s pevným bodem u^*. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení*

1. $R_p(T, u^*) = 0 \quad \forall p \in I.$
2. $R_p(T, u^*) = 1 \quad \forall p \in I.$
3. *Existuje $p_0 \in I$ tak, že*

$$\forall p \in I_i, \quad \textit{platí} \quad R_p(T, u^*) = i \quad i = 0, 1, \tag{1.24}$$

kde $I_0 = \langle 1, p_0)$ a $I_1 = (p_0, \infty)$.

Důkaz. Důkaz rozdělíme do tří kroků.

1. Ukážeme, že pro libovolnou posloupnost $\{u_k\}$ platí, že pokud existuje $p_0 \in I$ tak, že $0 < R_p\{u_k\} < 1$, pak platí

$$\begin{array}{llll} \text{pro} & p \in I: & p < p_0 & R_p\{u_k\} = 0 \\ \text{pro} & p \in I: & p > p_0 & R_p\{u_k\} = 1. \end{array}$$

Mějme tedy libovolně, ale pevně, posloupnost $\{u_k\}$ a $p_0 \in I$ takové, že $0 < R_p\{u_k\} < 1$. Označme $\varepsilon_k = \|u_k - u^*\|$.
Předpokládejme, že $p_0 > 1$, ukážeme, že

$$\forall q < p_0 \quad \text{platí} \quad R_q\{u_k\} = 0. \tag{1.25}$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je takové kladné číslo, že

$$R_{p_0}\{u_k\} + \varepsilon = r < 1, \tag{1.26}$$

pak z definice 9 a z (1.26) plyne, že existuje index k_0 takový, že pro všechny indexy $k > k_0$ platí

$$\varepsilon_k^{\frac{1}{p_0^k}} \leq r. \tag{1.27}$$

Proto pro $q = 1$ platí

$$R_q\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{k}}) = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{p_0^k}})^{\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{p_0^k}}} \leq \lim_{k\to\infty} r^{\frac{p^k}{k}} = 0$$

a pro $1 < q < p_0$ je $\frac{p}{q} > 1$ a platí

$$R_q\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{q^k}}) = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{p_0^k}})^{\frac{\frac{1}{q^k}}{\frac{1}{p_0^k}}} \leq \lim_{k\to\infty} r^{(\frac{p_0}{q})^k} = 0.$$

Tím jsme dokázali (1.25).
Zbývá ukázat, že pro $p_0 < q$ je $R_q\{u_k\} = 1$.
Nechť je $\varepsilon > 0$ takové kladné číslo, že platí

$$0 < R_{p_0}\{u_k\} - \varepsilon = r < 1. \tag{1.28}$$

Vzhledem k definici 9 a (1.28) bude pro libovolný index k_0 existovat index $k_1 > k_0$ takový, že platí

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_1}^{\frac{1}{p_0^{k_1}}} &\geq r \quad p_0 > 1 \\ \varepsilon_{k_1}^{\frac{1}{k_1}} &\geq r \quad p_0 = 1. \end{aligned}$$

Pro $p_0 = 1$ platí

$$R_q\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{q^k}}) = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{k}})^{\frac{\frac{1}{q^k}}{\frac{1}{k}}} \geq \limsup_{k\to\infty} r^{\frac{k}{q^k}} = 1$$

a pro $p_0 > 0$, je $\frac{p_0}{q} < 1$, proto platí

$$R_q\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{q^k}}) = \limsup_{k\to\infty}(\varepsilon_k^{\frac{1}{p_0^k}})^{\frac{\frac{1}{q^k}}{\frac{1}{p_0^k}}} \geq \limsup_{k\to\infty} r^{(\frac{p_0}{q})^k} = 1.$$

2. Nyní ukážeme, že pokud neplatí 1. ani 2. tvrzení věty, pak platí 3. tvrzení. Označme

$$p_0 = \inf\{p \in I, R_p(T, u^*) = 1\}.` \tag{1.29}$$

ukážeme, že platí následující

$$\begin{aligned} R_p(T, u^*) &= 1 \quad \forall p > p_0 \\ R_p(T, u^*) &= 0 \quad \forall p < p_0. \end{aligned}$$

Předpokládejme opak

$$\exists p > p_0 : \quad R_p(T, u^*) < 1, \tag{1.30}$$

odtud platí $R_p\{u_k\} < 1 \quad \forall u_k \in C(T, u^*)$.
Z definice čísla p_0 plyne existence $q \in \langle p_0, p)$ takového, že $R_q(T, u^*) = 1$. Pak existuje $\{v_k\}$ tak, že $R_q\{v_k\} > 0$. Odtud vzhledem k $q < p$ a první části důkazu dostáváme, že $R_p\{v_k\} = 1$, ale to je spor s (1.30).
Podobně by se ukázalo tvrzení i pro $p < p_0$.

3. Nyní ukážeme, že platí právě jedno z uvedených tvrzení věty. Už víme, že 1. a 2. neplatí právě tehdy když, platí 3.
Předpokládejme tedy, že neplatí 1. a 3., odtud z neplatnosi 1. máme $\exists p_0 : R_{p_0}(T, u^*) > 0$. To vzhledem na první část důkazu dává $R_{p_0}(T, u^*) = 1$, protože jinak by platilo 3. Provede-li se stejná úvaha pro libovolné $p \in I$, dostaneme 2.
Zřejmě naopak z platnosti 2. dostáváme neplatnost 1. i 3.
Stejně se ukáže ekvivalence neplatnosti 2. a 3. a platností 1.

$\square$

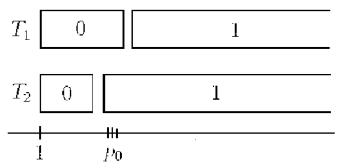
Uvažujme dva iterační procesy

$$u_{n+1} = T_1 u_n \tag{1.31}$$
$$u_{n+1} = T_2 u_n, \tag{1.32}$$

se stejným pevným bodem u^*.

Definice 11. Řekneme, že iterační proces (1.31) je R-rychlejší v u^*, než (1.32), jestliže existuje $p_0 \in I$ takové, že $R_{p_0}(T_1, u^*) < R_{p_0}(T_2, u^*)$.

Věta 1.4.1 nám zaručuje, že nenastane situace, kdy by jeden iterační proces byl R-rychlejší, než druhý a zároveň by platil opak. Toho si můžeme všimnout na obrázku 1.1, kdy neexistuje $p_1 \in I$ takové, že by platilo $R_{p_1}(T_1, u^*) > R_{p_1}(T_2, u^*)$, proto předchozí definice dává smysl.



Obrázek 1.1:

Definice 12. Mějme iterační proces $u_{n+1} = Tu_n$, s pevným bodem u^*. Pak číslo

$$Q_R(T, u^*) = \begin{cases} \infty, & \text{jestliže} \quad R_p(T, u^*) = 0 \quad \forall p \in I \\ \inf\{p \in I, R_p(T, u^*) = 1\} & \text{jinak,} \end{cases} \tag{1.33}$$

nazveme R-řádem iteračního procesu T v u^*.

Zřejmě proces (1.31) je R-rychlejší než (1.32) v u^* právě tehdy, když

$$Q_R(T_1, u^*) > Q_R(T_2, u^*).$$

Dále definujeme Q-faktor, resp. Q-řád, jejichž vlastnosti budou podobné R-faktorům, resp. R-řádům.

Definice 13. Nechť $\{u_k\}$ je konvergentní posloupnost s limitou u^* a $p \in I$. Pak číslo

$$Q_p\{u_k\} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže} \quad u_k = u^* \quad \text{pro} \quad \forall k > k_0 \\ \limsup_{k\to\infty} \frac{\|u_{k+1}-u^*\|}{\|u_k-u^*\|^p}, & \text{je-li} \quad u_k \neq u^* \quad \forall k \text{ a navíc je tato limita vlastní} \\ \infty & \text{ve všech ostatních případech} \end{cases} \tag{1.34}$$

nazveme Q-faktorem posloupnosti $\{u^*\}$.

Poznamenejme, že Q-faktor $\{u_k\}$ nabude hodnoty ∞ jednak pokud neexistuje příslušná vlastní limita, nebo pokud existují indexy k_0 a k_1 takové, že $k_0 < k_1$, $u_{k_0} = u^*$ a zároveň $u_{k_1} \neq u^*$.

Definice 14. Je-li T iterační proces s pevným bodem u^* a $p \in I$, pak číslo

$$Q_p(T, u^*) = \sup\{Q_p\{u_k\}, \{u_k\} \in C(T, u^*)\} \tag{1.35}$$

nazveme Q-faktorem iteračního procesu T v bodě u^*.

Podobně jako pro R-faktory platí následující věta.

Věta 1.4.2. *Mějme iterační proces T s pevným bodem u^*. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení*

1. $Q_p(T, u^*) = 0 \quad \forall p \in I.$

2. $Q_p(T, u^*) = \infty \quad \forall p \in I.$

3. *Existuje $p_0 \in I$ tak, že*

$$\forall p \in I_i, \quad \textit{platí} \quad Q_p(T, u^*) = i \quad i = \{0, \infty\} \tag{1.36}$$

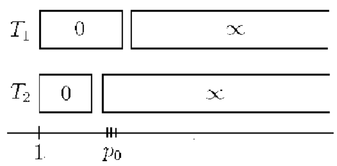
kde $I_0 = \langle 1, p_0)$ a $I_\infty = (p_0, \infty)$.

