1 Přehled pojmů z funkcionální analýzy

V - lineární prostor
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ - otevřená množina v $\mathbb{R}^d$
$C(\Omega)$ - prostor funkcí spojitých na Ω
$C(\overline{\Omega})$ - prostor funkcí spojitých na uzavřené množině $\overline{\Omega}$
Obdobně pro prostory funkcí se spojitými derivacemi do řádu m včetně.
Lineární obal: $\operatorname{sp}\{v_1, \dots, v_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}$, kde $v_i \in V$ a $\mathbb{K}$ je množina skalárů (reálná nebo komplexní čísla)

Definice 1.1. Lineární prostor V se nazývá *konečně dimenzionální*, jestliže existuje konečná maximální množina nezávislých vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$, tj. množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá, ale množina $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ je lineárně závislá pro libovolný vektor $v_{n+1} \in V$. Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ se nazývá *báze* prostoru V. Jestliže taková množina neexistuje, je prostor V *nekonečně dimenzionální*.

Věta 1.1. *Pro konečně dimenzionální lineární prostory obsahuje každá báze stejný počet prvků. Toto číslo se nazývá dimenze V.*

1.1 Normované prostory

Definice 1.2. Nechť V je lineární prostor, *norma* $\|*\|$ je funkce z V do $\mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $\|v\| \geq 0$ pro $\forall v \in V$ a $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = o$,
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$ pro $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pro $\forall u, v \in V$.

Pak V je *normovaný lineární prostor*.

Definice 1.3. Nechť V je lineární prostor, *seminorma* $|*|$ je funkce z V do $\mathbb{R}$ s vlastnostmi normy, kromě toho, že $|v| = 0$ nemusí implikovat $v = o$.

Definice 1.4. Řekneme, že dvě normy $\|*\|_{(1)}$, $\|*\|_{(2)}$ jsou *ekvivalentní*, jestliže existují kladné konstanty c_1, c_2 takové, že $c_1\|u\|_{(1)} \leq \|u\|_{(2)} \leq c_2\|u\|_{(1)}$, pro $\forall u \in V$.

Poznámka. Pro ekvivalentní normy platí: posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v jedné normě právě tehdy, když konverguje v druhé normě.

Věta 1.2. *Pro každý konečně dimenzionální prostor platí, že každé dvě normy jsou ekvivalentní.*

Poznámka. V nekonečně dimenzionálních prostorech toto tvrzení neplatí.

1.2 Banachovy (úplné) prostory

Definice 1.5. Řekneme, že normovaný prostor je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost konverguje k prvku tohoto prostoru.

Příklad. Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^d$ je otevřená, omezená množina. Pro $v \in C(\overline{\Omega})$ a $1 \leq p \leq \infty$ definujme p - normu

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_d)^T, dx = (dx_1, \ldots, dx_d)$. Definujme dále ∞ - normu nebo maximální normu

$$\|v\|_\infty = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Prostor $C(\overline{\Omega})$ s $\|*\|_\infty$ je Banachův prostor, tj. stejnoměrná limita posloupnosti spojitých funkcí je rovněž spojitá funkce.

Příklad. Prostor $C(\overline{\Omega})$ s p-normou $1 \leq p < \infty$ není Banachův prostor: $C[0,1]$

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ nx - \frac{1}{2}(n-1) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nechť

$$u(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Pak $\|u_n - u\|_p \to 0, n \to \infty$, tj. posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k u v normě $\|*\|_p$. Ale zřejmě, bez ohledu na to, jak definujeme $u(1/2)$, limitní funkce u není spojitá.

Příklad. $C[-1,1]$, $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$, $(x, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \ldots)$, $u_n \in C[-1,1]$

$$u(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $u \notin C[-1,1]$.

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} [u_n(x) - u(x)]^2 \, dx = \int_{-1}^{1} \Big[x^{\frac{1}{2n-1}} - u(x) \Big]^2 \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \Big[x^{\frac{1}{2n-1}} - 1 \Big]^2 \, dx = 2 \int_0^1 \Big[x^{\frac{2}{2n-1}} - 2x^{\frac{1}{2n-1}} + 1 \Big] \, dx \\ &= 2 \Big[\frac{2n-1}{2n+1} - 2\frac{2n-1}{2n} + 1 \Big] = \frac{2}{n(2n+1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow u_n \to u$, $\|*\|_2$, ale $u \notin C[-1,1] \Rightarrow C[-1,1]$ není Banachův prostor.

1.3 Úplný obal normovaného prostoru

Věta 1.3. *Nechť V je normovaný prostor. Pak existuje úplný normovaný prostor W s těmito vlastnostmi:*

(*a*) *Existuje podprostor $\tilde{V} \subseteq W$ a lineární bijekce $I\colon V \to \tilde{V}$ taková, že*

$$\|Iv\|_W = \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

Funkce I se nazývá isometrický isomorfismus prostorů V a $\tilde{V}$.

(*b*) *Podprostor $\tilde{V}$ je hustý v W, tj. pro každé $w \in W$ existuje posloupnost $\{\hat{v}_n\} \subseteq \tilde{V}$ taková, že*

$$\|w - \hat{v}_n\|_W \to 0 \quad \textit{pro } n \to \infty.$$

Prostor W se nazývá úplný obal (zúplnění) prostoru V a je definován jednoznačně až na isometrický isomorfismus.

Poznámka. Prostory V a $\tilde{V}$ jsou obecně identické.

Příklad. Prostor $C^m[a,b]$ s normou

$$\|f\| = \left[\sum_{j=0}^{m} \left\|f^{(j)}\right\|_p^p\right]^{1/p}.$$

Prostor $C^m[a,b]$ není úplný s touto normou. Jeho úplný obal se značí $W^{m,p}(a,b)$ a je to příklad Sobolevova prostoru.

1.4 Prostory se skalárním součinem

Definice 1.6. Nechť V je lineární prostor nad $\mathbb{K}$. *Skalární součin* $(*,*)$ je forma z $V \times V$ do $\mathbb{K}$ s těmito vlastnostmi:

1. $(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V$, $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = o$,
2. $(u,v) = \overline{(v,u)} \quad \forall u, v \in V$,
3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w) \quad \forall u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Pak V je prostor se skalárním součinem.

Věta 1.4 (Schwarzova nerovnost).

$$|(u,v)| \leq \sqrt{(u,v)(u,v)}, \quad \forall u,v \in V.$$

Rovnost platí $\Leftrightarrow u, v$ *jsou lineárně závislé* $(u = tv)$.

Definujeme normu: $\|u\| = \sqrt{(u,u)}, \forall u \in V$.

Věta 1.5. *Skalární součin je spojitá funkce vzhledem k indukované normě. Jinými slovy: jestliže* $\|*\|$ *je norma definovaná* $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$*, pak* $\|u_n - u\| \to 0$ *a* $\|v_n - v\| \to 0$ *pro* $n \to \infty$ *implikuje* $(u_n, v_n) \to (u,v)$*. Zejména, jestliže* $u_n \to u$*, pak pro každé* v*:* $(u_n, v) \to (u,v)$*.*

Věta 1.6 (Polarizační identita).

$$(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

$$(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right)$$

pro reálný, resp. komplexní případ.

Důkaz. Dokážeme pro reálný případ.

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= (u+v, u+v) - (u-v, u-v) \\
&= (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) \\
&\quad - [(u,u) - (u,v) - (v,u) + (v,v)] \\
&= 4(u,v).
\end{aligned}$$

□

1.4.1 Rovnoběžníkové pravidlo

Věta 1.7. *Norma* $\|*\|$ *na* V *je indukována skalárním součinem* $\Leftrightarrow$ *splňuje rovnoběžníkové pravidlo*[1]*:*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \quad \forall u,v \in V.$$

Důkaz. Dokážeme to pouze pro reálné prostory.

$\Rightarrow$ Nechť $\|*\| = \sqrt{(*,*)}$ pro nějaký skalární součin $(*,*)$. Pak pro každé $u, v \in V$ platí:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= (u+v, u+v) + (u-v, u-v) \\
&= 2(u,u) + 2(v,v) + (u,v) + (v,u) - (u,v) - (v,u) \\
&= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)
\end{aligned}$$

[1] Rovnoběžníkové pravidlo je zobecněním Pythagorovy věty pro trojúhelníky.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že norma $\|*\|$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo. Pro $u, v \in V$ definujme

$$(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$

a ukážeme, že je to opravdu skalární součin.
$(u,u) = \frac{1}{4}\|2u\|^2 = \|u\|^2 \geq 0$ a $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = o$
$(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = (v,u)$
linearita:
$(u+v,w) = (u,w) + (v,w), \forall u,v,w \in V$
a $(\alpha u, v) = \alpha(u,v), \forall u \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(u,w)+(v,w) &= \frac{1}{4}\left(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2 + \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|u+w\|^2 + \|v+w\|^2 - (\|u-w\|^2 + \|v-w\|^2)\right)\\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\left(\|u+v+2w\|^2 + \|u-v\|^2\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\|u+v-2w\|^2 + \|u-v\|^2\right)\Big]\\
&= \frac{1}{8}\left(\|u+v+2w\|^2 - \|u+v-2w\|^2\right)
\end{aligned}$$

Zavedeme substituci $U = u+v+w$, pak

$$\begin{aligned}
\|U+w\|^2 + \|U-w\|^2 &= 2\left(\|U\|^2 + \|w\|^2\right)\\
\|U+w\|^2 &= 2\left(\|U\|^2 + \|w\|^2\right) - \|U-w\|^2\\
&= 2\left(\|u+v+w\|^2 + \|w\|^2\right) - \|u+v\|^2.
\end{aligned}$$

Podobně pro $V = u+v-w$ dostaneme

$$\|V-w\|^2 = 2\left(\|u+v-w\|^2 + \|w\|^2\right) - \|u+v\|^2.$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}
(u,w)+(v,w) &= \frac{1}{8}\Big[2\left(\|u+v+w\|^2 + \|w\|^2\right) - \|u+v\|^2\\
&\quad - 2\left(\|u+v-w\|^2 + \|w\|^2\right) + \|u+v\|^2\Big]\\
&= \frac{1}{4}\left(\|u+v+w\|^2 - \|u+v-w\|^2\right)\\
&= (u+v,w)
\end{aligned}$$

Důkaz vztahu $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ viz [Atkinson, str. 21 a dále].
Definujme funkci $f(\alpha) = \|\alpha u + v\|^2 - \|\alpha u - v\|^2$. Ukážeme, že $f(\alpha)$ je lineární funkcí α.

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) - f(\beta) &= \|\alpha u + v\|^2 - \|\alpha u - v\|^2 - \|\beta u + v\|^2 + \|\beta u - v\|^2 \\
&= \|\alpha u + v\|^2 + \|\beta u - v\|^2 - \left(\|\alpha u - v\|^2 + \|\beta u + v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|(\alpha+\beta)u\|^2 + \|(\alpha-\beta)u + 2v\|^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\|(\alpha+\beta)u\|^2 + \|(\alpha-\beta)u - 2v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|(\alpha-\beta)u + 2v\|^2 - \|(\alpha-\beta)u - 2v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2^2\left\|\frac{\alpha-\beta}{2}u + v\right\|^2 - 2^2\left\|\frac{\alpha-\beta}{2}u - v\right\|^2\right) \\
&= 2f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

1.5 Hilbertovy prostory

Definice 1.7. Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá *Hilbertův prostor.*

Příklad. Příklady Hilbertových prostorů:

- $L^2(0,1)$ $\quad \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$
- $L^2(\Omega)$ $\quad \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx$
- $w(x)$ je kladná funkce na Ω:
  $L^2_w(\Omega) = \{v$ - měřitelná; $\int_\Omega w(x)|v(x)|^2\,dx < \infty\}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(u,v)_w = \int_\Omega w(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$. Prostor $L^2(\Omega)$ s vahou (vážený prostor $L^2(\Omega)$.)
- Prostor $\mathbb{C}^d$ (uspořádaných d-tic komplexních čísel): $(x,y) = \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$.

1.6 Ortogonalita

Úhel mezi dvěma vektory:

$$\varphi = \arccos\frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

u, v jsou ortogonální: $(u, v) = 0$ Prvek $v \in V$ je ortogonální k podmnožině $U \subseteq V$, jestliže $(u, v) = 0, \forall u \in U$.

