Věta o geometrické řadě – příklad

Věta říká, že za uvedených předpokladů, pro každé $f \in V$, má rovnice $(I-L)u = f$ jediné řešení $u = (I-L)^{-1} f$

Příklad: Integrální rovnice

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)\, u(y)\, dy = f(x), \qquad (1)$$

$\lambda \neq 0$, $k(x,y)$ spojitá pro $x, y \in [a,b]$, $f \in C[a,b]$.

Nechť $V = C[a,b]$ s normou $\|\cdot\|_\infty$.

Rovnici (1) přepíšeme

$$(\lambda I - K) u = f,$$

kde K – lineární integrální operátor, I identický operátor

Dále

$$(I - L) u = \frac{1}{\lambda} f, \qquad L = \frac{1}{\lambda} K$$

Použijeme větu o geometrické řadě:

$$\|L\| = \frac{1}{|\lambda|} \|K\| < 1. \qquad \|K\| < |\lambda|$$

neboli $\|K\| = \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,y)|\, dy < |\lambda|$

Pak $(\lambda I - K)^{-1}$ existuje a platí

$$\|\lambda I - K\| = |\lambda| \, \|I - \frac{K}{\lambda}\| \le$$

$$\le |\lambda| \frac{1}{1 - \frac{\|K\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|K\|}$$

$\Rightarrow$ za předpokladu $\|K\| < |\lambda|$ má integrální rovnice jediné řešení.