Důkaz. Důkaz se provede podobně jako v 1.4.1. □

Můžeme tedy zavést následující definice.

Definice 15. Řekneme, že iterační proces (1.31) je Q-rychlejší v u^* než (1.32), jestliže existuje $p_0 \in I$ takové, že $Q_p(T_1, u^*) < Q_p(T_2, u^*)$.

Podobně jako u R faktorů věta 1.4.2 nám zaručuje, že předchozí definice dává smysl (viz obrázek 1.2).



Obrázek 1.2:

Definice 16. Mějme iterační proces $u_{n+1} = Tu_n$, s pevným bodem u^*. Pak číslo

$$Q_Q(T, u^*) = \begin{cases} \infty, & \text{jestliže} \quad Q_p(T, u^*) = 0 \quad \forall p \in I \\ \inf\{p \in I, Q_p(T, u^*) = \infty\} & \text{jinak} \end{cases} \tag{1.37}$$

nazveme Q-řádem iteračního procesu T v u^*.

Podobně jako u R-řádů je proces (1.31) Q-rychlejší než (1.32) v u^* právě tehdy, když

$$Q_Q(T_1, u^*) > Q_Q(T_2, u^*).$$

1.5 Vztahy a vlastnosti konvergenčních faktorů

Věta 1.5.1. *Nechť* $\{u_k\} \subset U$ *je posloupnost, která konverguje k* u^**, pak*

$$R_1\{u_k\} \leq Q_1\{u_k\}. \tag{1.38}$$

Pokud T *je iterační proces s pevným bodem* u^**, pak*

$$R_1(T, u^*) \leq Q_1(T, u^*). \tag{1.39}$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat (1.38) pro $Q_1\{u_k\} < \infty$. Položme proto $\varepsilon_k = \|u_k - u^*\|$ a $\alpha = Q_1\{u_k\} + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné.
Z definice limity bude pro dané $\varepsilon > 0$ existovat $k_0 : k > k_0$, platí

$$\left|\frac{\|u_k - u^*\|}{\|u_{k-1} - u^*\|} - Q_1\{u_k\}\right| \leq \varepsilon.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{\|u_k - u^*\|}{\|u_{k-1} - u^*\|} \leq \varepsilon + Q_1\{u_k\} = \alpha.$$

Proto

$$\varepsilon_k = \|u_k - u^*\| = \frac{\|u_k - u^*\|}{\|u_{k-1} - u^*\|}\|u_{k-1} - u^*\| \leq \alpha\|u_{k-1} - u^*\| = \alpha\varepsilon_{k-1}.$$

Užitím indukce a vhodnou volbou k_0 dostaneme

$$\varepsilon_k \leq \alpha\varepsilon_{k-1} \leq \cdots \leq \alpha^{k-k_0}\varepsilon_{k_0} \quad \forall k \geq k_0,$$

tedy

$$\begin{aligned} R_1\{u_k\} &= \limsup_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\frac{1}{k}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} (\alpha^k \frac{\varepsilon_k}{\alpha^{k_0}})^{\frac{1}{k}} \leq \alpha \limsup_{k\to\infty} (\frac{\varepsilon_{k_0}}{\alpha^{k_0}})^{\frac{1}{k}} \\ &= \alpha = Q_1\{u_k\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

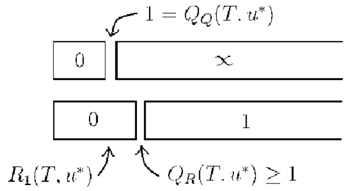
Protože ε bylo libovolné, platí (1.38) □

Věta 1.5.2. *Nechť* T *je iterační proces s pevným bodem* u^**. Pak platí*

$$Q_Q(T, u^*) \leq Q_R(T, u^*). \tag{1.40}$$

Důkaz.

Na obrázku 1.3 je vidět, že pokud $Q_Q(T,u^*) = 1$, pak vzhledem k předchozí větě platí $Q_R(T,u^*) \geq 1$, a tedy je splněno (1.40).



Obrázek 1.3:

Nechť $p > 1$ ukážeme, že platí

$$Q_p\{u_k\} < \infty \quad \text{implikuje} \quad R_p\{u_k\} < 1. \tag{1.41}$$

Položme, podobně jako v důkazu předchozí věty, $\varepsilon_k = \|u_k - u^*\| \quad \forall k$ a $\alpha = Q_p\{u_k\} + \varepsilon$, pro libovolné $\varepsilon > 0$. Následně, z definice limity, opět dospějeme k tomu, že $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0$, takové, že $\forall k \geq k_0$ platí

$$\varepsilon_k \leq \alpha \varepsilon_{k-1}^p \leq \alpha^{1+p} \varepsilon_{k-2}^{p^2} \leq \cdots \leq \alpha^{1+p+\cdots+p^{k-k_0-1}} \varepsilon_{k_0}^{p^{k-k_0}},$$

odtud plyne

$$\varepsilon_k^{\frac{1}{p^k}} \leq \alpha^{\frac{1+p+\cdots+p^{k-k_0-1}}{p^k}} \varepsilon_{k_0}^{\frac{1}{p^{k_0}}}.$$

Pro $k > k_0$ dostáváme

$$\alpha^{\frac{1+p+\cdots+p^{k-k_0+1}}{p^k}} = \alpha^{\frac{p^{k-k_0}-1}{p-1}\frac{1}{p^k}} = \alpha^{\frac{p^{k-k_0}-1}{(p-1)p^k}} = (\alpha^{\frac{1}{p-1}})^{(\frac{p^{k-k_0}-1}{p^k})}.$$

Vzhedem k tomu, že $k > k_0$, platí

$$\frac{p^{k-k_0}-1}{p^k} \leq \frac{1}{p^{k_0}},$$

proto dostáváme

$$\varepsilon_k^{\frac{1}{p^k}} \leq \alpha_1^{\frac{1}{p^{k_0}}} \varepsilon_{k_0}^{\frac{1}{p^{k_0}}}, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 = \max(1, \alpha^{\frac{1}{p-1}}).$$

Zřejmě lze k_0 zvolit tak, aby platilo $(\alpha_1 \varepsilon_{k_0})^{\frac{1}{p^{k_0}}} < 1$, tedy

$$R_p\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\frac{1}{p^k}} \leq \limsup_{k\to\infty} (\alpha_1 \varepsilon_{k_0})^{\frac{1}{p^{k_0}}} < 1.$$

To dokazuje implikaci (1.41) a tedy i (1.40) □

Na následujícím příkladě je vidět, že existuje proces, u kterého je Q řád ostře menší, než R řád.

Příklad. Uvažujme iterační proces $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, který generuje jedinou posloupnost $\{u_k\}$ definovanou předpisem

$$u_k = \begin{cases} (\frac{\alpha}{2})^{p^k} & \text{pro} \quad k - \text{sudé}, \\ (\alpha^{\frac{q}{p}})^{p^k} & \text{pro} \quad k - \text{liché}, \end{cases} \tag{1.42}$$

kde $0 < \alpha < 1$ a $1 < q < p$.
Zřejmě platí $R_p\{u_k\} = \limsup_{k\to\infty} \|(\alpha^{\frac{p}{q}})^{p^k} - 0\|^{\frac{1}{p^k}} = \alpha^{\frac{p}{q}}$, kde $0 < \alpha^{\frac{q}{p}} < 1$. Odtud, vzhledem k větě 1.4.1, je

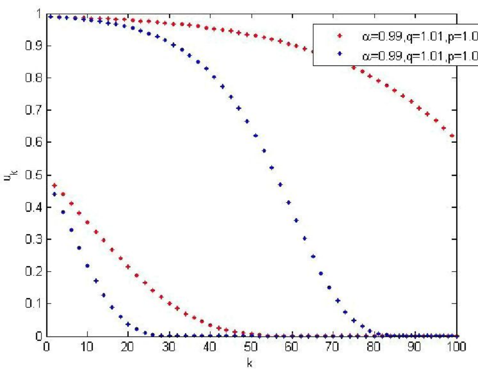
$$Q_R(T, 0) = p. \tag{1.43}$$

Spočítáme dále

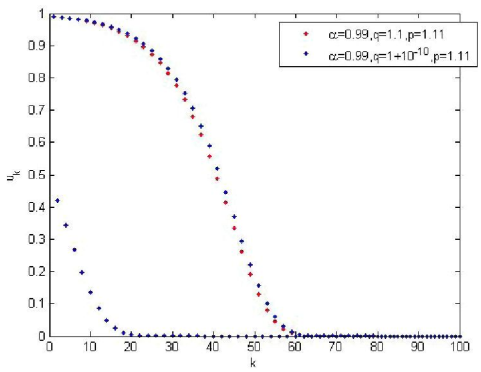
$$\frac{\|u_{k+1} - 0\|}{\|u^k - 0\|^q} = \begin{cases} \frac{(\frac{\alpha}{2})^{p^{k+1}}}{(\alpha^{\frac{q}{p}})^{p^k q}} = \left(\frac{\alpha^{\frac{p^2-q^2}{p}}}{2^p}\right)^{p^k} \to 0 & \text{pro } k \text{ liché}, \\ \frac{(\alpha^{\frac{q}{p}})^{p^{k+1}}}{(\frac{\alpha}{2})^{p^k q}} = 2^{p^k} q \to \infty & \text{pro } k \text{ sudé}. \end{cases}$$

Zřejmě tedy $Q_q(T, 0) = \infty$, a proto $Q_Q(T, 0) \leq q$.