Definice 1.8. V - konečně dimenzionální prostor se skalárním součinem: *ortogonální báze* $\{v_1, \ldots, v_n\} : (v_i, v_j) = 0, i \neq j$. *Báze ortonormální*: $\|v_i\| = 1, i = 1, \ldots, n$.

Definice 1.9. V - nekonečně dimenzionální normovaný prostor, V má *spočetnou bázi*, jestliže existuje posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq V$, pro kterou platí: pro každé $v \in V$ existují skaláry $\{\alpha_{v,i}\}_{i=1}^{n}, n = 1, 2, \ldots$ takové, že

$$\|v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{v,i} v_i\| \to 0, \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Takový prostor se nazývá *separabilní*. Posloupnost $\{v_i\}_{i \geq 1}$ se nazývá *bází*, jestliže každá konečná podmnožina této posloupnosti je lineárně nezávislá. Je-li V prostor se skalárním součinem a jestliže posloupnost $\{v_i\}_{i \geq 1}$ splňuje

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \geq 1,$$

pak $\{v_i\}$ je ortonormální báze pro V.

Definice 1.10. Řekneme, že nekonečně dimenzionální prostor V má *Schauderovu bázi* $\{v_n\}_{n \geq 1}$, jestliže pro každé $v \in V$ je možné psát $v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ jako konvergující řadu ve V s jednoznačnou volbou skalárů α_n.

1.7 Prostory spojitě diferencovatelných funkcí

Definice 1.11. Nechť Ω je otevřená množina v $\mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ (α_i - nezáporná celá čísla) je multiindex délky $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$. Výraz

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

nazýváme *derivace řádu* $|\alpha|$.

Příklad.

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = D^\alpha v \qquad \alpha = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$\frac{\partial^d v}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} = D^\alpha v \qquad \alpha = (1, 1, \ldots, 1)$$

Množina všech derivací řádu m funkce v může být zapsána ve tvaru $\{D^\alpha v; |\alpha| = m\}$.

Prostor $C(\overline{\Omega})$

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|;\ x \in \Omega\} \equiv \max\{|v(x)|;\ x \in \overline{\Omega}\}.$$

Je $C(\overline{\Omega}) \subseteq C(\Omega)$ a index je vlastní. Neboť existují funkce $v \in C(\Omega)$, které nemohou být rozšířeny na spojité funkce na $\overline{\Omega}$, příkladem je funkce $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$.

Nechť $\mathbb{Z}_+$ je množina nezáporných celých čísel. Pro každé $m \in \mathbb{Z}_+$, $C^m(\Omega)$ je prostor funkcí spojitých se spojitými derivacemi až do řádu m včetně.

$$C^m(\Omega) = \{v \in C(\Omega); D^\alpha v \in C(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}); D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}), |\alpha| \leq m\}$$

$C^m(\overline{\Omega})$ je Banachův prostor s normou

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega) \equiv \{v \in C(\Omega), v \in C^m(\Omega), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) \equiv \{v \in C(\overline{\Omega}), v \in C^m(\overline{\Omega}), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}$$

Nosič funkce: nosič $v = \overline{\{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}}$. Říkáme, že v má kompaktní nosič, jestliže nosič v je vlastní podmnožina Ω, tj. nosič $v \subset \Omega$.

1.8 Hölderovy prostory

Funkce v definovaná na Ω je *lipschitzovsky spojitá*, jestliže pro nějakou konstantu c platí

$$|v(x) - v(y)| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

V tomto vztahu je $\|x - y\|$ standardní euklidovská norma. Nejmenší konstanta v této nerovnosti se nazývá Lipschitzova konstanta a značíme ji $L(v)$. Lipschitzova konstanta je charakterizována vztahem

$$L(v) = \sup\left\{\frac{|v(x) - v(y)|}{\|x - y\|};\ x, y \in \Omega, x \neq y\right\}.$$

Funkce v se nazývá *hölderovsky spojitá* s exponenetem $\beta \in [0,1]$, jestliže pro nějakou konstantu c platí

$$|v(x) - v(y)| \leq c\|x - y\|^\beta, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Hölderův prostor $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ je definován jako podprostor $C(\overline{\Omega})$. S normou

$$\|v\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} = \|v\|_{C(\overline{\Omega})} + \sup\left\{\frac{|v(x) - v(y)|}{\|x - y\|^\beta}; x \neq y\right\}$$

je prostor $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ Banachovým prostorem.
Pro $\beta = 1 \Rightarrow$ prostor lipshitzovsky spojitých funkcí.
Pro $m \in \mathbb{Z}_+$ a $\beta \in (0,1] \rightarrow$ Hölderův prostor:

$$C^{m,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{v \in C^m(\overline{\Omega}), D^\alpha v \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \text{ pro všechna } \alpha,\ |\alpha| = m\right\}$$

S normou

$$\|v\|_{C^{m,\beta}(\overline{\Omega})} = \|v\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=m} \sup\left\{\frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|}{\|x - y\|^\beta}\right\}$$

je to Banachův prostor.

1.9 L^p prostory

$L^p(\Omega)$ je lineární prostor měřitelných funkcí v:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left\{\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right\}^{1/p} < \infty$$

$L^\infty(\Omega) = \{[v]; v \text{ měřitelná na } \Omega, \|v\|_\infty < \infty\}$, kde $[v] = \{w; w \text{ měřitelná na } \Omega, v = w(a,e)\}$[2] [Atkinson, str. 14]
v měřitelná na Ω:

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| \\ &= \inf_{\text{meas}(\Omega')=0} \sup_{x\in\Omega\setminus\Omega'} \|v(x)\|\end{aligned}$$

$\text{meas}(\Omega') = 0$, tj. Ω' je měřitelná s mírou $= 0$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{meas(\Omega')=0} \sup_{x\in\Omega\setminus\Omega'} |v(x)| < \infty$$

Vlastnosti: (Ω je otevřená množina v $\mathbb{R}^d$)

[2] a,e = almost, everywhere

(a) Pro $p \in [1, \infty)$ je $L^p(\Omega)$ Banachův prostor.

(b) Pro $p \in [1, \infty)$ z každé cauchyovské posloupnosti v $L^p(\Omega)$ lze vybrat podposloupnost, která konverguje bodově a. e. na Ω.

(c) $1 \le p \le q \le \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &\le \operatorname{meas}(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall v \in L^q(\Omega) \\ \|v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \lim_{p\to\infty} \|v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall v \in L^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

(Je-li $q = \infty$ bere se $\frac{1}{q} = 0$.)

(d) Jestliže $1 \le p \le r \le q \le \infty$, vybereme $\theta \in [0, 1]$ takové, že

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Z toho plyne

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \le \|v\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|v\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}, \quad \forall v \in L^q(\Omega)$$

Vlastnost (d) se nazývá *interpolační vlastnost* L^p prostorů.

Hölderova nerovnost: $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Minkovského nerovnost:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}, \quad p \in [1, \infty],\ u, v \in L^p(\Omega).$$

Věta 1.8. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, $1 \le p \le \infty$. Pak prostor $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$, tj. pro každé $v \in L^p(\Omega)$ existuje posloupnost $\{v_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ taková, že $\|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ pro $n \to \infty$.*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega);\ \textit{nosič } v \subset \Omega\}$$

1.10 Kompaktní množiny

Definice 1.12. (a) Nechť S je podmnožina v normovaném lineárním prostoru V. Řekneme, že S má *otevřené pokrytí* systémem otevřených množin $\{U_\alpha;\ \alpha \in \Lambda, \Lambda \text{ je množina indexů}\}$, jestliže

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha.$$

Řekneme, že S je *kompaktní množina*, jestliže z každého pokrytí S lze vybrat konečné pokrytí

$$\{U_{\alpha_j}; j = 1, \dots, m\} \subseteq \{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}.$$

(b) Ekvivalentně, S je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_j\} \subseteq S$ lze vybrat konvergentní posloupnost $\{x_{j_k}\}$ konvergující k prvku $x \in S$.

(c) Jestliže S je množina, pro kterou je $\overline{S}$ kompaktní, říkáme, že S je *prekompaktní.*

Věta 1.9 (Heine-Borel). *Nechť V je konečně dimenzionální normovaný lineární prostor a S je podmnožina V. Pak S je kompaktní $\Leftrightarrow$ S je ohraničená a uzavřená.*

Věta 1.10 (Arzela-Ascolli). *Nechť $S \subseteq C(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ je uzavřená a ohraničená. Nechť funkce $f \in S$ splňuje podmínky*

- $\sup_{f\in S}\|f\|_\infty < \infty$ *(stejnoměrně ohraničená),*
- $|f(x) - f(y)| \le c_S(\varepsilon)$, *pro* $\|x - y\| \le \varepsilon, \forall f \in S$ *a* $c_S(\varepsilon) \to 0$ *pro* $\varepsilon \to 0$ *(rovnomocně spojitá).*

Pak S je prekompaktní v $C(D)$.

1.11 Lineární operátory na normovaných prostorech

V, W - množiny, operátor $T\colon V \to W$
$\mathcal{D}(T) = \{v \in V;\ T(v)$ je definováno$\}$ *definiční obor* (je to oblast/podmnožina V, kde je operátor definován),
$\mathcal{R}(T) = \{w \in W;\ w = T(v)$ pro nějaké $v \in \mathcal{D}(T)\}$ *obor hodnot.*
Nulová množina $\mathcal{N}(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$.

Příklad. Příklad lineárního operátoru.
$V = W = C[a, b]$, $\|v\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|v(x)|$
Nechť $k \in C\left([a, b] \times [a, b]\right)$. Operátor $K\colon C[a, b] \to C[a, b]$

$$\left(Kv\right)(x) = \int_a^b k(x, y)v(y)\, dy$$

K - lineární integrální operátor, $k(*, *)$ - jádro integrálního operátoru
Za uvedených předpokladů je integrální operátor spojitý z $C[a, b]$ do $C[a, b]$ a platí

$$\|K\| = \max_{a\le x\le b} \int_a^b k(x, y)\, dy$$

Definice 1.13. Operátor T je

- *injektivní*: $v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$,
- *surjektivní*: $\mathcal{R}(T) = W$,
- *bijekce* (tj. injektivní a surjektivní) z V na W, můžeme definovat inverzní operátor $T^{-1}\colon W \to V$, kde $v = T^{-1}(w) \Leftrightarrow w = T(v)$.

Příklad. Nechť V je lineární prostor, identický operátor $I\colon V \to V$ je definován

$$I(v) = v, \quad \forall v \in V.$$

Je to bijekce z V do V a navíc inverze je také identický operátor.

Příklad. Diferenciální operátor $\frac{d}{dx}$ z $V = C[0,1]$ do $W = C[0,1]$ definován takto

$$\frac{d}{dx}\colon v \to v', \quad v \in C[0,1].$$

Definiční obor operátoru $\mathcal{D}(\frac{d}{dx})$ je $C^1[0,1]$, což je vlastní podprostor $C[0,1]$. Tento operátor je zřejmě surjektivní, neboť $\mathcal{R}(\frac{d}{dx}) = C[0,1]$. Ale není injektivní, neboť $v_1 = k_1 \neq v_2 = k_2 \Rightarrow \frac{d}{dx}v_1 = \frac{d}{dx}v_2 = 0$, tedy neplatí $\frac{d}{dx}v_1 \neq \frac{d}{dx}v_2$. Nulová množina $\mathcal{N}(T)$ je množina všech konstantních funkcí.

1.11.1 Spojité lineární operátory

V, W - lineární prostory, lineární operátor $L\colon V \to W$
$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L v_1 + \alpha_2 L v_2,\ \forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

Definice 1.14. Nechť V a W jsou normované prostory. Operátor $T\colon V \to W$ je *spojitý v bodě* $v \in \mathcal{D}(T)$, jestliže

$$\{v_n\} \subseteq \mathcal{D}(T) \text{ a } v_n \to v \text{ ve } V \Rightarrow Tv_n \to Tv \text{ ve } W.$$

Operátor T je *spojitý*, jestliže je spojitý na celé oblasti $\mathcal{D}(T)$.