Přestože R a Q řády popisují chování procesů pro dostatečně velká k, je možné nahlédnout na jejich rozdíly a vlastnosti při zobrazení konečného počtu prvků posloupnosti (1.42).



Obrázek 1.4:



Obrázek 1.5:

Na obrázku 1.4 je vidět, že zvýšení hodnoty p, která podle (1.43) znamená zvýšení R řádu, způsobilo zrychlení konvergence. Dá se říci, že R řád vyjadřuje celkovou rychlost zmenšování chyby.

Naproti tomu Q řád vyjadřuje závislost chyby iterace na iteraci předchozí. Obrázek 1.5 tuto situaci vystihuje, zároveň je možné dojít ke stejnému závěru z definice Q řádů posloupností, kde v příslušné limitě vystupuje poměr následující iterace k mocnině iterace předchozí.

Na závěr je zde uvedeno vhodné kritérium, na určování řádů.

Věta 1.5.3. *Nechť T je iterační proces s pevným bodem u^*. Předpokládejme, že existuje $p \in I$ a konstanta β taková, že pro všechny posloupnosti $\{u_k\} \in C(T, u^*)$ platí*

$$\|u_{k+1} - u^*\| \leq \beta \|u_k - u^*\|^p \quad \forall k \geq k_0, \tag{1.44}$$

kde k_0 závisí na $\{u_k\}$. Pak

$$Q_R(T, u^*) \geq Q_Q(T, u^*) \geq p. \tag{1.45}$$

Jestliže navíc existuje konstanta $\alpha > 0$ a posloupnost $\{u_k\} \in C(T, u^*)$ taková, že platí

$$\|u_{k+1} - u^*\| \geq \alpha \|u_k - u^*\|^p > 0 \quad \forall k > k_0, \tag{1.46}$$

pak $Q_Q(T, u^*) \leq Q_R(T, u^*) \leq p$. Odtud také plyne, že pokud (1.44) *a* (1.46) *platí současně, pak se oba řády rovnají číslu p.*

Důkaz. Pokud $\exists k_0 : u_{k_0} = u^*$, pak by muselo vzhledem k (1.44) platit $u_k = u^*$ pro $\forall k \geq k_0$. Proto by $Q_p\{u_k\} = 0$.
Nechť $u_k \neq u^* \quad \forall k$, pak $\frac{\|u_{k+1} - u^*\|}{\|u_k - u^*\|^p} \leq \beta$, tedy i $Q_p(T, u^*) \in \langle 0, \beta \rangle$. Proto vzhledem k větě 1.4.2 dostáváme (1.45).
Přepokládejme, že (1.46) platí pro nějakou posloupnost $\{u_k\} \in C(T, u^*)$, pak platí

$$\varepsilon_k = \|u_k - u^*\| > 0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Z (1.46) také dostáváme, že

$$\varepsilon_{k+1} \geq \alpha^{1+p+\cdots+p^{k-k_0}} \varepsilon_{k_0}^{p^{k-k_0+1}}, \quad p > 1, \forall k \geq k_0$$

a

$$\varepsilon_{k+1} \geq \alpha^{k-k_0+1} \varepsilon_{k_0}^{k-k_0+1}, \quad p = 1 \quad k > k_0.$$

Nechť je nyní $p = 1$, pak

$$R_1\{u_k\} \geq \lim_{k \to \infty} (\alpha^{k-k_0+1} \varepsilon_{k_0}^{k-k_0+1})^{\frac{1}{k+1}} = \alpha \varepsilon_{k_0} > 0.$$

Nechť $p > 1$, pak podobně jako v důkazu věty (1.5.2) platí

$$\begin{aligned} R_p\{u_k\} &= \limsup_{k \to \infty} \varepsilon_{k+1}^{\frac{1}{p^{k+1}}} \geq \limsup_{k \to \infty} (\alpha^{\frac{1}{p^{k+1}} + \frac{1}{p^k} + \cdots + \frac{1}{p^{k_0+1}}} \varepsilon_{k_0}^{\frac{1}{p^{k_0}}}) \\ &\geq \lim_{k \to \infty} (\min(1, \alpha^{\frac{1}{p-1}}) \varepsilon_{k_0}^{\frac{1}{p^{k_0}}}) = \min(1, \alpha^{\frac{1}{p-1}}) \varepsilon_{k_0}^{\frac{1}{p^{k_0}}} > 0. \end{aligned}$$

Protože pro $p > 1$ i $p = 1$ platí $R_p\{u_k\} > 0$, je i $R_p(T, u^*) > 0$, a tedy $Q_R(T, u^*) \leq p$. □

Aplikujeme-li větu 1.5.3 na poslední příklad, pak se nám zřejmě podaří najít

$$\alpha' > 0 : \frac{\|u_{k+1} - 0\|}{\|u_k - 0\|^p} \geq \alpha'$$

a tím splnit podmínku (1.46). Takové α' je rovno

$$\min\left(\left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha^{\frac{q}{p}}}\right)^{p^{k+1}}, \left(\frac{\alpha^{\frac{q}{p}}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^{p^{k+1}}\right).$$

1.6 Rychlost konvergence při změně normy

Na začátku předchozího paragrafu jsme uvedli, že normu, se kterou budeme pracovat, máme pevně zvolenou. Tím jsme se vyhnuli úvahám o tom, jestli definované charakteristiky iteračních procesů budou mít stejnou hodnotu i při změně normy.
V této části ukážeme, že pro ekvivalentní normy mají Q, respektive R řády stejnou hodnotu a také, že Q-faktory posloupností se obecně v různých normách nerovnají.

Věta 1.6.1. *Nechť $\{u_k\} \subset U$ je konvergentní posloupnost s limitou u^*. Pak pro libovolné $p \in \langle 1, \infty)$ je $R_p\{u_k\}$ nezávislý na volbě normy v U.*

Důkaz. Uvažujme ekvivalentní normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|'$. Nechť tedy existují konstanty $c_2 \geq c_1 > 0$, takové že

$$c_1\|u\|' \leq \|u\| \leq c_2\|u\|' \tag{1.47}$$

Pak pro $p = 1$ dostáváme

$$R_1\{u_k\}_{\|\cdot\|} = \limsup_{k\to\infty}(\|u_k - u^*\|)^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k\to\infty}(c_2\|u_k - u^*\|')^{\frac{1}{k}}$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|'^{\frac{1}{k}} = R_1\{u_k\}_{\|\cdot\|'}.$$

Podobně se ukáže

$$R_1\{u_k\}_{\|\cdot\|} \geq R_1\{u_k\}_{\|\cdot\|'}$$

a tedy, že pro $p = 1$ platí tvrzení věty. Dále pro $p > 1$ je postup důkazu téměř stejný. □

Důsledkem předchozí věty je, že R faktory a R řády iteračních procesů zachovávají hodnotu při ekvivalentních normách.

Příklad. V $\mathbb{R}^2$ uvažujme posloupnost

$$u_k = \begin{cases} (\frac{1}{3})^k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pro} \quad k - \text{liché}, \\ (\frac{1}{3})^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{pro} \quad k - \text{sudé}, \end{cases}$$

a současně dvě normy

$$\|u\|_\infty := \max_{i=1,2} |u_i|$$

a

$$\|u\|_2 := \left(\sum_{i=1,2} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zřejmě $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pro $Q_1\{u_k\}_{\|\cdot\|_\infty}$ dostáváme

$$\frac{\|u_{k+1} - u^*\|_\infty}{\|u_k - u^*\|_\infty} = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{3})^{k+1}}{(\frac{1}{3})^k 2} = \frac{1}{6} & \text{pro} \quad k - \text{liché} \\ \frac{(\frac{1}{3})^{k+1} 2}{(\frac{1}{3})^k} = \frac{2}{3} & \text{pro} \quad k - \text{sudé}, \end{cases}$$

tedy $Q_1\{u_k\}_{\|\cdot\|_\infty} = \frac{2}{3}$. Dále pro $Q_1\{u_k\}_{\|\cdot\|_2}$ platí

$$\frac{\|u_{k+1} - u^*\|_2}{\|u_k - u^*\|_2} = \begin{cases} \frac{((\frac{1}{3})^{2k+2}(2))^{1/2}}{((\frac{1}{3})^{2k}(4))^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} & \text{pro} \quad k - \text{liché} \\ \frac{((\frac{1}{3})^{2k+2}(4))^{1/2}}{((\frac{1}{3})^{2k}(2))^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} & \text{pro} \quad k - \text{sudé}, \end{cases}$$

tedy $Q_1\{u_k\}_{\|\cdot\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Odud je vidět, že analogie věty 1.6.1 se nám pro Q faktory posloupností nepovede dokázat. Lze ale ukázat následující.