1.11.2 Ohraničený operátor

Ohraničenost: $\|Lu\|_W \leq \gamma \|v\|_V$, $\forall v \in V$
Operátor je *ohraničený*, jestliže pro každé $r > 0$ existuje $R > 0$ takové, že

$$v \in \mathcal{D}(T),\ \|v\| \leq r \Rightarrow \|Tv\| \leq R.$$

Věta 1.11. *Nechť V a W jsou normované prostory, $L\colon V \to W$ je lineární operátor. Pak L je spojitý (na V) právě tehdy, když je ohraničený na V.*

Označení: $\mathcal{L}(V, W)$ = množina včech spojitých lineárních operátorů z normovaného prostoru V do normovaného prostoru W. V případě, že $V = W$ píšeme $\mathcal{L}(V)$ místo $\mathcal{L}(V, V)$.

1.11.3 Norma operátoru

$$\|L\|_{V,W} = \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} \to \text{ operátorová norma}$$

Jinak

$$\begin{aligned}\|L\|_{V,W} &= \sup_{v\in B_1} \|Lv\|_W \\ &= \sup_{v\colon \|v\|_V=1} \|Lv\|_W \\ &= \frac{1}{r} \sup_{v\colon \|v\|_V=r} \|Lv\|_W\end{aligned}$$

Poznámka. V předchozím je užito linearity:

$$\frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} = \left\| L\frac{v}{\|v\|_V} \right\|_W$$

B_1 je jednotková koule ve W.

Poznámka. $\|L\|_{V,W}$ Je-li B_1 jednotková koule ve V vzhledem k normě $\|*\|_{V,W}$ maximální velikost … obrazu ve V.

Věta 1.12. *Množina $\mathcal{L}(V,W)$ je lineárním prostorem → normovaný prostor → výše uvedená norma.*

Poznámka. Je-li operátorem matice, pak jde o souhlasnost norem [viz přednáška Numerické metody I].

Platí:

$$\|Lv\|_W \leq \|L\|_{V,W}\|v\|_V, \quad \forall v\in V$$

Věta 1.13. *Nechť U,V,W jsou normované prostory, $S\colon U\to V$, $T\colon V\to W$ jsou spojité operátory. Pak složený operátor $TS\colon U\to W$, definovaný*

$$TS(v) = T\left(S(v)\right), \quad \forall v\in U,$$

je spojitý lineární operátor a platí

$$\|TS\|_{U,W} \leq \|S\|_{U,V}\|T\|_{V,W}.$$

Důsledek. Multiplikativnost:

$$\|L^n\| \leq \|L\|^n$$

1.12 Prostor $\mathcal{L}(V, W)$

Věta 1.14. *V normovaný prostor, W Banachův prostor $\Rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ je Banachův prostor.*

Definice 1.15. Operátor L se nazývá *nesingulární*, jestliže $\mathcal{N}(L) = \{0\}$. V opačném případě je L *singulární.*

Věta 1.15 (Věta o geometrické řadě). *Nechť V je Banachův prostor, $L \in \mathcal{L}(V)$, předp. $\|L\| < 1$. Pak $I - L$ je bijekce na V (I je identický operátor). Jeho inverze je ohraničený lineární operátor a platí*

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

Důkaz. Použijeme: $M = (I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n$. □

Věta 1.16 (Věta o poruchách). (*A perturbation result, Atkinson, str. 50*) *Nechť V a W jsou normované prostory, z nichž alespoň jeden je Banachův. Nechť $L \in \mathcal{L}(V, W)$ má ohraničenou inverzi $L^{-1}: W \to V$. Nechť $M \in \mathcal{L}(V, W)$ splňuje*

$$\|M - L\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|}.$$

Pak $M: V \to W$ je bijekce, $M^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ a

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\|\|L - M\|}.$$

Navíc

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|^2 \|L - M\|}{1 - \|L^{-1}\|\|L - M\|}.$$

Větu lze parafrázovat takto: Operátor, který je blízký operátoru s ohraničenou inverzí, bude mít také ohraničenou inverzi.

Tato věta je důležitá při vyšetřování rovnic, které jsou blízké rovnicím se známým řešením.

Pro řešení rovnic $Lv_1 = w$, $Mv_2 = w$ máme odhad

$$\|v_1 - v_2\| \leq \|M^{-1}\| \|(L - M)\, v_1\| \qquad (*)$$

Odhad $(*)$ může být užit jak pro à priori, tak pro à posteriori odhady chyb. Rovnice $Lv = w \to$ přesný problém. (L má inverzi $\Rightarrow$ pro dostatečně velká n, má L_n také inverzi.) Máme posloupnost přibližných problémů $L_n v_n = w$.

Předpokládáme, že $\{L_n\}$ konverguje k L. Podle předchozí věty pro dostatečně velká n má $L_n v_n = w$ jediné řešení v_n a máme odhad

$$\|v - v_n\| \leq \|L_n^{-1}\| \|(L - L_n)\, v\|.$$

Konzistence je definována takto:

$$\|(L - L_n)\, v\| \to 0$$

Stabilita je definována podmínkou:

$$\{\|L_n^{-1}\|\}_{n \text{ velké}} \text{ je stejnoměrně omezená}$$

Konzistence + stabilita $\Rightarrow$ konvergence

$$\|v - v_n\| \to 0$$

Důkaz. Důkaz věty o poruchách (o perturbaci).
Jestliže W je úplný prostor, píšeme

$$M = [I - (L - M)L^{-1}]L,$$

jestliže V je úplný prostor, píšeme

$$M = L[I - L^{-1}(L - M)].$$

Dokážeme výsledek pro W úplný.
Operátor

$$(L - M)L^{-1} \in \mathcal{L}(W)$$

splňuje

$$\|(L - M)L^{-1}\| \leq \|L - M\| \|L^{-1}\| < 1$$

Aplikujeme větu o geometrické řadě $\to$ podle této věty existuje $(I - (L - M)L^{-1})^{-1}$ a platí

$$\|(I - (L - M)L^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(L - M)L^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \|L^{-1}\| \|L - M\|}.$$

Pak existuje (L^{-1} dle předpokladu a závorka podle předchozího)

$$M^{-1} = L^{-1}(I - (L - M)L^{-1})^{-1},$$

tedy

$$\|M^{-1}\| = \|L^{-1}\| \|(I - (L - M)L^{-1})^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\| \|L - M\|}.$$

Abychom dostali další výraz, zapíšeme $L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$ a užijeme předchozího vztahu.
$v_1 = L^{-1}w$, $v_2 = M^{-1}w \Rightarrow v_1 - v_2 = (L^{-1} - M^{-1})w = M^{-1}(M - L)L^{-1}w = M^{-1}(M - L)v_1 \Rightarrow \|v_1 - v_2\| \leq \|M^{-1}\| \|(M - L)v_1\|$. $\square$

Věta 1.17 (Věta o rozšíření). *Nechť V je normovaný prostor a nechť $\hat{V}$ je jeho úplný obal. Nechť W je Banachův prostor. Předpokládejme $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Pak existuje jediný operátor $\hat{L} \in \mathcal{L}(\hat{V}, W)$ s vlastností*

$$\hat{L}v = Lv, \quad \forall v \in V,$$

a

$$\|\hat{L}\|_{\hat{V},W} = \|L\|_{V,W}.$$

Operátor $\hat{L}$ se nazývá rozšíření operátoru L.

Věta 1.18. *Nechť v a W jsou Banachovy prostory. Jestliže $L \in \mathcal{L}(V, W)$ je bijekce, pak $L^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.*

Poznámka. Problém stability: $Lv = w,\ L\hat{v} = \hat{w}$, tj. $v - \hat{v} = L^{-1}(w - \hat{w}) \Rightarrow$

$$\|v - \hat{v}\| \leq \|L^{-1}\|\|w - \hat{w}\|.$$

Relativní chyba

$$\frac{\|v - \hat{v}\|}{\|v\|} \leq \frac{\|L^{-1}\|\|w - \hat{w}\|}{\|v\|} = \|L^{-1}\|\|L\| \frac{\|w - \hat{w}\|}{\|L\|\|v\|}$$

Protože $\|w\| \leq \|L\|\|v\|$ dostaneme

$$\frac{\|v - \hat{v}\|}{\|v\|} \leq \|L^{-1}\|\|L\| \frac{\|w - \hat{w}\|}{\|w\|}$$

$\|L^{-1}\|\|L\| = \mathrm{cond}(L)$ - číslo podmíněnosti rovnice
$1 \leq \mathrm{cond}(L)$ (dobrá a špatná podmíněnost)

1.12.1 Princip stejnoměrné ohraničenosti

Věta 1.19 (Banach-Steinhaus). *Nechť V a W jsou Banachovy prostory, $L, L_n \in \mathcal{L}(V, W)$, $n = 1, 2, \ldots$. Nechť V_0 je hustý podprostor ve V. Pak k tomu, aby $L_n v \to Lv$, $\forall v \in V$, je nutné a stačí, aby*

(a) $L_n v \to Lv,\ \forall v \in V_0$,

(b) $\sup_n \|L_n\| < \infty$ (*stejnoměrná ohraničenost*).

Aplikace Banach-Steinhausovy věty. Kvadraturní formule

$$L_n v = \sum_{i=0}^{n} w_i^{(n)} v(x_i^{(n)}),$$

kde $0 \le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots x_n^{(n)} \le 1$ je dělení intervalu $[0,1]$, $w_i^{(n)}$ jsou koeficienty kvadraturní formule a L_n je lineární funkcionál na $C[0,1]$. Platí[3]

$$\|L_n\| = \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(n)}|.$$

Důkaz. Z definice operátorové normy plyne

$$\|L_n\| \le \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(n)}| \qquad \|v\|_{C[0,1]} \le \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(n)}|,$$

neboli

$$\|L_n\| \le \frac{\sum |w_i^{(n)}|}{\|v\|}.$$

Zvolme např. polynom stupně $\le n$, pro který platí

$$P(x_i^{(n)}) = \operatorname{sgn} w_i^{(n)} \, \frac{1}{\|P\|_{C[0,1]}}.$$

Pak

$$\|L_n P\| = \frac{\sum |w_i^{(n)}|}{\|P\|_{C[0,1]}} \|P\|_{C[0,1]} = \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(n)}|.$$

□

Nechť kvadraturní formule je přesná pro polynomy st. $d(n)$, tj. $L_n v = Lv$, $\forall v \in \mathcal{P}_{d(n)}$, kde $\mathcal{P}_{d(n)}$ je prostor polynomů stupně $\le d(n)$.
Předpokládejme $d(n) \to \infty$, pak podle Banachovy-Steinhausovy věty platí $L_n v \to Lv$ pro každé $v \in C[0,1]$ právě tehdy, když

$$\sup \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(n)}| < \infty.$$

Neboť množina všech polynomů je hustá v $C[0,1]$. Jestliže dodatečně předpokládáme, že $w_i^{(n)} \ge 0$, pak $L_n v \to Lv$ pro každé $v \in C[0,1]$. Jsou-li totiž váhy kladné, je $L1 = \sum w_i^{(n)} = konst.$, neboť se předpokládal stupeň přesnosti $d(n) \ge 0 \Rightarrow$ podmínka $\sup \sum |w_i^{(n)}| < \infty$ je splněna.

Zadejme na intervalu $[0,1]$ funkci $\varphi_n(x)$:

$$\varphi(x_i^{(n)}) = \operatorname{sgn} w_i^{(n)} \text{ a } |\varphi_n(x)| \le 1 \Rightarrow L_n \varphi = \sum |w_i^{(n)}|.$$

Takovou funkci můžeme zadat v bodech $x_i^{(n)}$ a pak ji dodefinovat jako lineární mezi těmito body a event. konstantou na intervalech $[0, x_0^{(n)}]$, $[x_n^{(n)}, 1] \Rightarrow \|\varphi\| = 1$.

[3] L_n funkcionál, $\|L_n\| = \max_{v \in V} \|L_n v\|$

1.13 Lineární funkcionály

Rozumíme pouze omezené lineární funkcionály l. $l\colon V \to \mathbb{K}$, protože $\mathbb{K}$ je úplný prostor, je $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ Banachův prostor $\to$ značí se V' a nazývá se *duální prostor.*

Věta 1.20 (Hahn-Banach). *Nechť V_0 je podprostor normovaného prostoru V a $l\colon V_0 \to \mathbb{K}$ je lineární omezený funkcionál. Pak existuje rozšíření $\hat{l} \in V'$ takové, že $\hat{l}(v) = l(v)$, $\forall v \in V_0$ a $\|\hat{l}\| = \|l\|$.*

Poznámka. V_0 nemusí být hustý, pak rozšíření není jediné.

Definice 1.16. Funkcionál p na reálném prostoru V se nazývá *sublineární*, jestliže

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v), \quad \forall u, v \in V$$
$$p(\alpha u) = \alpha p(u), \quad \forall \alpha \geq 0$$

Věta 1.21 (Zobecněná Hahn-Banachova věta). *Nechť V je lineární prostor $V_0 \subseteq V$ podprostor. Nechť $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublineární funkcionál a $l\colon V_0 \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál takový, že $l(v) \leq p(v)$, $\forall v \in V_0$. Pak l může být rozšířen na V tak, že $l(v) \leq p(v)$ pro $\forall v \in V$.*

Poznámka. Nechť $p(v) = c\|v\|_V$, c je kladná konstanta $\Rightarrow$ p je sublineární funkcionál na V. S touto volbou funkcionálu p dostaneme původní Hahn-Banachovu větu.

Důsledek. Nechť V je normovaný prostor. Pro každé $v_0 \in V$ existuje $l \in V'$ tak, že $\|l\| = 1$, $l(v_0) = \|v_0\|$.

Důkaz. $v_0 \in V \to$ uvažujme množinu $\{tv_0\}$, t reálné číslo, $tv_0 \subset V$ (podprostor) generovaný prvkem v_0. Definujme funkcionál l: $v = tv_0 \Rightarrow lv = t\|v_0\| \Rightarrow$ $l(v_0) = \|v_0\|$ a $\|lv\| = |t|\|v_0\| = \|v\| \Rightarrow \|l\| = 1$. □

Věta 1.22 (Rieszova věta o reprezentaci). *Nechť V je Hilbertův prostor, $l \in V'$. Pak existuje jediný prvek $u \in V$, pro který*

$$l(v) = (v, u), \forall v \in V$$

a

$$\|l\| = \|u\|.$$

1.14 Adjungované operátory

Zobecníme pojem transponované matice.
$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \to$ lineární spojitý operátor z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Pak

$$y^T Ax = (Ax, y)_{\mathbb{R}^m}, \quad x^T A^T y = (x, A^T y)_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

Protože $y^T Ax$ je reálné číslo, je $y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T y$.

Všimněme si, že transpozice je jednoznačně definována vlastností

$$(Ax, y)_{\mathbb{R}^m} = (x, A^T y)_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Zobecněním transpozice (na nekonečně dimenzionální případ) jsou adjungované operátory.

V, W Hilbertovy prostory, $L \in \mathcal{L}(V, W)$, $L^*\colon W \to V$ je takový operátor, že platí

$$(Lv, w)_W = (v, L^* w)_V, \quad \forall v \in V, \forall w \in W.$$

L^* se nazývá *adjungovaný* operátor.
L^* je lineární $\|L^*\| = \|L\|$ a omezený $(L^*)^* = L$.
V případě, že $V = W$ a $L = L^*$, pak L je *samoadjungovaný.*

Poznámka. L samoadjungovaný operátor z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ $\to$ je reprezentován symetrickou maticí.

V nazýváme *reflexivní*, jestliže platí $V = (V')'$[4]

Definice 1.17. Nechť V, W jsou normované prostory. Řekneme, že posloupnost $\{L_n\}$ lineárních operátorů z V do W je *silně konvergentní* k operátoru L, jestliže $\|L_n - L\| \to 0$, značíme $L_n \to L$. Posloupnost $\{L_n\}$ *konverguje slabě* k operátoru L, jestliže $\lim_{n\to\infty} L_n(v) = L(v)\ \forall v \in V$, značíme $L_n \rightharpoonup L$.

Věta 1.23. *Nechť V je reflexivní Banachův prostor, pak každá omezená posloupnost má slabě konvergentní podposloupnost.*

[4] V' je duální prostor k prostoru V.

2 Teorie aproximací

2.1 Teorie interpolace

Nechť V je normovaný vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$. Abstraktní problém interpolace je formulován takto: Nechť V_n je n dimenzionální podprostor V s bází $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Nechť $L_i \in V'$, $i = 1, \ldots, n$ jsou spojité lineární funkcionály na V. Je dáno n čísel $b_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$, nalezněte $u_n \in V_n$ tak, že jsou splněny interpolační podmínky

$$L_i u_n = b_i, \quad i = 1, \ldots n.$$

Otázky: Má tento ptoblém řešení? Jestliže ano, je toto řešení jediné? Co se dá říct o chybě interpolace?

Definice 2.1. Řekneme, že funkcionály L_i, $i = 1, \ldots n$, jsou *lineárně nezávislé* na V_n, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v) = 0, \, \forall v \in V_n \Rightarrow a_i = 0, \, i = 1, \ldots n.$$

Lemma 2.1. *Lineární funkcionály jsou lineárně nezávislé na V_n právě tehdy, když*

$$\det(L_i v_j) = \begin{vmatrix} L_1 v_1 & \cdots & L_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n v_1 & \cdots & L_n v_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Důkaz. $L_1, \ldots, L_n$ jsou lineárně nezávislé na $V_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i L_i(v_j) = 0, j = 1, \ldots, n \Rightarrow a_i = 0, i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \det(L_i v_j) \neq 0$. □

Věta 2.2. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Interpolační problém má jediné řešení.*
2. *Funkcionály $L_1, \ldots, L_n$ jsou lineárně nezávislé na V_n.*
3. *Jediný prvek $u_n \in V_n$, pro který platí $L_i u_n = 0, i = 1, \ldots, n$, je prvek $u_n = 0$.*
4. *Pro každý soubor hodnot $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ existuje jediný prvek $u_n \in V_n$ tak, že $L_i u_n = b_i, i = 1, \ldots, n$.*

Poznámka. V lineární algebře se to týká matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. Systém $Ax = b$ má jediné řešení $x \in \mathbb{K}^n$ pro každé $b \in \mathbb{K}^n$.

2. $\det A \neq 0$.

3. Jestliže $Ax = 0 \Rightarrow x = o$.

4. Pro každé $b \in \mathbb{K}^n$ má systém $Ax = b$ právě jedno řešení $x \in \mathbb{K}^n$.

Důkaz. Důkaz věty (2.2) se provádí zobecněním výsledků z lineární algebry pro matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. □

Nyní, pro dané $u \in V$ je jeho *interpolant* $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ z V_n definován *interpolačními podmínkami*

$$L_i u_n = L_i u, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Koeficienty $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ mohou být nalezeny řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} L_1 v_1 & \cdots & L_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n v_1 & \cdots & L_n v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 u \\ \vdots \\ L_n u \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má jediné řešení za předpokladu, že funkcionály $L_1, \ldots, L_n$ jsou lineárně nezávislé na V_n.

2.1.1 Lagrangeova polynomiální interpolace

Nechť f je spojitá funkce definovaná na uzavřeném konečném intervalu $[a, b]$. Nechť $\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ je dělení intervalu $[a, b]$. $V = C[a, b]$ je prostor spojitých funkcí, $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$. Za V_{n+1} vybereme $\mathcal{P}_n$, což je prostor polynomů stupně nejvýše n. Pak *Lagrangeův interpolant stupně* n je definován podmínkami

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n, p_n \in \mathcal{P}_n.$$

Interpolační lineární funkcionály jsou tvaru[5]

$$L_i f = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Za bázi volíme prvky $v_j(x) = x^j, j = 0, \ldots, n$; $L_i v_j = x_i^j$.

$$\det(L_j v_j)_{(n+1)\times(n+1)} = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0.$$

[5] $L_i p_n(x) = p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) L_j \Phi_i(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) \Phi_i(x_j) = f(x_i)$

Pak existuje jediný Lagrangeův interpolační polynom. Dá se zapsat ve tvaru

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x)\Phi_i(x), \quad \Phi_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \tag{1}$$

kde Φ_i jsou *Lagrangeovy bázové funkce* s vlastností $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, i,j = 0,\ldots,n$. Vztah (1) ukazuje rovněž přímo existenci řešení Lagrangeova interpolačního problému. Jednoznačnost je zřejmá. Obecně však není jednoduché najít takovou jednoduchou formuli jako je (1).

Chyba interpolace: $f \in C^{n+1}[a,b]$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$

kde $\xi = \xi(x)$.

Poznámka. $\sum \Phi_i(x) = 1 \Rightarrow$ vážený průměr dat, nebo také *barycentrické souřadnice* (funkce) polynomu p_n.

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} f(x_j) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x-x_j)} \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_j)}$$

Položme $w_j = \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_j)}$. Protože pro $f(x) \equiv 1$ platí, že $p_n(x) \equiv 1$, plyne odtud

$$1 = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{(x-x_j)} \Rightarrow \omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{w_j}{(x-x_j)}}$$

Odtud plyne, že

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j f(x_j)}{x-x_j} \Bigg/ \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j}.$$

2.1.2 Po částech polynomiální interpolace

Zaměříme se na po částech lineární interpolaci.

Nechť $f \in C[a,b]$ a nechť

$$\Delta : a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

je dělení intervalu $[a,b]$. Označme $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,\ldots,n$ a $h = \max_{1\le i\le n} h_i$. Po částech lineární interpolant $\Pi_\Delta f$ je definován dvěma požadavky.

- Pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\Pi_\Delta f_{[x_{i-1}, x_i]}$ lineární.
- Pro $i = 1, \ldots, n$ $\Pi_\Delta f(x_i) = f(x_i)$.

Lze snadno ukázat, že

$$\Pi_\Delta f(x) = \frac{x_i - x}{h_i} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} f(x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ 1 \leq i \leq n.$$

Pro $f \in C[a, b]$ platí

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_\Delta f(x)| \leq \omega(f, h),$$

$\omega(f, h)$ je *modul spojitosti* f na $[a, b]$

$$\omega(f, h) \leq \max_{\substack{|x-y| \leq h \\ a \leq x,y \leq b}} |f(x) - f(y)|$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
|f(x) - \Pi_\Delta f(x)| &= \left| f(x) - \frac{x_i - x}{h_i} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} f(x_i) \right| \\
&= \left| (f(x) - f(x_{i-1})) \frac{x_i - x}{h_i} + (f(x) - f(x_i)) \frac{x - x_i}{h_i} \right| \\
&\leq |f(x) - f(x_{i-1})| \, \frac{x_i - x}{h_i} + |f(x) - f(x_i)| \, \frac{x - x_i}{h_i} \\
&\leq \omega(f, h) \frac{(x_i - x) + (x - x_{i-1})}{h_i} = \omega(f, h).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ je $|f(x) - \Pi_\Delta f(x)| \leq \omega(f, h)$
$\Rightarrow$ $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_\Delta f(x)| \leq \omega(f, h)$. □

Předpokládejme $f \in C^2[a, b]$. Pak ze vztahu (2) pro chybu interpolace plyne (za n dosadíme 1)

$$f(x) - \Pi_\Delta f(x) = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2!} f''(\xi_i) \overset{(*)}{\leq} \frac{h^2}{8} |f''(\xi_i)|,$$

$(*)$ $\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |\omega_2(x)| = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| = \frac{1}{4}$.

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_\Delta f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(\xi_i)|.$$

Nechť nyní $f \in H^2(a,b)$. $H^2(a,b)$ je prostor[6] spojitě diferencovatelných funkcí, jejichž druhá derivace existuje a patří do $L^2(a,b)$ a

$$\|f\|^2_{H^2(a,b)} = \int_a^b \left[|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f''(x)|^2\right] dx \ (< \infty).$$

Chyba v L^2 je

$$\|f - \Pi_\Delta f\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |f(x) - \Pi_\Delta f(x)|^2 \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - \Pi_\Delta f(x)|^2 \, dx.$$

Ukážeme si tvar chyby pro interval $[0,1]$. Nechť $\hat{f} \in H^2(0,1)$ a $\hat{\Pi}\hat{f}$ je lineární interpolant tvaru

$$\hat{\Pi}\hat{f}(\xi) = (1-\xi)\hat{f}(0) + \xi\hat{f}(1), \quad 0 \le \xi \le 1.$$

Použijeme Taylorův vzorec (v okolí bodu ξ) s integrálním tvarem zbytku:

$$\begin{aligned}
(a) \qquad & \hat{f}(0) = \hat{f}(\xi) + (0-\xi)\hat{f}'(\xi) - \int_\xi^0 t\hat{f}''(t)\,dt, \\
(b) \qquad & \hat{f}(1) = \hat{f}(\xi) + (1-\xi)\hat{f}'(\xi) + \int_\xi^1 (1-t)\hat{f}''(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Dosazením do lineárního interpolantu

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}\hat{f}(\xi) &= (1-\xi)\hat{f}(0) + \xi\hat{f}(1) \\
&= (1-\xi)\hat{f}(\xi) + \xi\hat{f}(\xi) + (1-\xi)(-\xi)\hat{f}'(\xi) + \xi(1-\xi)\hat{f}'(\xi) \\
&\quad - (1-\xi)\int_\xi^0 t\hat{f}''(t)\,dt + \xi\int_\xi^1 (1-t)\hat{f}''(t)\,dt \\
&= \hat{f}(\xi) + \xi\int_\xi^1 (1-t)\hat{f}''(t)\,dt - (1-\xi)\int_\xi^0 t\hat{f}''(t)\,dt
\end{aligned}$$

dostaneme

$$\hat{\Pi}\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) = \xi\int_\xi^1 (1-t)\hat{f}''(t)\,dt - (1-\xi)\int_\xi^0 t\hat{f}''(t)\,dt.$$

[6] Je to příklad Sobolevova prostoru.