Věta 1.6.2. *Uvažujme $Q_p(T, u^*)$, pak relace $Q_p(T, u^*) = 0 \quad 0 < Q_p(T, u^*) < \infty$ a $Q_p(T, u^*) = \infty$ jsou zachovány v ekvivalentních normách.*

Důkaz. Uvažujme dvě ekvivalentní normy s vlastností (1.47) a posloupnost $\{u_k\}$ konvergující k u^*.
Pokud $u_k = u^*$ pro nejaké k, pak $Q_p\{u_k\} = 0$, nebo $Q_p\{u_k\} = \infty$ v libovolné

normě. Nechť tedy $u_k \neq u^* \quad \forall k$.
Platí

$$
\begin{aligned}
Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\|u_{k+1} - u^*\|}{\|u_k - u^*\|^p} \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{c_2\|u_{k+1} - u^*\|'}{c_1^p\|u_k - u^*\|'^p} = \frac{c_2}{c_1^p} Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} \qquad (1.48)
\end{aligned}
$$

Podobně se ukáže $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} \leq \frac{c_2^p}{c_1} Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|}$.

1. Pokud $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|} = 0$, pak $\forall\{u^*\} \in C(T, u^*)$ je $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} = 0$. Proto $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} = 0$, a tedy $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|'} = 0$.

2. Jestliže $0 < Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|} < \infty$, pak existuje $\{u_k\} \in C(T, u^*)$ taková, že $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} > 0$, proto $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} > 0$, a tedy $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|'} > 0$.
Zároveň existuje číslo K takové, že $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} < K$ pro $\forall\{u_k\} \in C(T, u^*)$.
Odtud je $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} < \frac{c_2^p}{c_1} K$ pro $\forall\{u_k\} \in C(T, u^*)$, a tedy $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|'} < \infty$.

3. Nechť $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|} = \infty$, pak pro libovolné číslo K existuje posloupnost $\{u_k\} \in C(T, u^*)$ taková, že $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} > \frac{c_1^p}{c_2} K$. Zřejmě pak z (1.48) platí

$$
\frac{c_1^p}{c_2} Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} \geq Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|} > K \frac{c_1^p}{c_2},
$$

tedy $Q_p\{u_k\}_{\|\cdot\|'} > K$, a tedy $Q_p(T, u^*)_{\|\cdot\|'} = \infty$.

$\square$

Důsledek 1. Z předchozí věty vyplývá, že Q řády iteračních procesů jsou zachovány v ekvivalentních normách.

Kapitola 2

Newtonowa metoda

2.1 Diferenciální počet pro nelineární operátory

V celé této kapitole se budeme věnovat Newtnově metodě v Banachových prostorech.
K tomu účelu jsou v této úvodní části sepsány definice a jejich vlastnosti, na které se v dalším textu odkazuji. Většina důkazů zde uvedena není, ale vždy je odkázáno na příslušnou literaturu.
Nechť F je operátor mezi Banachovými prostory U a V, a nechť $\mathcal{L}(U,V)$ označuje množinu všech ohraničených lineárních operátorů z U do V.

Definice. Nechť X je otevřená podmnožina v U. Řekneme, že F je diferencovatelný v Fréchetově smyslu v bodě u_0, jestliže existuje ohraničený lineární operátor $A \in \mathcal{L}(U,V)$ tak, že

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = A_{u_0}h + o(\|h\|) \quad h \to 0.$$

Pak A_{u_0} se nazývá F-derivace, resp. silná derivace v bodě u_0.

Definice. Nechť X je otevřená podmnožina v U. Operátor F se nazývá diferencovatelný v Gateauxově smyslu v bodě $u_0 \in X$, jestliže existuje ohraničený lineární operátor $A \in \mathcal{L}(U,V)$ tak, že

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} = Ah \quad \forall h \in V, \|h\| = 1.$$

Pak A se nazývá Gateauxovou resp. slabou derivací F v u_0.

Platí, že pokud operátor F má silnou derivaci v u_0, pak má i slabou derivaci v tomto bodě. Opak obecně neplatí, aby tomu tak bylo, musí být

slabá derivace v u_0 spojitá v u.
Označme $I = \langle u_0, u_0 + \Delta u\rangle := \{\lambda u_0 + (1-\lambda)(u_0 + \Delta u) | \lambda \in [0,1]\}$ úsečku v U.

Věta 2.1.1. *Nechť $X \subset U$ je otevřená množina. Nechť platí $I = \langle u_0, u_0 + \Delta u\rangle \subset X$ a $F : U \to V$ má G-derivaci $\forall u \in I$. Pak platí*

$$\|F(u_0) - F(u_0 + \Delta u)\| \leq \sup_{0 \leq \nu \leq 1} \{\|F^{'}(u_0 + \nu \Delta u)\| \|\Delta u\|\}.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [8, strany 519- 520]. □

Nechť je nyní U reálná osa a V Banachův prostor. Pak $F : U \to V$ se nazývá abstraktní funkce.
Je-li F definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak definujme integrál F přes $\langle a, b\rangle$ následovně

$$\int_a^b F(t)dt := \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi)(t_{k+1} - t_k),$$

kde

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \qquad \xi \in \langle t_k, t_{k+1}\rangle$$

a $\delta = \max_{k=1 \cdots n-1} |t_{k+1} - t_k|$.
Zobecníme-li úvahy pro funkce nabývající skalárních hodnot, ukazuje se, že integrál z abstraktní funkce existuje a že má podobné vlastnosti jako Riemanův integrál. Například platí nerovnost

$$\|\int_a^b F(t)dt\| \leq \int_a^b \|F(t)\|dt. \tag{2.1}$$

Nechť jsou U, V Banachovy prostory a nechť BC_{UV} značí množinu všech spojitých ohraničených zobrazení z U do V.
Uvažujme úsečku $I = \langle u_0, u_0 + \Delta u\rangle \subset U$ a $F : I \subset U \to BC_{UV}$, pak pro pevné Δu je $F(u_0 + t\Delta u)\Delta u$ abstraktní funkcí z $[0,1]$ do V. Můžeme tedy definovat integrál abstraktní funkce přes úsečku. Proto

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta u} F(u)du := \int_0^1 F(u_0 + t\Delta u)\Delta u dt.$$

Věta 2.1.2 (Newton-Leibnitz). *Mějme $F : U \to V$ a $I = \langle u_0, u_0 + \Delta u\rangle$ a nechť $F^{'}(u)$ existuje na I a je spojitá vzhledem k u. Pak zřejmě $F^{'}(u) \in \mathcal{L}(U, V) \subseteq BC_{UV}$ tzn. $F^{'} : I \to BC_{UV}$.*
A platí

$$\int_{u_0}^{u_0+\Delta u} F^{'}(u)du = F(u_0 + \Delta u) - F(u_0).$$

Důkaz. Důkaz lze najít v [8, strany 524-525]. □

Dále užijeme následující větu.

Věta 2.1.3 (Věta o poruchách).
Nechť U a W jsou normované prostory, z nichž alespoň jeden je Banachův. Nechť $A \in \mathcal{L}(V, W)$ má ohraničenou inverzi, tedy nechť $\|A^{-1}\| \leq \alpha$. Jestliže $\|A - B\| \leq \beta$ a $\beta\alpha < 1$, pak B je bijekce a platí

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Důkaz lze najít v [12, strana 45]. □

2.2 Newtonova metoda

V této části se budeme věnovat Newtonově metodě pro hledání řešení operátorové rovnice

$$F(u) = 0. \tag{2.3}$$

Je zde uvedena věta o lokální konvergenci spolu s Kantorovičovou větou, která má význam zejména pro další rozbor.

Motivace pro vznik Newtonovy metody

Uvažujme dostatečně hladké zobrazení $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se souřadnicemi $F(x) = (f_i(x))$. Jedním ze způsobů, jak odvodit předpis pro Newtonovu metodu, je geometrický náhled na hledání kořene rovnice $F(x) = 0$ pomocí tečných nadrovin[1]. My však využijeme rozvoje Taylorova polynomu funkcí $f_i(x)$ v okolí bodu x_0, který je dostatečně blízko jejího kořene x^*.
Označujme $x_{(i)}$, i tou souřadnici vektoru x. Nechť je

$$x^* = x_0 + \varepsilon_0, \tag{2.4}$$

pak

$$f_i(x_0 + \varepsilon_0) = f_i(x_0) + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_{(1)}} \epsilon_{0(1)} + \cdots + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_{(n)}} \varepsilon_{0(n)} + \cdots$$

[1] Tento náhled je pro funkci jedné proměnné znám a je zobrazen na obrázku 3.1 v poslední kapitole. Máme-li zobrazení v $\mathbb{R}^n$, pak za následující aproximaci volíme průnik tečných nadrovin funkcí $z = f_i$ a nadroviny $z = 0$.

a tedy

$$0 = f_i(x_0 + \varepsilon_0) \approx f_i(x_0) + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_{(1)}} \epsilon_{0(1)} + \cdots + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_{(n)}} \varepsilon_{0(n)},$$

v maticovém zápisu pak

$$0 \approx F(x_0) + F^{'}(x_0)\varepsilon_0,$$

kde $F^{'}(x_n)$ je Jacobiho matice standardně definovaná

$$(F^{'}(x))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Za předpokladu, že v potřebných bodech je $F^{'}(x)$ regulární, lze ε_0 odhadnout pomocí

$$\varepsilon_0 \approx -[F^{`}(x_0)]^{-1} F(x_0),$$

z (2.4) dostáváme, že $x_1 = x_0 - [F^{'}(x_0)]^{-1} F(x_0)$ je bod, který je blíž ke kořenu x^*. Opakováním postupu pak dostaneme předpis pro Newonovu metodu

$$x_{n+1} = x_n - [F^{'}(x_n)]^{-1} F(x_n). \tag{2.5}$$

Dále zobecníme tuto metodu pro operátorové rovnice a najdeme podmínky, za kterých uvedená metoda konverguje.

Newtonova metoda pro operátory

Definice 17. Nechť $F : U \to V$ je operátor mezi Banachovými prostory U, V, diferencovatelný ve Fréchetově smyslu a nechť $u_0 \in U$. Pak iterační proces

$$u_{n+1} = u_n - [F^{'}(u_n)]^{-1} F(u_n), \tag{2.6}$$

se nazývá Newtonova metoda a $\{u_n\}$ se nazývá Newtonova posloupnost.

Následující věta zaručuje lokální konvergenci Newtonovy metody v okolí řešení rovnice $F(x) = 0$. Toto je ale současně její nedostatek, protože předpoklady závisí na kořenu, který neznáme.

Věta 2.2.1 (Věta o lokální konvergenci).
Nechť u^* je kořen rovnice (2.3) a nechť $[F^{'}(u)]^{-1}$ existuje na okolí $N(u^*)$ a v u^* je spojitý lineární operátor z V do U. Předpokládejme, že $F^{'}(u)$ je lipschitzovsky spojitá v u^*, tedy

$$\|F^{'}(u) - F^{'}(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in N(u^*), \tag{2.7}$$

kde $L > 0$ konstanta. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro u_0 splňující $\|u_0 - u^*\| \leq \delta$ je Newtonova posloupnost definována a konverguje k u^*. Zároveň pro nějakou konstantu M platí

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq M\|u_n - u^*\|^2 \tag{2.8}$$

a

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{(M\delta)^2}{M}. \tag{2.9}$$

Důkaz. Definici $N(u^*)$ uvedeme později.
Označme $c_0 = \sup_{u\in N(u^*)}\|[F'(u)]^{-1}\| < \infty$. Definujme

$$T(u) := u - [F'(u)]^{-1}F(u), \quad \forall u \in N(u^*). \tag{2.10}$$

Z $F(u^*) = 0$ dostaneme, že u^* je pevným bodem $T(u)$, odtud pro $u \in N(u^*)$ máme

$$\begin{aligned} T(u) - T(u^*) &= u - [F'(u)]^{-1}F(u) - u^* \\ &= [F'(u)]^{-1}F'(u)(u - u^*) - [F'(u)]^{-1}F(u) \\ &= [F'(u)]^{-1}(F(u^*) - F(u) - F'(u)(u - u^*)). \end{aligned}$$

Podle věty 2.1.2 a z definice abstraktní funkce je předchozí rovno

$$\begin{aligned} &[F'(u)]^{-1}\Big(\int_0^1 F'(u + t(u^* - u))(u^* - u)dt - F'(u)(u - u^*)\Big) \qquad (2.11)\\ &= [F'(u)]^{-1}\int_0^1 [F'(u + t(u^* - u)) - F'(u)]\, dt(u - u^*). \end{aligned}$$

Podle nerovnosti (2.1) pro normu vektoru $\|T(u) - T(u^*)\|$ platí

$$\|T(u) - T(u^*)\| \leq \|[F'(u)]^{-1}\| \int_0^1 \|[F'(u + t(u^* - u)) - F'(u)]\|\, dt\|u - u^*\|, \tag{2.12}$$

odtud z podmínky (2.7) dostaneme, že předchozí je menší nebo rovno

$$\begin{aligned} &\|[F'(u)]^{-1}\| \int_0^1 L\|u + tu - tu^* - u\|\, dt\|u - u^*\| \\ &= \|[F'(u)]^{-1}\| \int_0^1 Lt\|u - u^*\|\, dt\|u - u^*\|, \end{aligned}$$

odtud pak vzhledem k $\|[F'(u)]^{-1}\| \leq c_0$ máme

$$\|T(u) - T(u^*)\| \leq \frac{c_0 L}{2}\|u - u^*\|^2. \tag{2.13}$$

Uvažujme kouli $B = \bar{B}(u^*, \delta < \frac{2}{c_0 L}) \subseteq N(u^*)$, pak $\forall u \in B$ je $\frac{c_0 L}{2}\|u - u^*\| < 1$, a tedy vzhledem k (2.13) je zobrazení T kontrakcí na B.
Proto na základě Banachovy věty o pevném bodě 1.3.2 má T jediný pevný bod v $\|u - u^*\| \leq \delta$ a Newtonova posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k u^* pro všechny $u_0 \in B$.
Označíme-li $M = \frac{c_0 L}{2}$, pak pro odhad chyby v kouli B z (2.13) platí (2.8), tedy

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq M\|u_n - u^*\|^2.$$

Indukcí pak

$$M\|u_{n+1} - u^*\| \leq M^2\|u_n - u^*\|^2 \leq M^2 M^2\|u_{n-1} - u^*\|^4 \leq \cdots \leq M^{2^n}\|u_0 - u^*\|^{2^n},$$

tedy

$$M\|u_n - u^*\| \leq (M\|u_0 - u^*\|)^{2n},$$

a to dokazuje nerovnost (2.9). □

Důsledek 2.
Uvažujme operátor T z předchozí věty, pak vzhledem k (2.8) podle 1.5.3, platí $Q_R(T, u^*) \geq Q_Q(T, u^*) \geq 2$.

Jak bylo uvedeno výše, nedostatky předchozí věty odstraňuje Kantorovičova věta, jejíchž předpoklady nezávisí na u^*.

Věta 2.2.2 (Kantorovič). *Předpokládejme, že operátor $F : D(F) \subset V \rightarrow U$ je diferencovatelný na otevřené konvexní množině $D(F)$ a že je zde lipschitzovsky spojitý, tzn.*

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in D(F). \tag{2.14}$$

Navíc pro nějaké $u_0 \in D(F)$ předpokládejme, že $[F'(u_0)]^{-1}$ existuje a je spojitý operátor z V do U takový, že $h = \beta L \alpha \leq \frac{1}{2}$ pro $\alpha \geq \|[F'(u_0)]^{-1}\|$ a $\beta \geq \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\|$.
Označme

$$t^* = \frac{1 - (1 - 2h)^{1/2}}{\alpha L}, \quad t^{**} = \frac{1 + (1 - 2h)^{1/2}}{\alpha L}. \tag{2.15}$$

Předpokládejme, že $S := \{u \| \|u - u_0\| \leq t^*\} \subseteq D(F)$. Pak Newtonova posloupnost $\{u_n\}$ utvořená podle (2.6) je dobře definovaná, leží v S a konverguje k řešení $u^* \in S$. Toto řešení je jediné v $D(F) \cap \{u \| \|u - u_0\| \leq t^{**}\}$. Navíc, je-li $h < \frac{1}{2}$, pak posloupnost konverguje kvadraticky.

Kompletní důkaz Kantorovičovy věty lze najít v [1]. Zde je ukázána pouze existence v kouli $\bar{B}(u_0, t^*) \subseteq D(F)$ a pro přehlednost je užito následujících tří lemat.

Lemma 2.2.3. *Nechť* $\{v_k\}$ *je posloupnost v* U *a nechť* t_k *je posloupnost reálných nezáporných čísel takových, že*

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq t_{k+1} - t_k \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

a $t_k \to t^* < \infty$.
Pak existuje $v^* \in U$ *takové, že* $v_k \to v^*$ *a*

$$\|v^* - v_k\| \leq t^* - t_k \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Posloupnost $\{t_k\}$ *se nazývá majoranta posloupnosti* $\{v_k\}$.

Důkaz. Zřejmě z (2.16) je t_k neklesající posloupnost. Platí

$$\begin{aligned} \|v_{k+p} - v_k\| &= \|v_{k+p} - v_{k+p-1} + v_{k+p-1} \cdots - v_{k+1} + v_{k+1} - v_k\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \|v_{k+i} - v_{k+i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{p} (t_{k+i} - t_{k+i-1}) = t_{k+p} - t_k. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Odtud dostáváme, že v_k je cauchyovská, tedy konverguje ke své limitě a (2.17) vyplývá z platnosti (2.18) pro libovolné p. □

Nechť pro následující dvě lemata platí předpoklady Kantorovičovy věty.