Pak můžeme chybu omezit

$$\begin{aligned}
|\hat\Pi\hat f(\xi)-\hat f(\xi)| &\le \xi\Big|\int_\xi^1 (1-t)\hat f''(t)\,dt\Big| + (1-\xi)\Big|\int_0^\xi t\hat f''(t)\,dt\Big| \\
&\le \xi\Big|\int_0^1 (1-t)\hat f''(t)\,dt\Big| + (1-\xi)\Big|\int_0^1 t\hat f''(t)\,dt\Big|
\end{aligned}$$

(užitím Hölderovy nerovnosti)

$$\begin{aligned}
&\le \xi\Big(\int_0^1 (1-t)^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |\hat f''(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\
&\quad + (1-\xi)\Big(\int_0^1 t^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |\hat f''(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_0^1 |\hat f''(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big[\xi\Big(\int_0^1 (1-t)^2\,dt\Big)^{1/2} + (1-\xi)\Big(\int_0^1 t^2\,dt\Big)^{1/2}\Big] \\
&= C\Big(\int_0^1 |\hat f''(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Tedy dostáváme

$$\int_0^1 |\hat f(\xi)-\hat\Pi\hat f(\xi)|^2\,d\xi \le c\int_0^1 |\hat f''(t)|^2\,dt.$$

Vrátíme se k původnímu integrálu přes interval $[x_{i-1},x_i]$ a zavedeme substituci

$$x = x_{i-1}+\xi h_i,\quad dx = h_i\,d\xi :$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-\Pi_\Delta f(x)|^2\,dx &= h_i\int_0^1 |f(x_{i-1}+\xi h_i)-\hat\Pi f(x_{i-1}+\xi h_i)|^2\,d\xi \\
&\le ch_i\int_0^1 \Big|\frac{d^2 f(x_{i-1}+\xi h_i)}{d\xi^2}\Big|^2\,d\xi \\
&= ch_i^5\int_0^1 |f''(x_{i-1}+\xi h_i)|^2\,d\xi
\end{aligned}$$

Výsledný tvar chyby je[7]

$$\begin{aligned}
\|f-\Pi_\Delta f\|^2_{L^2(a,b)} &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-\Pi_\Delta f(x)|^2\,dx \\
&\le ch^4\|f''\|^2_{L^2(a,b)}
\end{aligned}$$

[7] Při zpětné substituci se jedno h_i zkrátí.

2.2 Problém nejlepší aproximace

Nejlepší aproximace - jaká je nejmenší možná chyba pro aproximaci z dané třídy funkcí? Jde-li o polynomy, pak se snažíme minimalizovat největší odchylku polynomu od aproximované funkce, tj.

$$\min_{P \in \mathcal{P}_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.$$

Příklad. Mezi polynomy jsou nejlepší aproximací funkce $f(x) \equiv 0$ Čebyševovy polynomy:

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Řešení závisí na funkci f, na třídě aproximujících funkcí a na normě, v jaké je chyba měřena. Stejnoměrná aproximace - $\|*\|_\infty$.

V dalším budeme předpokládat, že V je lineární reálný nebo komplexní prostor.

Definice 2.2. Je dán prostor V a podmnožina $K \subseteq V$. Řekneme, že množina K je *konvexní*, jestliže

$$u, v \in K \Rightarrow \lambda u + (1-\lambda) v \in K, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Indukcí

$$u_i \in K,\, 1 \leq i \leq n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in K, \quad \forall \lambda_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Poznámka. Je-li definice uvedena bez předpokladu $\lambda_i \geq 0$, pak K je *afinní* množina.

Definice 2.3. Nechť K je konvexní množina v lineárním prostoru V. Funkce $f\colon K \to \mathbb{R}$ se nazývá *konvexní*, jestliže platí

$$f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v), \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Funkce se nazývá *ryze konvexní*, když platí ostrá nerovnost pro $u \neq v$ a $\lambda \in (0, 1)$.

Poznámka. Jensenova nerovnost:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i), \quad \lambda_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Definice 2.4. Nechť V je normovaný prostor. Množina $K \subseteq V$ je *uzavřená*, jestliže $\{v_n\} \subseteq K$ a $v_n \to v$ implikuje $v \in K$. Množina K se nazývá *slabě uzavřená*, jestliže $\{v_n\} \subseteq K$ a $v_n \rightharpoonup v$[8] implikuje $v \in K$.

Definice 2.5. Nechť V je normovaný prostor, $K \subseteq V$. Funkce $f\colon K \to \mathbb{R}$ je (*sekvenčně*) *zdola polospojitá* [(sequentially) lower semicontinuous - *l.s.c.*], jestliže $\{v_n\} \subseteq K$, $v_n \to v \in K$ implikuje

$$f(v) \leq \liminf_{n\to\infty} f(v_n).$$

Funkce je *slabě* (*sekvenčně*) *zdola polospojitá* nebo *slabě polospojitá* [*w.l.s.c.* - weakly lower semicontinuous], jestliže tato nerovnost platí pro každou posloupnost $\{v_n\} \subseteq K$, $v_n \rightharpoonup v \in K$.

Poznámka. Spojitost implikuje polospojitost zdola. Opak neplatí, neboť polospojitost zdola dovoluje nespojitost. Je zřejmé, že jestliže f je *w.l.s.c.*, pak je také *l.s.c.*.

Příklad. V - normovaný prostor $\Rightarrow$ norma je *w.l.s.c.* funkce.
Neboť $\{v_n\} \subseteq V$ slabě konvergentní posloupnost $v_n \rightharpoonup v \in V$. Podle důsledku zobecněné Hahn - Banachovy věty pro každé $v \in V$ existuje $l \in V'$ tak, že $l(v) = \|v\|$ a $\|l\| = 1$. $\Rightarrow l(v_n) \leq \|l\|\|v_n\| = \|v_n\|$ [Atkinson, str. 106]. Tedy

$$\|v\| = l(v) = \lim l(v_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|.$$

Pro prostor se skalárním součinem

$$\|v\|^2 = (v,v) = lim(v,v_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \|v\|\|v_n\|$$
$$\|v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|.$$

Nyní uvedeme užitečný výsledek o geometrické funkcionální analýze odvozený ze zobecněné Hahn - Banachovy věty a týkající se separace konvexních množin.

Definice 2.6. Nechť V je reálný normovaný prostor, A, B neprázdné množiny ve V. Říkáme, že A a B jsou *oddělitelné*, jestliže existuje nenulový lineární funkcionál l na V a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

$$l(u) \leq \alpha \quad \forall u \in A \quad \text{a} \quad l(v) \geq \alpha \quad \forall v \in B.$$

Jestliže platí ostré nerovnosti, jsou množiny A, B *striktně oddělitelné*.

Věta 2.3. *Nechť V je reálný normovaný prostor, A, B dvě neprázdné disjunktní podmnožiny V takové, že jedna z nich je kompaktní a druhá je uzavřená. Pak množiny A, B jsou striktně oddělitelné.*

Důkaz. Důkaz plyne ze zobecněné Hahn - Banachovy věty. □

[8] $\rightharpoonup$ značí slabou konvergenci.

2.3 Abstraktní existenční výsledky

V reálný prostor, $K \subseteq V$ podmnožina, f fukcionál $f\colon K \to \mathbb{R}$

Uvažujme problém nalezení "minimizátoru" u pro výraz

$$\inf_{v\in K} f(v) \qquad \Big[u = \arg\inf_{v\in K} f(v)\Big].$$

Klasická Weierstrassova věta říká: Reálná spojitá funkce f na uzavřeném omezeném intervalu $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ má maximum a minimum.

$$\alpha = \inf_{[a,b]} f(x),$$

tedy podle definice infima existuje posloupnost $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ tak, že $f(x_n) \to \alpha$ pro $n \to \infty$. Protože uzavřený interval $[a,b]$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n'}\} \subseteq \{x_n\}$ a nějaké $x_0 \in [a,b]$ tak, že

$$x_{n'} \to x_0 \quad \text{pro} \quad n' \to \infty.$$

O funkci f předpokládáme, že je spojitá, takže

$$\lim_{n'\to\infty} f(x_{n'}) = f(x_0) = \alpha,$$

tj. x_0 realizuje minimum funkce f na $[a,b]$.

Rozšíříme tuto myšlenku na obecný problém.

- Spojitost funkce je příliš omezující. Stačí zřejmě předpokládat, že f je zdola polospojitá
$$f(x_0) \le \liminf_{n'\to\infty} f(x_{n'}).$$
V tomto případě f může být i nespojitá.

- V nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru V nemusí omezená posloupnost obsahovat posloupnost konvergentní. Nicméně, jestliže V je reflexivní Banachův prostor, pak každá posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost. Tedy pro řešení naší minimalizační úlohy budeme předpokládat, že V je reflexivní, K je omezená a slabě uzavřená. Poslední podmínka zajišťuje, že slabá limita slabě konvergentní podposloupnosti v K leží v K. O podmínce
$$f(x_0) \le \liminf_{n'\to\infty} f(x_{n'})$$
se předpokládá, že platí pro libovolnou podposloupnost $\{x_{n'}\}$, která konverguje slabě ... (doplnit).

Uvedené úvahy můžeme formulovat v následující větu

Věta 2.4. *Nechť V je reflexivní Banachův prostor a $K \subseteq V$ je omezená a slabě uzavřená. Jestliže $f\colon K \to \mathbb{R}$ je w.l.s.c., pak minimalizační problém*

$$\inf_{v \in K} f(v)$$

má řešení.

Důkaz. Označme $\alpha = \inf_{v \in K} f(v)$. Podle definice infima existuje posloupnost $\{u_n\} \subseteq K$ s vlastností

$$f(u_n) \to \alpha \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Protože K je omezená, $\{u_n\}$ je omezená posloupnost v protoru V. Protože V je reflexivní, existuje podposloupnost $\{u_{n'}\} \subseteq \{u_n\}$, která konverguje slabě k $u \in V$. Protože K je slabě uzavřená, je $u \in K$, a protože f je w.l.s.c., máme

$$f(u) \leq \liminf_{n' \to \infty} f(u_{n'}).$$

Tedy, $f(u) = \alpha$, a u je řešením minimalizačního problému. Tento důkaz rovněž ukazuje, že α je konečné, tj. $\alpha > -\infty$. $\square$

Poznámka. Ve větě se předpokládá, že K je omezená. Často se ale vyskytuje případ, že K je neomezená. Můžeme upustit od předpokladu omezenosti K a nahradit tento předpoklad předpokladem koercivity f na K.

Definice 2.7. Nechť V je normovaný prostor, $K \subseteq V$. O reálném funkcionálu f na V říkáme, že je *koercivní na* K, jestliže

$$f(v) \to \infty \quad \text{pro} \quad \|v\| \to \infty, \quad v \in K.$$

Věta 2.5. *Nechť V je reflexivní Banachův prostor, $K \subseteq V$ je slabě uzavřená. Jestliže $f\colon K \to \mathbb{R}$ je w.l.s.c. a koercivní na K, pak daný minimalizační problém má řešení.*

Důkaz. Vybereme $v_0 \in K$ libovolné a definujeme

$$K_0 = \{v \in K; f(v) \leq f(v_0)\}.$$

Protože f je koercivní, K_0 je omezená. Protože K je slabě uzavřená a f je w.l.s.c., vidíme, že K_0 je slabě uzavřená. $[u_n, u \in K, u_n \rightharpoonup u \Rightarrow f(u) \leq \liminf f(u_n) \leq f(v_0) \Rightarrow u \in K_0]$ Daný minimalizační problém je tedy ekvivalentní problému

$$\inf_{v \in K_0} f(v),$$

který má podle předchozí věty alespoň jedno řešení. $\square$

Poznámka. Tyto výsledky jsou velmi obecné. V aplikacích není vhodné ověřovat podmínky pro slabou konvergenci. Nahradíme tyto podmínky podmínkami, které lze snadno ověřit.