Lemma 2.2.4. *Uvažujme* $u \in Q := \{u | \|u - u_0\| \leq \frac{1}{\alpha L}\} \cap D(F)$, *pak* $[F^{'}(u)]^{-1}$ *existuje pro všechna* $u \in V$ *a platí*

$$\|[F^{'}(u)]^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha L \|u - u_0\|}. \tag{2.19}$$

Zároveň pokud u *a* $T(u) := u - [F'(u)]^{-1} F(u)$ *náleží do* Q, *pak*

$$\|T(T(u)) - T(u)\| \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha L \|u - T(u)\|^2}{1 - \alpha L \|u_0 - T(u)\|}. \tag{2.20}$$

Důkaz. Zřejmě pro $\forall u \in Q$ platí

$$\|F^{'}(u) - F^{'}(u_0)\| \leq L \|u - u_0\| < \frac{1}{\alpha}.$$

Odtud, vzhledem k větě o poruchách 2.1.3, dostaneme, že $[F^{'}(u)]^{-1}$ existuje pro $\forall u \in V$ a platí (2.19).
Dále uvažujme normu

$$\|T(T(u)) - T(u)\| = \|T(u) - [F^{'}(T(u))]^{-1} F(T(u)) - T(u)\|, \tag{2.21}$$

to vzhledem k (2.19) je menší nebo rovno než

$$\frac{\alpha}{1-\alpha L\|u_0 - T(u)\|}\|T(T(u))\|,$$

a protože $F(u) - F'(u)(T(u) - u) = 0$, dostáváme

$$\|T(T(u))-T(u)\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha L\|u_0 - T(u)\|}\|F(T(u))-F(u)-F'(u)(T(u)-u)\|. \tag{2.22}$$

Podobně jako v (2.11) a (2.12) bude platit

$$\begin{aligned}\|F(w) - F(v) - F'(w-v)\| &\leq \|\int_0^1 [F'(tw + (1-t)v) - F'(v)](w-v)dt\| \\ &\leq \|w-v\| \int_0^1 L\|(tw + (1-t)v) - v\|dt \\ &\leq \frac{L}{2}\|w-v\|^2.\end{aligned}$$

Odtud a z (2.22) dostaneme (2.20). □

Lemma 2.2.5. *Newtonova posloupnost $\{u_k\}$ je dobře definovaná a je majorizovaná posloupností*

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(\frac{\alpha L}{2})t_k^2 - t_k + \beta}{\alpha L t_k - 1} \quad k = 0, 1, \ldots \quad t_0 = 0. \tag{2.23}$$

Navíc $\{t_k\}$ monotóně konverguje k t^*, které je definované v (2.15).

Důkaz. Je vidět, že $\{t_k\}$ je Newtonova posloupnost pro polynom $(\frac{\alpha L}{2})t_k^2 - t_k + \beta$ s kořeny t^* a t^{**} a počáteční aproximací $t_0 = 0$. Pro $h < \frac{1}{2}$ jsou t^* a t^{**} různé a tedy podle Fourierových podmínek, uvedených například v [6][strana 35] konverguje $\{t_k\}$ monotóně a Q řád konvergence je větší nebo roven dvěma. Poznamenejme, že Fourierovy podmínky lze odvodit nezávisle na předchozím a že v případě $h = \frac{1}{2}$ bude $\{t_k\}$ konvergovat také, ale rychlost konvergence bude pomalejší.
Dále budeme pokračovat indukcí.

Pro $k = 1$, podobně jako v (2.21), dostáváme

$$\|u_1 - u_0\| = \|[F'(u_0)]^{-1}F(u_0)\|$$

a to je podle předpokladů menší nebo rovno β, které se z (2.23) rovná t_1. Celkově tedy $\|u_1 - u_0\| \leq t_1 - t_0 \leq t^*$ a odtud $u_1 \in S$.
Předpokládejme, že $u_1 \ldots u_k$ existuje, náleží do S a $\|u_i - u_{i-1}\| \leq t_i - t_{i-1}$

pro $i = 1, 2 \dots k$.
Zřejmě $S \subseteq Q$ a tedy podle věty 2.2.4 pro $k+1$ platí

$$\|u_{k+1} - u_k\| = \|T(T(u_{k-1})) - T(u_{k-1})\| \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha L\|u_{k-1} - T(u_{k-1})\|^2}{1 - \alpha L\|u_0 - T(u_{k-1})\|}$$
$$\leq \frac{1}{2}\frac{\alpha L(t_k - t_{k-1})^2}{1 - \alpha L t_k} = \frac{1}{2}\frac{\alpha L t_k^2 - t_k + \beta}{1 - \alpha L t_k} = t_{k+1} - t_k.$$

Vzhledem k větě 2.2.5 je $\{t_k\}$ majorantou posloupnosti $\{u_k\}$, jejíž limita je $u^* \in S$ □

Důkaz Kantorovičovy věty.

Důkaz. Lemmata 2.2.3 a 2.2.5 ukazují, že existuje $u^* \in S$ takové, že $u_k \to u^*$.
Ukážeme, že je i řešením (2.3).
Ze vztahu

$$F(u_k) = F'(u_k)u_{k+1} - F'(u_k)u_k,$$

dostáváme

$$\|F(u_k)\| = \|F'(u_k)(u_{k+1} - u_k)\| \leq [\|F'(u_0)\| + \|F'(u_0) - F'(u_k)\|]\|u_k - u_{k+1}\|$$
$$\leq [\|F'(u_0)\| + Lt^*]\|u_k - u_{k+1}\|.$$

Vzhledem k tomu, že je posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovská a operátor $F'(u_0)$ ohraničený dostáváme, že $F(u^*) = 0$.
Z rychlosti konvergence $\{t_k\}$ a z (2.17) plyne, že $\{u_n\}$ konverguje alespoň kvadraticky pro $h < \frac{1}{2}$. □

Závěrem shrňujeme, že předchozí věta tvrdí, že za předpokladů kladených na operátor $F(u)$ bude Newtonova metoda konvergovat jednoznačně v kouli $\bar{B}(u_0, t^*)$ a u^* je jediný kořen F v kouli $\bar{B}(u_0, t^{**})$.

2.3 Aplikace Newtonovy metody

Newtonova metoda nebo její modifikace nacházejí uplatnění při řešení velké škály problémů, ve kterých je zapotřebí najít kořen operátorových rovnic.
Jak je vidět na následujícím obecném postupu, v prostoru $\mathbb{R}^n$ lze průběh výpočtu jednotlivých iterací do značné míry zjednodušit.
Uvažujme Newtonovu metodu pro zobrazení F z motivační části, tedy

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}F(x_n). \tag{2.24}$$

Předpokládáme, že $[F'(x_n)]^{-1}$ existuje pro x_n. Zároveň vzhledem k tomu, že $F'(x_n)$ lze v $\mathbb{R}^n$ vyjádřit jako matici, můžeme pro každý krok převést rovnici (2.24) na systém lineárních rovnic

$$F'(x_n)\delta_{n+1} = -F(x_n), \quad \text{kde} \quad \delta_{n+1} = x_{n+1} - x_n. \tag{2.25}$$

Vektor δ_{n+1} se nazývá Newtonův krok.
Analogii tohoto postupu nyní užijeme na následujícím příkladě řešení nelineárních integrálních rovnic.

Nelineární integrální rovnice

Nechť $u \in U = C[0,1]$ a $k \in C([0,1] \times [0.1] \times \mathbb{R})$ je funkce, spojitá v poslední proměnné.
Uvažujme integrální rovnici

$$u(t) = \int_0^1 k(t,s,u(s))ds \tag{2.26}$$

a definujme operátor

$$F(u(t)) := u(t) - \int_0^1 k(t,s,u(s))ds, \tag{2.27}$$

rovnici (2.26) lze přepsat ve tvaru

$$F(u(t)) = 0.$$

Abychom mohli užít Newtonovy metody, je zapotřebí určit $F' : U \times U \to U$. Proto

$$\begin{aligned}
F'(u,v)(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[F(u+hv)(t) - F(u)(t)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[u(t) - hv(t) - u(t) - \int_0^1 [k(t,s,u(s)+hv(s)) - k(t,s,u(s))]ds] \\
&= v(t) - \lim_{h\to 0} \int_0^1 [\frac{k(t,s,u(s)+hv(s)) - k(t,s,u(s))}{hv(s)} v(s)]ds \\
&= v(t) - \int_0^1 \frac{\partial k(t,s,u(s))}{\partial u} v(s)ds.
\end{aligned}$$

Odtud, podobě jako v (2.25) dostaneme

$$F'(u_n)\delta_{n+1} = -F(u_n), \quad \delta_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

tedy

$$\delta_{n+1} - \int_0^1 \frac{\partial k(t,s,u_n(s))}{\partial u} \delta_{n+1}(s)ds = -u_n(t) + \int_0^1 k(t,s,u_n(s))ds.$$

Při každé iteraci řešíme lineární integrální rovnici, konkrétně jde o Fredholmovu integrální rovnici prvního typu.

Metoda střelby

Newtonova metoda může být užita i pro řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic. Uvažujme problém

$$y'' = f(t, y, y'), \quad \text{kde} \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{2.28}$$

a funkce $f : \langle a, b\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a spojitě diferencovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Tento systém lze řešit užitím metody střelby. K tomuto účelu uvažujme počáteční problém

$$y'' = f(t, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s, \tag{2.29}$$

kde s je parametr. Hledejme řešení, které je funkcí parametru s, tedy $y(t) = y(t, s)$. [2]
K vyřešení problému (2.28) je potřeba najít takové s^*, aby platilo $y(b, s^*) = \beta$. Tedy najít kořen rovnice

$$0 = F(s) := y(b, s) - \beta.$$

Užijeme-li Newtonovu metodu dostaneme

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n - [F'(s_n)]^{-1} F(s_n) \\ F'(s_n)\delta_{n+1} &= F(s_n), \quad \text{kde} \quad \delta_{n+1} = s_{n+1} - s_n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

V předchozí rovnici může vzniknout problém s určováním $F'(s)$, který lze vyřešit aproximací derivace pomocí diferencí. Tedy

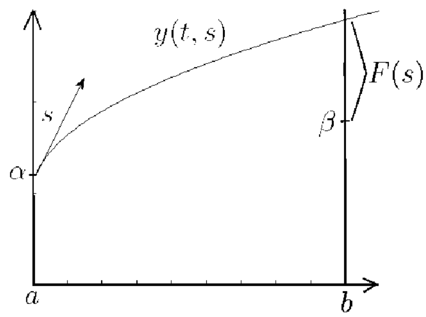
$$F'(s) \approx \frac{\Delta F(s)}{\Delta s} = \frac{F(s + \Delta s) - F(s)}{\Delta s}.$$

Případně určením $F'(s)$ užitím věty o závislosti řešení diferenciálních rovnic na parametru, podle které lze $\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}$ najít jako řešení příslušné variační úlohy.

[2] Pro některé okrajové úlohy může být obtížné nalézt předpis pro funkci $y(t, s)$. Pro užití metody střelby však stačí znát hodnoty $y(t, s)$ pro konkrétní hodnoty s, které získáme vyřešením počátečního problému (2.29).

Více lze najít v [4][strany 519 - 528].

Na obrázku 2.1 je znázorněna metoda střelby, kde funkcionál $F(s)$ vyjadřuje chybu 'zásahu' hodnoty β.



Obrázek 2.1:

Kapitola 3

Implementace Newtonovy metody

3.1 Základní algoritmus

V této kapitole se budeme zabývat způsoby implementace Newtnovy metody v prostoru R^n.
Tedy metody

$$x_{n+1} = x_n - F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n). \tag{3.1}$$

Jednotlivé iterace lze vypočítat pomocí následujícího postupu

1. Vyhodnotit $F(x_n)$ a otestovat, zda je dosaženo požadované přesnosti.
2. Vyřešit rovnici
$$F^{'}(x_n)\delta_{n+1} = -F(x_n). \tag{3.2}$$
3. Zkonstruovat následující iteraci.

Vzhledem k tomu, že výpočetně nejnáročnější je nalezení Newtonova kroku, jednotlivé přístupy se liší zejména v této části. Všechny však řeší následující problémy.

Nalezení počáteční aproximace.

Z druhé kapitoly vyplývá, že konvergenci Newtonovy metody lze lokálně zaručit, jestliže platí

1. Rovnice $F(x) = 0$ má řešení v x^*.
2. $F^{'}(x)$ je regulární matice v okolí $\|x - x^*\| < \delta$.

3. $F' : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je lipchitzovsky spojitá.

Při volbě počáteční aproximace jsme tedy omezeni na okolí $\|x - x^*\| < \delta$, které může být obtížné určit.
Na následujícím příkladě je vidět, co se stane, zvolíme li počáteční aproximaci libovolně.

Příklad. Uvažujme funkci $f(x) := x^{1/3}$ a volme počáteční aproximaci $x_0 = 10$. Pak Newtonův krok má délku

$$\delta_1 = x_1 - x_0 = 10 - \frac{10^{1/3}}{\frac{1}{3}10^{-2/3}} = -20. \tag{3.3}$$

Zřejmě se další iterace nepoměrně vzdálí od kořene, přestože směr kroku je správný.

Uvažme, že místo kroku délky s určeného v (3.3) užijeme krok stejného směru, ale potřebně kratší, aby se přiblížil ke kořenu F. Metody, které tímto způsobem upravují krok jsou tzv. line search metody, jelikož hledáme iteraci na přímce $[x_n, x_n + s]$.
Pro další účely definujme Newtonův směr d předpisem

$$d = -F'(x_n)F(x_n). \tag{3.4}$$

Konkrétní metodou je například tzv. Armijovo pravidlo, při kterém se v prvním kroku určí Newtonův směr d a poté nejmenší přirozené číslo $m = 0, 1 \ldots,$ takové, že platí

$$\|F(x_n + 2^{-m}d)\| < (1 - \alpha 2^{-m})\|F(x_n)\|. \tag{3.5}$$

Následně za Newtonův krok zvolíme vektor $s = 2^{-m}d$. Konstanta α je parametrizací podmínky (3.5) a standardně se volí 10^{-4}.

Ukončení iterace.

Na základě věty 2.2.1 o lokální konvergenci, lze odhadnout chybu iterace výrazem (2.9). Přesnost takového odhadu je závislá na volbě poloměru δ, a tedy klade nároky na přibližnou znalost hodnoty kořene.
Výhodnější způsob ukončování iterace, založený na heuristických metodách, je ukončit iteraci při splnění podmínky

$$\|F(x)\| \leq \chi_r \|F(x_0)\| + \chi_a, \tag{3.6}$$

kde χ_r je parametr relativní chyby a χ_a je parametr chyby absolutní. Uvážíme-li případ, kdy je počáteční iterace blízko kořene x^*, pak volbou $\chi_a = 0$ je téměř nemožné splnit podmínku 3.6. Proto je vhodné nevynechávat absolutní chybu.

3.2 Způsoby hledání Newtonova kroku

Newtonův krok lze určit různými způsoby, nejjednodušší pro implementaci je přímo pomocí Jacobiho matice. Tento výpočet, i přes výhody stability, je náročný na pamětové prostředky a výkon počítače, kdy při každé iteraci vyhodnocujeme Jacobiho matici, případně ji aproximujeme pomocí diferencí. Následně je nutné vyřešit systém lineárních rovnic k určení Newtonova směru. Pro složitější problémy můžeme použít méně náročné algoritmy.

Modifikovaná Newtonova metoda.

Jedním ze způsobů jak určit Newtonův krok, je určit Jacobiho matici v počáteční iteraci x_0 a užít tento výsledek i pro další iterace. Za předpokladu, že počáteční aproximace je dostatečně blízko kořenu x^*, bude Q řád této metody roven jedné.

Broydens method

Tato metoda vedle iterací posloupnosti $\{x_n\}$ vytváří i iteraci Jacobiho matic B_n.
Její tvar je

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n B_n^{-1} F(x_n),$$

kde λ_n je úpravou délky kroku pro směr

$$d_n = -B_n^{-1} F(x_n).$$

Dále se pak určí iterace Jacobiho matice

$$B_{n+1} = B_n \frac{(y - B_n s)s^T}{s^t s},$$

kde $y = F(x_{n+1}) - F(x_n)$ a $s = x_{n+1} - x_n = \lambda_n d_n$.
Jestliže existuje $\delta_B > 0$ takové, že $\|B_0 - F^{'}(x^*)\| < \delta_B$ a zároveň jsou splněny předpoklady lokální konvergence, pak je posloupnost $\{x_n\}$ dobře definovaná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|} = 0.$$

Newtonova-Krylova metoda

Tato metoda patří do skupiny tzv. neexaktních metod, které výpočet Jacobiho matice obcházejí a za Newtonův krok užijí vektor splňující podmínku

$$\|F^{'}(x_n)s + F(x_n)\| \leq \eta \|F(x_n)\|, \tag{3.7}$$

kde parametr η určuje rychlost konvergence a zároveň složitost výpočtu. Podmínka (3.7) je ověřována na základě určení přibližné hodnoty součinu

$$F^{'}(x_n)s. \tag{3.8}$$

Příkladem neexaktní metody je například Newton Krylova metoda, která řeší 3.8 na základě Krylových metod pro řešení lineárních rovnic. Více lze najít v [7][strany 27-50].

3.3 Implementace Newtonovy metody

Úkolem této části je, v programu Matlab, vytvořit zdrojový kód algoritmu, který bude užívat Newtonovu metodu pro hledání kořene funkcí n proměných.

Návrh algoritmu

NEWTON(X_0, F, χ_r, χ_a**)**
  Vyhodnotit $F(x)$ a $\chi_r\|F(x)\| + \chi_a \rightarrow \chi$
  Pokud $\|F(x_n)\| > \chi$, **pak**
    1. Urči $F^{'}(x)$.
    2. Vyřeš $F^{'}(x)d = -F(x)$ pomocí Gausovy eliminace.
    3. Najdi Newtonův krok užitím Armijova pravidla.
    4. Urči následující iteraci.
  Konec pokud.

Části výpočtu

Jacobiho matice $F^{'}(x)$ je určena pomocí diferencí. Toto řešení je vhodné i pro problémy, kde není explicitně určena funkce f.
Gausova eliminace pro nalezení Newtonova směru je řešena užitím rozkladu Jacobiho matice J na horní a dolní trojúhelníkovou matici L a U a řešením systému

$$\begin{aligned} Lx &= -F(x) \\ Ud &= x, \quad \text{kde} \quad LU = J. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Výhodou tohoto postupu je ušetření počtu operací, kdy k rozkladu je zapotřebí $\frac{N^3}{3} + O(N^3)$ operací a k vyřešení rovnic $N^2 + O(N^2)$.
Ne vždy je rozklad na trojúhelníkové matice možný, pak lze matici J rozložit na $J = PLU$, kde P je tzv. pertrubační matice.
Rozklad je v algoritmu řešen pomocí příkazu $[L, U] = lu(J)$, implementovaného v Matlabu, kdy případná pertrubační matice je obsažena v matici L.

Více o rozkladech matic lze najít v [6][strany 77-93].