Důležitý výsledek konvexní analýzy.

Věta 2.6 (Mazur). *Nechť V je normovaný prostor a nechť $\{v_n\}_{n\geq 1}$ je posloupnost konvergující slabě k $u \in V$. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}_{n\geq 1}$ konvexních kombinací prvků $\{v_n\}_{n\geq 1}$,*

$$u_n = \sum_{i=n}^{N(n)} \lambda_i^{(n)} v_i, \quad \sum_{i=n}^{N(n)} \lambda_i^{(n)} = 1, \; \lambda_i^{(n)} \geq 0, \; n \leq i \leq N(n),$$

která silně konverguje k prvku u.

Uvedeme pro informaci některé důsledky.

Důsledek. Jestliže K je konvexní a uzavřená, pak je slabě uzavřená.

Důsledek. Jestliže f je konvexní a l.s.c. (nebo spojitá), pak je w.l.s.c.

2.4 Varianty věty o existenci

Věta 2.7. *Nechť V je reflexivní Banachův prostor, $K \subseteq V$ je konvexní a uzavřená a $f\colon K \to \mathbb{R}$ je konvexní a l.s.c. Jestliže buď*
(a) K je omezená
nebo
(b) f je koercivní na K,
pak daný minimalizační problém má řešení. Jestliže navíc f je ryze konvexní, pak toto řešení je jediné.

Důkaz. První část plyne z předchozích vět, zbývá dokázat jednoznačnost při striktní konvexitě. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že existují dva minimizátory $u_1, u_2, u_1 \neq u_2$ a $f(u_1) = f(u_2)$. Protože K je konvexní, je také $\frac{u_1+u_2}{2} \in K$. Dále f je ryze konvexní, tedy

$$f\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(u_1) + f(u_2)\right) = f(u_1).$$

Což je spor s předpokladem, že u_1 je minimizátor. □

Poznámka. V jistých aplikacích prostor V není reflexivní (např. prostor $C[a,b]$). V takových případech nelze aplikovat předchozí věty. Nicméně, reflexivita V slouží pouze k tomu, aby se vybrala slabě konvergentní podposloupnost z omezené posloupnosti v K. Také si všimněme, že potřebujeme pouze úplnost podmnožiny K a ne celého prostoru V. Předchozí větu tedy můžeme modifikovat takto.

Věta 2.8. *Nechť V je normovaný prostor, $K \subseteq V$ je konvexní, uzavřená konečně dimenzionální podmnožina a $f\colon K \to \mathbb{R}$ je konvexní a l.s.c. Jestliže buď*
(a) K je omezená
nebo
(b) f je koercivní na K,
pak daný minimalizační problém má řešení. Navíc, je-li f je ryze konvexní, je toto řešení jediné.

2.5 Existence nejlepší aproximace

Předchozí výsledky budeme aplikovat na problém *nejlepší aproximace*. Nechť $u \in V$, chceme najít takové prvky z $K \subseteq V$, které jsou nejblíže prvku u mezi všemi prvky z K, tj. řešíme minimalizační problém

$$\inf_{v \in K} \|v - u\|.$$

Tento problém je ekvivalentní minimalizačnímu problému z předchozího odstavce pro f:

$$f(v) = \|u - v\|.$$

Je zřejmě f koercivní a spojitá (a tedy také l.s.c.). Navíc f je koercivní, jestliže K je neomezená. Můžeme tedy formulovat věty o existenci nejlepší aproximace.

Věta 2.9. *Nechť $K \subseteq V$ je uzavřená, konvexní podmnožina reflexivního Banachova prostoru V. Pak existuje prvek $\hat{u} \in K$ takový, že*

$$\|u - \hat{u}\| = inf_{v \in K}\|u - v\|.$$

Věta 2.10. *Nechť $K \subseteq V$ je konvexní a uzavřená konečně dimenzionální podmnožina normovaného prostoru V. Pak existuje prvek $\hat{u} \in K$ tak, že*

$$\|u - \hat{u}\| = inf_{v \in K}\|u - v\|.$$

Věta 2.11. *Nechť K je konečně dimenzionální podprostor*[9] *normovaného prostoru V. Pak existuje takový prvek $\hat{u} \in K$, že*

$$\|u - \hat{u}\| = inf_{v \in K}\|u - v\|.$$

[9] Zejména konečně dimenzionální podprostor je jak konvexní, tak uzavřený.

Poznámka. Vztah prostorů $C[a,b]$ a $L^\infty[a,b]$.

$$L^\infty(\Omega) = \{[v]; v \text{ měřitelná na } \Omega, \|v\|_\infty < \infty\},$$

kde $[v] = \{w; w \text{ měřitelná na } \mathcal{D}, v = w(a.e.)\}$ je třída ekvivalentních funkcí.

$$\|v\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf_{meas(\Omega')=0} \sup_{x\in\Omega\setminus\Omega'} |v(x)|$$

Prostor $L^\infty(\Omega)$ je rovněž Banachův prostor, ale mnohem širší než $C(\overline{\Omega})$ s normou

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \max|v(x)|.$$

$C(\overline{\Omega})$ Banachův prostor; je to vlastní podprostor $L^\infty(\Omega)$.

Příklad. Nechť $V = C[a,b]$ (nebo $L^p(a,b)$, $p \geq 1$), $K = \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n$ je prostor všech polynomů stupně $\leq n$. Podle předchozího tvrzení pro každou funkci $f \in C[a,b]$ ($L^p(a,b)$) existuje polynom $f_n \in \mathcal{P}_n$ takový, že

$$\|f - f_n\|_{L^p(a,b)} = \inf_{q_n\in\mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{L^p(a,b)}.$$

Pro $p = \infty$ se f_n nazývá *nejlepší stejnoměrnou aproximací* funkce f.

Poznámka. Větu o existenci nejlepší aproximace v konečně dimenzionálním podprostoru lze dokázat přímo takto: $f(v) = \|u - v\|$ je nezáporná, spojitá (reálná) funkce na omezené podmnožině $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$. Použije se Heine-Borelova věta: Nechť V je konečně dimenzionální normovaný lineární prostor a S je podmnožina V. Pak S je kompaktní $\Leftrightarrow$ S je ohraničená a uzavřená.

2.6 Jednoznačnost nejlepší aproximace

Podle jedné z předchozích vět[10] lze snadno dokázat tuto větu o jednoznačnosti.

Věta 2.12. *Nechť V je normovaný prostor. Předpokládejme, že funkce $f(v) \equiv \|v\|^p$ je ryze konvexní pro nějaké $p \geq 1$. Nechť K je konvexní a uzavřená podmnožina V. Pak pro každé $u \in V$ je nejlepší aproximace $\hat{u} \in K$ jediná.*

Důkaz. Důkaz je založen na faktu, že $f(v) = \|v\|^p$, $p \geq 1$ je koercivní. $\square$

Jestliže V je prostor se skalárním součinem, pak $f(v) = \|v\|^2$ je ryze konvexní $\rightarrow$ jednoznačnost nejlepší aproximace.

[10] asi někde kolem koercivnosti

Příklad. V prostoru se skalárním součinem je $\|u\|^2$ ryze konvexní. $f(u) = \|u\|^2 = (u,u)$ Chceme dokázat, že platí následující nerovnost

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\|^2 < \lambda\|u\|^2 + (1-\lambda)\|v\|^2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Tuto nerovnost upravíme následovně

$$\lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(u,v) + (1-\lambda)^2\|v\|^2 < \lambda\|u\|^2 + (1-\lambda)\|v\|^2$$
$$2\lambda(1-\lambda)(u,v) < \lambda(1-\lambda)\|u\|^2 + (1-1+\lambda)(1-\lambda)\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2(u,v) < \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

A protože pro $u \neq v$ platí

$$0 < \|u-v\|^2 = (u-v, u-v) = (u,u) - 2(u,v) + (v,v) = \|u\|^2 - 2(u,v) + \|v\|^2.$$

Odkud plyne $2(u,v) < \|u\|^2 + \|v\|^2$. Tedy $\|u\|^2$ je ryze konvexní funkce.

Ryzí konvexita normy je dostatečnou, ale nikoliv nutnou podmínkou pro jednoznačnost nejlepší aproximace. Např. $\|*\|_{L^\infty(a,b)}$ není ryze konvexní, ale dá se ukázat jednoznačnost nejlepší aproximace pro důležité třídy aproximujících funkcí. Jeden z nejznámějších výsledků je následující:

Věta 2.13 (Čebyševova věta o alternantě). *Nechť $f \in C[a,b]$, $[a,b]$ je konečný interval a nechť $n \geq 0$ je celé číslo. Pak existuje jediný polynom $\hat{p}_n \in \mathcal{P}_n$, který minimalizuje veličinu*

$$\varrho_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty.$$

Tento polynom má následující charakteristickou vlastnost. Existuje množina $n+2$ čísel

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b$$

(ne nutně jediná), pro kterou platí

$$f(x_j) - \hat{p}_n(x_j) = \tau(-1)^j \varrho_n(f), \quad j = 0, 1, \ldots, n+1,$$

$\tau = +1$ nebo -1. Body $x_0, \ldots, x_{n+1}$ se nazývají Čebyševova alternanta.

Poznámka. Čebyševovy polynomy 1. druhu mají nejmenší odchylku od nuly, jsou tedy nejlepší aproximací funkce $f(x) \equiv 0$.

2.7 Nejlepší aproximace v prostorech se skalárním součinem

Budeme přepokládat, že V je reálný prostor se skalárním součinem.

Lemma 2.14. *Nechť K je konvexní podmnožina reálného prostoru se skalárním součinem V. Pro $u \in V$ je $\hat{u} \in K$ nejlepší aproximací v K, když a jen když platí*

$$(u - \hat{u}, v - \hat{u}) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

Důkaz. Nechť $\hat{u} \in K$ je nejlepší aproximace pro u. Nechť $v \in K$ je libovolné. Pak, protože K je konvexní, je $\hat{u} + \lambda(v - \hat{u}) \in K$, $\lambda \in [0,1]$. Definujme funkci

$$\varphi(\lambda) = \|u - [\hat{u} + \lambda(v - \hat{u})]\|^2, \quad \lambda \in [0,1]$$

$$\varphi(\lambda) = \|u - \hat{u}\|^2 - 2\lambda(u - \hat{u}, v - \hat{u}) + \lambda^2\|v - \hat{u}\|^2$$

Pro $\lambda \in [0,1]$: $\quad \varphi(0) = \|u - \hat{u}\|^2 = \min_{[0,1]} \varphi(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= -2(u - \hat{u}, v - \hat{u}) + 2\lambda\|v - \hat{u}\|^2 \\ \varphi'(0) &= -2(u - \hat{u}, v - \hat{u}) \end{aligned}$$

φ je rostoucí v bodě $x = 0 \Rightarrow \varphi'(0) \geq 0 \Rightarrow -2(u - \hat{u}, v - \hat{u}) \geq 0 \Rightarrow (u - \hat{u}, v - \hat{u}) \leq 0$.
Opačně:

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u - \hat{u} - (v - \hat{u})\|^2 \\ &= \|u - \hat{u}\|^2 - 2\underbrace{(u - \hat{u}, v - \hat{u})}_{\leq 0} + \|v - \hat{u}\|^2 \\ &\geq \|u - \hat{u}\|^2 \end{aligned}$$

□

Poznámka. Geometrický význam: úhel mezi vektory $u - \hat{u}$, $v - \hat{u}$ leží v intervalu $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Důsledek. Nechť K je konvexní množina v prostoru se skalárním součinem V. Pak pro každý prvek $u \in V$ je jeho nejlepší aproximace jediná.

Důkaz. Nechť $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ jsou nejlepší aproximace. Pak z předchozího lemmatu plyne

$$(u - \hat{u}_1, v - \hat{u}_1) \leq 0.$$

Tedy pro $\hat{u}_2 = v$ platí

$$(u - \hat{u}_1, \hat{u}_2 - \hat{u}_1) \leq 0.$$

Podobně
$$(u - \hat{u}_2, \hat{u}_1 - \hat{u}_2) \leq 0.$$
Sečtením těchto nerovností dostaneme
$$\begin{aligned}(u - \hat{u}_1, \hat{u}_2 - \hat{u}_1) + (u - \hat{u}_2, \hat{u}_1 - \hat{u}_2) &\leq 0,\\ (u - \hat{u}_1, \hat{u}_2 - \hat{u}_1) - (u - \hat{u}_2, \hat{u}_2 - \hat{u}_1) &\leq 0,\\ (\hat{u}_2 - \hat{u}_1, \hat{u}_2 - \hat{u}_1) &\leq 0.\end{aligned}$$
Odkud plyne $\|\hat{u}_2 - \hat{u}_1\| \leq 0 \Rightarrow \hat{u}_2 = \hat{u}_1$. □

Z odstavce (2.3) plyne následující věta.

Věta 2.15. *Nechť $K \subseteq V$ je uzavřená, konvexní podmnožina Hilbertova prostoru V. Pak existuje jediný prvek $\hat{u} \in K$ takový, že*
$$\|u - \hat{u}\| = \inf_{v \in K} \|u - v\|.$$

Prvek $\hat{u}$ se nazývá *projekce* prvku u na K a píšeme $\hat{u} = P_K(u)$. P_K nazýváme *projekční operátor*, obecně je nelineární.

Věta 2.16. *Nechť $K \subseteq V$ je uzavřená, konvexní podmnožina Hilbertova prostoru V. Pak projekční operátor*

(a) *je monotonní, tj.*
$$(P_K(u) - P_K(v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in V,$$

(b) *a není expanzivní, tj.*
$$\|P_K(u) - P_K(v)\| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Důkaz. $P_K(u) = \hat{u}$, $(u - \hat{u}, v - \hat{u}) \leq 0$, $\hat{u} \in K$.

(a) Tedy máme
$$(u - \hat{u}, \hat{v} - \hat{u}) \leq 0 \quad \text{a} \quad (v - \hat{v}, \hat{u} - \hat{v}) \leq 0.$$
Jejich sečtením a dalšími úpravami dostaneme
$$\begin{gathered}(u - \hat{u}, \hat{v} - \hat{u}) + (v - \hat{v}, \hat{u} - \hat{v}) = (u - \hat{u}, \hat{v} - \hat{u}) - (v - \hat{v}, \hat{v} - \hat{u}) =\\ (u - \hat{u} - v + \hat{v}, \hat{v} - \hat{u}) = (u - v - (\hat{u} - \hat{v}), \hat{v} - \hat{u}) =\\ (u - v, \hat{v} - \hat{u}) - (\hat{u} - \hat{v}, \hat{v} - \hat{u}) \leq 0.\end{gathered}$$
Celkem
$$0 \leq (\hat{u} - \hat{v}, \hat{u} - \hat{v}) \leq (u - v, \hat{u} - \hat{v}) = (P_K(u) - P_K(v), u - v).$$

(b)

$$\|\hat{u}-\hat{v}\|^2 \leq (P_K(u)-P_K(v), u-v) = (\hat{u}-\hat{v}, u-v) \leq \|\hat{u}-\hat{v}\| \cdot \|u-v\|,$$

což pro $\hat{u} \neq \hat{v}$ dává

$$\|\hat{u}-\hat{v}\| = \|P_K(u)-P_K(v)\| \leq \|u-v\|.$$

□

Věta 2.17. *Nechť K je úplný podprostor reálného nebo komplexního prostoru se skalárním součinem V. Pak existuje jediný prvek $\hat{u} \in K$ takový, že*

$$\|u-\hat{u}\| = \inf_{v \in K} \|u-v\|.$$

Důsledek. Platí $(u-\hat{u}, v) = 0$, $\forall v \in K$.

Důkaz. Plyne z lemmatu 2.14. $\varphi(\lambda) = \|u-(\hat{u}+\lambda w)\|^2$, kde $w \in K$ lib., $\hat{u}+\lambda w \in K$ a λ libovolné.

$$\varphi(\lambda) = \|u-\hat{u}\|^2 - 2\lambda(u-\hat{u}, w) + \lambda^2\|w\|^2.$$

Minimum: $\varphi'(\lambda) = 0$,

$$\varphi'(\lambda) = -2(u-\hat{u}, w) + 2\lambda\|w\|^2 = 0,$$

tedy

$$\lambda = \frac{(u-\hat{u}, w)}{\|w\|^2} \quad \Rightarrow \quad (u-\hat{u}, w) = 0, \quad \forall w \in K.$$

□

Věta 2.18. *Předpokládejme, že K je úplný podprostor reálného nebo komplexního prostoru se skalárním součinem V. Pak ortogonální projekční operátor $P_K\colon V \to V$ je lineární samoadjungovaný, tj.*

$$(P_K u, v) = (u, P_K v), \quad \forall u, v \in K.$$

Navíc

$$\|v\|^2 = \|P_K v\|^2 + \|v-P_K v\|^2, \quad \forall v \in V$$

a

$$\|P_K\| = 1.$$

Tato věta má důležitý důsledek. Označme $V_n = \mathrm{sp}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, kde $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ je ortonormální báze prostoru V. $K = V_n$ je úplný podprostor. $P_n u \in V$ je minimizátor

$$\min_{v\in V_n} \|u - v\|.$$

Najdeme tento minimizátor minimalizací nezáporné funkce

$$f(b_1, \ldots, b_n) = \|u - \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i\|^2,$$

což je ekvivalentní minimalizaci na V_n. Přímo se získá identita

$$f(b_1, \ldots, b_n) = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(u, \varphi_i)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_i - (u, \varphi_i)|^2.$$

Minima se dosáhne pro $b_i = (u, \varphi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, tedy

$$P_n u = \sum_{i=1}^{n} (u, \varphi_i)\, \varphi_i.$$

$\|u - P_n u\| = \inf_{v\in V_n} \|u - v\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Máme rozvoj

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (u, \varphi_i)\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (u, \varphi_i)\, \varphi_i.$$

Příklad. Nechť $V = L^2(-1, 1)$, $V_n = P_n(-1, 1)$, dimenze prostoru V_n je $n + 1$; bázové prvky - Legendreovy polynomy (ortonormální)

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Nejlepší aproximace ve smyslu metody nejmenších čtverců:

$$P_n u(x) = \sum_{i=0}^{n} (u, L_i)_{L^2(-1,1)} L_i(x),$$

konvergence

$$\lim_{n\to\infty} \|u - P_n u\|_{L^2(-1,1)} = 0.$$

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(-1,1)} &= \lim_{n\to\infty} \|P_n u\|^2_{L^2(-1,1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |(u, L_i)_{L^2(-1,1)}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |(u, L_i)_{L^2(-1,1)}|^2, \end{aligned}$$

což je vztah známý jako Parsevalova rovnost. Dále

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (u, L_i)_{L^2(-1,1)} L_i = \sum_{i=0}^{\infty} (u, L_i)_{L^2(-1,1)} L_i$$

ve smyslu $L^2(-1,1)$ normy.

Příklad nejlepší aproximace.

Příklad. Aproximace trigonometrickými polynomy

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]. \tag{3}$$

Aproximace $f \in L^2(0, 2\pi)$, $V_n = \mathcal{T}_n$ - množina všech trigonometrických polynomů stupně $\leq n$. Nejlepší aproximace vzhledem k normě $L^2(0, 2\pi)$ je dána částečným součtem Fourierovy řady (3) s koeficienty

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx)\, dx, \quad j \geq 0,$$
$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(jx)\, dx, \quad j \geq 1.$$

2.7.1 Projekční operátory

Definice 2.8. Nechť V je lineární prostor, V_1, V_2 jsou podprostory V. Řekneme, že V je *přímý součet* V_1 a V_2 a píšeme $V = V_1 \oplus V_2$, jestliže každý prvek $v \in V$ může být jednoznačně vyjádřen ve tvaru

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Dále, je-li V prostor se skalárním součinem a $(v_1, v_2) = 0$ pro $\forall v_1 \in V_1$ a $\forall v_2 \in V_2$, pak se V nazývá *ortogonálním přímým součtem* V_1 a V_2.

Věta 2.19. *Nechť V je lineární prostor. Pak $V = V_1 \oplus V_2$ právě tehdy, když existuje lineární operátor $P\colon V \to V$, $P^2 = P$ takový, že v rozkladu $v = v_1 + v_2$ je $v_1 = Pv$, $v_2 = (I - P)v$ a $V_1 = P(V)$, $V_2 = (I - P)(V)$.*

Definice 2.9. Nechť V je Banachův prostor. Operátor $P \in \mathcal{L}(V)$, $P^2 = P$, se nazývá *projekční operátor*. Podprostor $P(V)$ se nazývá *příslušný projekční prostor*. Přímý součet

$$V = P(V) \oplus (I - P)(V)$$

se nazývá *topologický přímý součet*.
Jestliže V je Hilbertův prostor, P projekční operátor a $V = P(V) \oplus (I-P)(V)$ je ortogonální přímý součet, pak P se nazývá *ortogonální projekční operátor*.

Příklad. Lagrangeova interpolace $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$, $v \in C[a,b]$, Lagrangeův interpolant: $Pv = P_n$. P - lineární operátor, $V = C[a,b]$ - Banachův prostor, $V_1 = \mathcal{P}_n$ - prostor všech polynomů stupně $\leq n$.

$$Pv(x) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) v(x_i)$$

$\Rightarrow P$ je projekční operátor (plyne z jednoznačnosti interpolačního polynomu). Platí $P^2 = P$, neboť

$$P\Big(Pv(x)\Big) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) Pv(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) v(x_i).$$

Příklad. V_n - n dimenzionální podprostor Hilbertova prostoru V, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - ortonormální báze V_n.

$$Pv = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v)\, u_i$$

definuje ortogonální projekci z V na V_n.

3 Diferenciální počet pro nelineární operátory

3.1 Fréchetova a Gâteauxova derivace

Derivace reálné funkce. I interval na $\mathbb{R}$, x_0 vnitřní bod intervalu I.
$f\colon I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, když a jen když

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existuje} \tag{4}$$

nebo ekvivalentně, pro nějaké číslo a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + o(|h|) \quad \text{pro} \quad h \to 0, \tag{5}$$

kde $f'(x_0) = a$ označuje derivaci.
Druhá definice jasně ukazuje, že podstatou derivování je lokální linerizace. Navíc tato forma může být zobecněna na případ obecných operátorů.

$K \subset \mathbb{R}^d$, x_0 vnitřní bod K, $f\colon K \to \mathbb{R}^m$.
f je diferencovatelná v bodě x_0, jestliže existuje matice (tj. lineární operátor) $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ taková, že

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(|h|) \quad \text{pro} \quad h \to 0, h \in \mathbb{R}^d.$$

$A = \nabla f(x_0)$ - gradient/jacobián funkce f v bodě x_0

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, d.$$

Tady je obtíž pro rozšíření definice (4) derivace. Jak rozšířit význam poměrné diference $\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)/h$, když h je vektor?
$\Rightarrow$ derivace ve směru. Nelinearizujeme funkci ve všech možných směrech proměnné x blížících se x_0, ale linearizujeme podél jistého směru k x_0. Přesněji: Nechť h je pevný vektor v $\mathbb{R}^d$ a uvažujme funkci $f(x_0+th)$, $t \in \mathbb{R}$ (v okolí nuly). Řekneme, že f je diferencovatelná v bodě x_0 vzhledem k h, jestliže existuje taková matice A, že

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = Ah.$$

Nechť f je operátor mezi dvěma Banachovými prostory V a W, $f\colon K \subseteq V \to W$.
Úmluva: kdykoliv máme na mysli derivaci v bodě u_0, implicitně předpokládáme, že u_0 je vnitřní bod K:

$$B(u_0, r) = \{u \in V; \|u - u_0\| \le r\} \subseteq K.$$

Definice 3.1. Operátor f je direncovatelný ve Fréchetově smyslu v bodě u_0, když a jen když existuje $A \in \mathcal{L}(V, W)$ tak, že

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + Ah + o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Zobrazení A se nazývá *Fréchetova derivace* f v bodě u_0 a píšeme $A = f'(u_0)$. Veličina $df(u_0; h) = f'(u_0)h$ se nazývá *Fréchetův diferenciál* f v bodě u_0. Jestliže f je diferencovatelná ve Fréchetově smyslu ve všech bodech množiny $K_0 \subseteq K$, říkáme, že $f'\colon K_0 \subseteq K \to \mathcal{L}(V, W)$ je Fréchetova derivace f na K_0.