Zdrojový kód funkce Newton

```
function [reseni,hist]=newton(x,f,chyba,par);
%
% Určí kořen funkce F s počáteční aproximací x.
%
% Jacobiho matice J je určována pomocí diferencí a
% systém nelineárních rovnic pro určení Newtonova
% směru je řešen rozkladem J na L,U matice.
% Při určování Newtonova kroku je užito Line search
% metody - Armijo rule.
%
%Vstupní parametry
%        řešení...aproximace kořene
%        hist.....historie iterací
%
%Výstupní parametry
%   POVINNĚ
%        x...Vektor počáteční aproximace
%        f...Funkce
%   NEPOVINĚ
%        chyba...Vektor tolerancí chyby
%          chyba(1)...absolutní chyba-implicitně=1.d-6
%          chyba(2)...relativní chyba-implicitne=1.d-6
%        par...Vektor parametrů
%          par(1)...maximální počet iterací implicitně=10
%          par(2)...parametr alfa při Armijo rule
%                     implicitně=1.d-4
%          par(3)...Maximální počet iterací Armijo rule.
%                     implicitně=10

% Inicializace %

if nargin==2
      chyba=[1.d-6,1.d-6];
      par=[10,1.d-4,10];
end;

if nargin==3
    par=[10,1.d-4,10];
end;

n=length(x);
iterace=0;
maxiter=par(1);
h=eye(n)*1.d-7;
```

```
if nargout==2
       hist=[];
end;

if size(x,1)==1
    x=x.';
end;

% Kontrola vstupních parametrů%

if maxiter <=0
        error('Chyba : Počet iterací musí být větší jak 0.')
end;

if length(chyba)~=2
        error('Chyba : Vektor chyb, musi obsahovat dve hodnoty.')
end;

if length(par)~=3
        error('Chyba : Vektor parametrů musí mít tři složky.')
end;

%Určení chyby %
fx=feval(f,x);
tol=chyba(2)*norm(fx) + chyba(1);

if nargout==2
       hist=[hist';[x]']';
end;

%Určení iterací%
while norm(fx) > tol & iterace < maxiter

        % Inicializace %
                fx=feval(f,x);
                iterace=iterace+1;

        %Výpočet Jacobiho matice pomocí diferencí%
                J=zeros(n,n);

                for i=1:n;
                    x1=x;
                    x1=x+h(:,i);
                    f1=feval(f,x1);
                    J(:,i)=(f1-fx)*h(i,i)^-1;
                end;

        %Nalezení rozkladu Jacobiho matice%
```

```
            [L,U]=lu(J);

        %Určení Newtonova směru %
            y = - L\fx;
            d = U\y;

        %Armijo rule %
            m=0;
            while norm(feval(f,x + d.*2^-m))>=norm((1-par(2)*2^-m)*fx) & m<par(3)
                m=m+1;
            end

        %Test na selhání Armijo rule %
            if m==par(3)
                error('Chyba : Počet iterací Armijo rule přesáhl daný limit.')
            end;

        %Newtonův krok %
            x=x + d*2^-m;

            if nargout==2
               hist=[hist';[x]']';
            end;
end;

%výsledky
reseni=x;
```

3.4 Numerické řešení okrajového problému

V paragrafu 2.3 byl uveden příklad užití Newtonovy metody pro řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic. V této závěrečné části je užito algoritmu newton popsaného v předchozí části k vyřešení konkrétního příkladu.

Příklad. Uvažujme okrajový problém

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 < x < 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = 15. \tag{3.10}$$

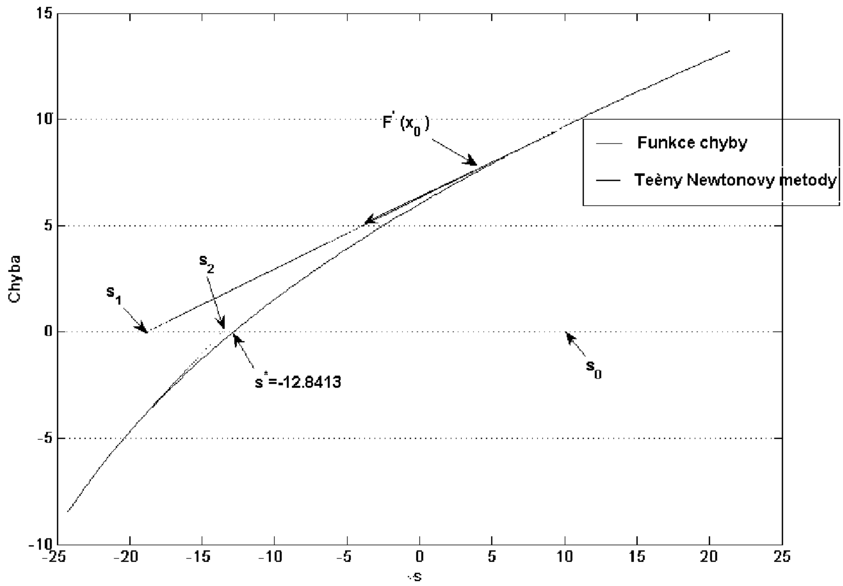
Řešme proto počáteční úlohu, kde je řešení závislé na parametru s, tedy

$$\begin{aligned} &y''(x,s) = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - y(x,s)y'(x,s)), \\ &\text{kde} \quad 1 < x < 3, \quad y(1,s) = 17, \quad y'(x,s) = s. \end{aligned} \tag{3.11}$$

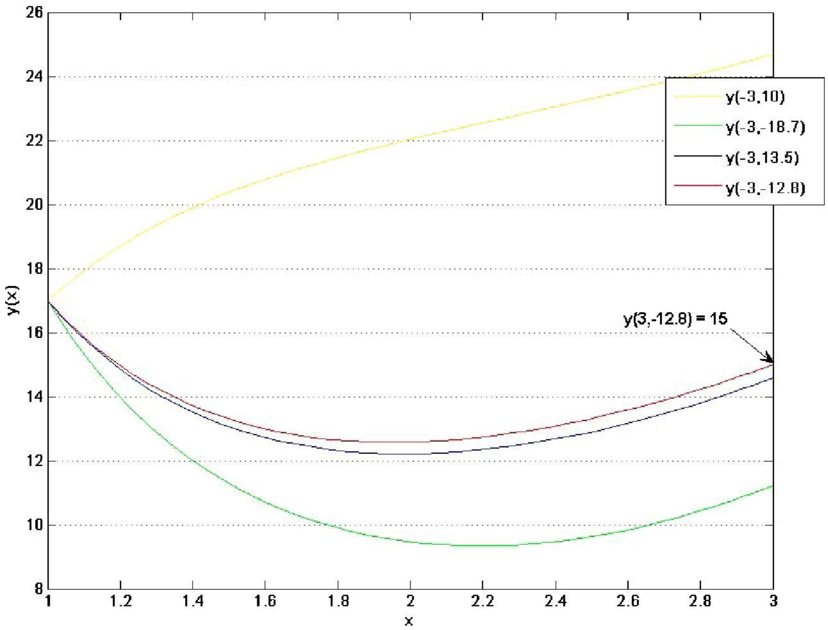
Na obrázku 3.1 je zobrazena funkce chyby $F(s) = y(3, s) - 14$ a iterace algoritmu newton, určené s počáteční aproximací $s_0 = 10$.
Posloupnost iterací a Newtonových kroků je vidět na následující tabulce.

n	s_n	δ_n
0	10.0000	$-$
1	-18.7795	-28.7795
2	-13.5726	5.2069223
3	-12.8511	0.7214852
4	-12.8413	$0.9758908e-2$
5	-12.8413	$0.1709421e-5$

Na obrázku 3.2 jsou vidět řešení rovnice (3.11), pro příslušná s. Přibližným řešením úlohy (3.10) je řešení rovnice (3.11) pro hodnotu parametru $s = -12.8413$.



Obrázek 3.1:



Obrázek 3.2:

Literatura

[1] Ioannis K. Argyros, *A Newton Kantorovich theorem for equations involving m-Fréchet differentiable operators and applications in radiative transfer,* Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 131, Issues 1-2 , 1 June 2001, Pages 149-159

[2] Kendall E. Aktinson, *An introduction to numerical analysis,* John Wiley & Sons, New York 1978

[3] Kendall E. Aktinson, Weimin Han *Theoretical numerical analysis,* Springer-Verlag, New York 2001

[4] Richard L.Burden, J.Douglas Faires *Numerial analysis (third edition).* Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1984

[5] Collatz Lothar *Funkcionální analýza a numerická matematika,* SNTL, Praha 1970

[6] Ivana Horová, *Numerické metody,* Skriptum, MU, Brno 1999

[7] C. T. Kelley, *Solving Nonlinear Equations with Newton s Method,* Siam 2003

[8] A. N. Kolmogorov, S. V. Formin, *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy,* SNTL, Praha 1975

[9] Karel Najzar, Jan Zítko *Numerické metody funkcionální analýzy I,* Skriptum,Uk, Praha 1984

[10] Karel Najzar, Jan Zítko *Numerické metody funkcionální analýzy II,* Skriptum,Uk, Praha 1984

[11] J.M.Ortega *The Newton-Kantorovich Theorem,* The American Mathematical Monthly, Vol. 75,No 6. (Jun.-Jul.,1968),pp.658-660

[12] J.M.Ortega, W. C. Rheinboldt *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* Werner Rheinboldt University of Maryland, 1970

[13] J.Stoer, R.Bulirsch *Introduction to Numerical Analysis.* Springer-Verlag, New York Heidelberg, Berlin, 1970