Definice 3.2. Operátor f je diferencovatelný v Gâteauxově smyslu v bodě u_0, když a jen když existuje $A \in \mathcal{L}(V, W)$ tak, že

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t} = Ah, \quad \forall h \in V, \ \|h\| = 1. \tag{6}$$

Zobrazení A se nazývá *Gâteauxova derivace* f v bodě u_0, $A = f'(u_0)$. Veličina $df(u_0; h) = f'(u_0)h$ se nazývá *Gâteauxův diferenciál* funkce f v bodě u_0. Jestliže f je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu ve všech bodech množiny $K_0 \subseteq K$, říkáme, že $f'\colon K_0 \subseteq K \to \mathcal{L}(V, W)$ je Gâteauxova derivace funkce f na K_0.

Věta 3.1. *Jestliže $f'(u_0)$ existuje jako Fréchetova derivace, pak f je spojitá v u_0.*

Zřejmě vztah (6) je ekvivalentní $f(u_0 + th) = f(u_0) + tAh + o(|t|)$. Tedy Fréchetova derivace je také Gâteauxova derivace. Opak neplatí! Což ukazuje následující příklad.

Příklad. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{je-li } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & (x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

G-derivace není spojitá v bodě $(0, 0)$ a není tedy F-diferencovatelná v bodě $(0, 0)$.

Věta 3.2. *Fréchetova derivace je také Gâteauxova derivace. Opačně, jestliže limita v (6) je stejnoměrná vzhledem k h s $\|h\| = 1$ nebo jestliže Gâteauxova derivace je spojitá v u_0, pak Gâteauxova derivace v u_0 je také Fréchetova derivace v u_0.*

Pravidla o derivování[11]: $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f, g\colon K \subseteq V \to W$,

$$(\alpha f + \beta g)'(u_0) = \alpha f'(u_0) + \beta g'(u_0).$$

[11] Více viz Atkinson str. 148

3.2 Newtonova metoda v Banachových prostorech

Nechť U a V jsou Banachovy prostory, $F\colon U \to V$ je fréchetovsky diferencovatelná. Uvažujme rovnici

$$F(u) = 0.$$

Newtonova metoda: $u_0 \in U$ je počáteční aproximace,

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1} F(u_n).$$

Výpočet: $F'(u_n)(u_{n+1} - u_n) = -F(u_n)$, $\delta_{n+1} = u_{n+1} - u_n$,

$$F'(u_n)\delta_{n+1} = -F(u_n) \qquad u_{n+1} = u_n + \delta_{n+1}.$$

Věta 3.3 (Lokální konvergence). *Nechť u^* je kořen rovnice $F(u) = 0$ tak, že $[F'(u^*)]^{-1}$ existuje a je spojité lineární zobrazení z V do U. Předpokládáme dále, že $F'(u)$ je lokálně lipschitzovsky spojitá v u^*,*

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in N(u^*),$$

kde $N(u^*)$ je okolí u^* a $L > 0$ je konstanta. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\|u_0 - u^*\| \le \delta$ je Newtonova posloupnost definována a konverguje k u^*. Dále, pro nějakou konstantu M platí

$$\|u_{n+1} - u^*\| \le M\|u_n - u^*\|^2$$

a

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{(M\delta)^{2^n}}{M}.$$

Důkaz. Definici okolí $N(u^*)$ uvedeme později. Předpokládejme, že $[F'(u)]^{-1}$ existuje na $N(u^*)$ a $c_0 = \sup_{u \in N(u^*)} \|[F'(u)]^{-1}\| < \infty$. Definujme

$$T(u) = u - [F'(u)]^{-1}F(u), \quad u \in N(u^*).$$

$T(u^*) = u^*$, protože $F(u^*) = 0$ a pro $u \in N(u^*)$ máme

$$\begin{aligned} T(u) - T(u^*) &= u - u^* - [F'(u)]^{-1}F(u) \\ &= [F'(u)]^{-1}\Big[\underbrace{F(u^*)}_{=0} - F(u) - F'(u)(u^* - u)\Big] \\ &= [F'(u)]^{-1} \int_0^1 [F'(u + t(u^* - u)) - F'(u)]\, dt\, (u^* - u) \end{aligned}$$

Za předpokladu, že F je G-diferencovatelná na konvexní množině:

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x + t(y - x))(y - x)\, dt.$$

Na F se díváme jako na funkci jedné reálné proměnné:

$$\frac{d}{dt}F(x+t(y-x)) = F'(x+t(y-x))(y-x).$$

Přechodem k normě získáme

$$\begin{aligned}\|T(u)-T(u^*)\| &\le \|[F'(u)]^{-1}\| \int_0^1 \|F'(u+t(u^*-u)) - F'(u)\|\,dt\,\|u^*-u\| \\ &\le \|[F'(u)]^{-1}\| \int_0^1 Lt\|u^*-u\|\,dt\,\|u^*-u\|.\end{aligned}$$

Odtud

$$\|T(u)-T(u^*)\| \le \frac{c_0L}{2}\|u-u^*\|^2 \tag{7}$$

Jestliže vybereme $\delta < \frac{2}{c_0L}$ s vlastností $\overline{B}(u^*,\delta) \subseteq N(u^*)$, pak $T\colon \overline{B}(u^*,\delta) \to \overline{B}(u^*,\delta)$ je kontrakce s $\alpha = \frac{c_0L\delta}{2} < 1$. Tedy podle Banachovy věty o pevném bodu má T jediný pevný bod u^* v $\overline{B}(u^*,\delta)$ a posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k u^*. Označme $M = \frac{c_0L}{2}$. Pak z (7) plyne

$$\|u_{n+1}-u^*\| \le M\|u_n-u^*\|^2.$$

Indukcí

$$M\|u_{n+1}-u^*\| \le M^2\|u_n-u^*\|^2 \le M^2M^2\|u_{n-1}-u^*\|^4 \le \cdots \le M^{2^n}\|u_{n-1}-u^*\|^{2^n}$$

dostaneme

$$M\|u_n-u^*\| \le \Big(M\|u_0-u^*\|\Big)^{2^n}.$$

□

Tato věta ukazuje, že Newtonova metoda je lokálně kvadraticky konvergentní. Hlavním nedostatkem tohoto výsledku je skutečnost, že předpoklady závisí na neznámém kořenu dané rovnice. Následující Kantorovičova věta překonává tento problém.

Věta 3.4 (Kantorovič). *Předpokládejme:*

(a) $F\colon D(F) \subseteq U \to V$ *je diferencovatelná na otevřené konvexní množině* $D(F)$ *a derivace je lipschitzovsky spojitá*

$$\|F'(u)-F'(v)\| \le L\|u-v\|, \quad \forall u,v \in D(F).$$

(b) *Pro nějaké* $u_0 \in D(F)$ $[F'(u_0)]^{-1}$ *existuje a je spojitý operátor z* V *do* U *takový, že* $h = abL < 1/2$ *pro nějaké* $a \ge \|[F'(u_0)]^{-1}\|$ *a* $b \ge \|[F'(u_0)]^{-1}F(u_0)\|$.

Označme

$$t^* = \frac{1-(1-2h)^{1/2}}{aL}, \qquad t^{**} = \frac{1+(1-2h)^{1/2}}{aL}.$$

(c) u_1 se vybere tak, že $\overline{B}(u_1, r) \subseteq D(F)$, kde $r = t^* - h$.

Pak rovnice $F(u) = 0$ má řešení $u^* \in \overline{B}(u_1, r)$ a řešení je jediné v $\overline{B}(u_0, t^{**}) \cap D(F)$; posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k u^* a platí

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{(1-(1-2h)^{1/2})^{2^n}}{2^n aL}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Kantorovičova věta dává postačující podmínku pro konvergenci Newtonovy metody. Ovšem, je velmi obtížné tyto podmínky ověřit. Nicméně z hlediska teoretického má tento výsledek velký význam.
...

3.3 Aplikace Newtonovy metody

3.3.1 Nelineární integrální rovnice

Mějme dánu integrální rovnici

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s))\, ds$$

na prostoru $U = C[0,1]$, funkce k je z prostoru $C([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R})$ a je spojitě diferencovatelná vzhledem ke třetímu argumentu. Definujme operátor $F\colon U \to U$

$$F(u)(t) = u(t) - \int_0^1 k(t, s, u(s))\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Integrální rovnice může být zapsána ve tvaru $F(u) = 0$, Newtonova metoda pro tento problém

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_n)]^{-1} F(u_n).$$

$$\begin{aligned} F'(u)(v)(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[F(u+hv)(t) - F(u)(t)\Big] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[hv(t) - \int_0^1 \Big(k(t,s,u(s)+hv(s)) - k(t,s,u(s))\Big)\, ds\Big] \\ &= v(t) - \int_0^1 \frac{\partial k(t,s,u(s))}{\partial u} v(s)\, ds. \end{aligned}$$

Newtonova formule: $F'(u_n)\delta_{n+1} = -F(u_n)$, $\delta_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, tj.

$$\delta_{n+1}(t) - \int_0^1 \frac{\partial k(t,s,u_n(s))}{\partial u_n}\,\delta_{n+1}(s)\,ds = \underbrace{-u_n(t) + \int_0^1 k(t,s,u_n(s))\,ds}_{-F(u_n)},$$

$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \delta_{n+1}(t)$.
V každém kroku ověřujeme lineární integrální rovnici.

3.3.2 Nelineární diferenciální rovnice

$$u''(t) = f(t,u(t)), t \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

$f\colon [0,1] \times \mathbb{R}$, f je spojitá a spojitě diferencovatelná vzhledem k u (?),

$$U = C_0^2[0,1] = \{v \in C^2[0,1]; v(0) = v(1) = 0\},$$

$\|*\| = C_{C^2[0,1]}$

$$F(u)(t) = u''(t) - f(t,u(t)),\ t \in [0,1]$$
$$F'(u)(y)(t) = y''(t) - \frac{\partial f(t,u(t))}{\partial u} y(t)$$

Na každém kroku řešíme linearizovaný problém.[12]

$$u''_{n+1}(t) - \frac{\partial f(t,u_n(t))}{\partial u} u_{n+1}(t) = f(t,u(t)) + \frac{\partial f(t,u_n(t))}{\partial u} u_n(t)$$
$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(1) = 0$$

[12] Upravíme rovnici: $F'(u_n)(u_{n+1}(t) - u_n(t)) = F(u_n)(t)$.

4 Metoda sdružených gradientů

Řešíme operátorovou rovnici

$$Au = f. \tag{8}$$

A je ohraničený, pozitivně definitní samoadjungovaný a invertibilní lineární operátor v Hilbertově prostoru V. Za těchto předpokladů má rovnice (8) jediné řešení

$$u^* = A^{-1}f.$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že V je reálný separabilní Hilbertův prostor se spočetnou (ortogonální) bází. Metoda sdružených gradientů je definována takto.

Nechť u_0 je počáteční aproximace u^*. Definujme $r_0 = f - Au_0$ a $s_0 = r_0$. Pro $k \geq 0$ definujme

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \alpha_k s_k & \alpha_k &= \frac{\|r_k\|^2}{(As_k, s_k)} \\ r_{k+1} &= f - Au_{k+1} & & \\ s_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_k s_k & \beta_k &= \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2} \end{aligned}$$

Úmluva: Označme $(u, v)_A = (Au, v)$ a $\|v\|_A = \sqrt{(v, v)_A}$.

Věta 4.1. *Nechť A je ohraničený, samoadjungovaný lineární operátor splňující*

$$\sqrt{m}\|v\| \leq \|v\|_A \leq \sqrt{M}\|v\|, \quad \forall v \in V$$

s $m, M > 0$.[13] *Pak posloupnost $\{u_k\}$ konverguje k u^* a platí*

$$\|u^* - u_{k+1}\|_A \leq \frac{M - m}{M + m}\|u^* - u_k\|_A, \quad k \leq 0,$$

což znamená, že $u_k \to u^*$ lineárně.

[13] Což znamená, že $\|*\|_A$ a $\|*\|$ jsou ekvivalentní normy.