

# M6201 Nelineární dynamika a její aplikace

**Lenka Přibylová**  
**pribylova@math.muni.cz**

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

6. února 2021

Věčná je jenom změna.

Hérakleitos asi 540 př. n. l. – 480 př. n. l.

Věčná je jenom změna.

Hérakleitos asi 540 př. n. l. – 480 př. n. l.

Všechno se mění, jen změna trvá.

Israel Zangwill, britský spisovatel 1864 - 1926

Věčná je jenom změna.

Hérakleitos asi 540 př. n. l. – 480 př. n. l.

Všechno se mění, jen změna trvá.

Israel Zangwill, britský spisovatel 1864 - 1926

Přirozeností všech jevů je měnit se v každém okamžiku, naznačuje nám to, že všechny jevy postrádají schopnost trvat, postrádají schopnost být stále stejné.

současný 14. dalajláma

# Dynamické systémy



## Co se naučíme:

- popsat dynamický systém matematickou formou

## Co se naučíme:

- popsat dynamický systém matematickou formou
- rozlišit různé typy dynamických systémů

## Co se naučíme:

- popsat dynamický systém matematickou formou
- rozlišit různé typy dynamických systémů
- porozumět novým pojmům - trajektorie, atraktor, stabilita



## Definice

**Dynamickým systémem** rozumíme trojici  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ , kde  $T$  je číselná množina (čas),  $\mathbf{X}$  je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a  $\varphi^t$  je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem  $t \in T$  definovaných jako zobrazení  $\varphi^t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , které zobrazuje počáteční stav  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  na nějaký stav  $\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ .

## Definice

**Dynamickým systémem** rozumíme trojici  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ , kde  $T$  je číselná množina (čas),  $\mathbf{X}$  je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a  $\varphi^t$  je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem  $t \in T$  definovaných jako zobrazení  $\varphi^t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , které zobrazuje počáteční stav  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  na nějaký stav  $\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ .

V případě, že  $T = \mathbb{Z}$  mluvíme o **diskrétním** dynamickém systému, je-li  $T = \mathbb{R}$  mluvíme o **spojitém** dynamickém systému.

## Definice

**Dynamickým systémem** rozumíme trojici  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ , kde  $T$  je číselná množina (čas),  $\mathbf{X}$  je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a  $\varphi^t$  je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem  $t \in T$  definovaných jako zobrazení  $\varphi^t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , které zobrazuje počáteční stav  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  na nějaký stav  $\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ .

V případě, že  $T = \mathbb{Z}$  mluvíme o **diskrétním** dynamickém systému, je-li  $T = \mathbb{R}$  mluvíme o **spojitém** dynamickém systému.

## Poznámka

*Fakticky může jít o cokoliv měřitelného, co se mění v čase... Teplota hrnku kafe, kurz koruny, počet studentů v daném semestru...*

## Definice

**Deterministickým dynamickým systémem** rozumíme systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde  $\text{id}$  je identita na  $\mathbf{X}$ , tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \text{id}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav.

## Definice

**Deterministickým dynamickým systémem** rozumíme systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde  $\text{id}$  je identita na  $\mathbf{X}$ , tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \text{id}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav.

Touto podmínkou vylučujeme náhodné jevy, např. kurz koruny nebo počet studentů v daném semestru... i když prakticky vše je důsledkem toho, co již bylo... anebo tomu tak není? Z hlediska kvantové mechaniky je zase vše náhodné. Takže jde vlastně o náš přístup k věci.

## Definice

**Autonomním dynamickým systémem** rozumíme deterministický systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi^{t+s} \mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s \mathbf{x})$ , pokud jsou definovány obě strany rovnice. Tato vlastnost říká, že se „zákony evoluce“ nemění během času.

## Definice

**Autonomním dynamickým systémem** rozumíme deterministický systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj.  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi^{t+s} \mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s \mathbf{x})$ , pokud jsou definovány obě strany rovnice. Tato vlastnost říká, že se „zákony evoluce“ nemění během času.

Autonomní systémy jsou dány předchozími v čase měnícími se stavy, nikoliv samotným časem.

Typickým spojitým příkladem autonomního systému je v čase měnící se stav  $x(t)$  podle obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+ \text{ (příp. } \mathbb{R}\text{)}.$$



Typickým spojitým příkladem autonomního systému je v čase měnící se stav  $x(t)$  podle obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+ \text{ (příp. } \mathbb{R}\text{)}.$$

Typickým diskrétním příkladem je v čase skokově měnící se stav

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ (příp. } \mathbb{Z}\text{)}.$$

Typickým spojitým příkladem autonomního systému je v čase měnící se stav  $x(t)$  podle obyčejné diferenciální rovnice

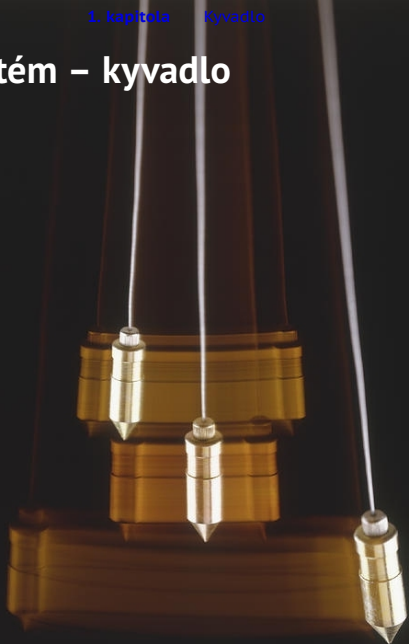
$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+ \text{ (příp. } \mathbb{R}\text{)}.$$

Typickým diskretním příkladem je v čase skokově měnící se stav

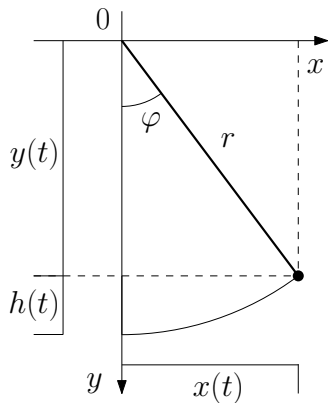
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ (příp. } \mathbb{Z}\text{)}.$$

Jde o dynamické systémy, kde závislost na čase není explicitní, pouze skrze měnící se stavové proměnné.

# Dynamický systém – kyvadlo



## Model kyvadla:



$$x(t) = r \sin \varphi(t)$$

$$y(t) = r \cos \varphi(t)$$

$$h(t) = r - y(t)$$

$\varphi = \varphi(t)$  je úhlové vychýlení závěsu kyvadla od vertikální osy. Platí zákon zachování energie – součet kinetické a potenciální energie je konstantní:

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgh(t) = \text{konst.}$$

$$\frac{1}{2}m(\mathbf{v}(t))^2 + mgh(t) = \text{konst.}$$

Velikost rychlosti  $\mathbf{v}(t)$  kyvadla lze spočítat podle Pythagorovy věty, protože změnu polohy v navzájem kolmých směrech  $x$  i  $y$  známe:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$(\mathbf{v}(t))^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgh(t) = \text{konst.}$$

Velikost rychlosti  $v(t)$  kyvadla lze spočítat podle Pythagorovy věty, protože změnu polohy v navzájem kolmých směrech  $x$  i  $y$  známe:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = -r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ (v(t))^2 &= (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = r^2 \dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

Stejně tak víme, že  $h(t) = r(1 - \cos \varphi)$ ,

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgh(t) = \text{konst.}$$

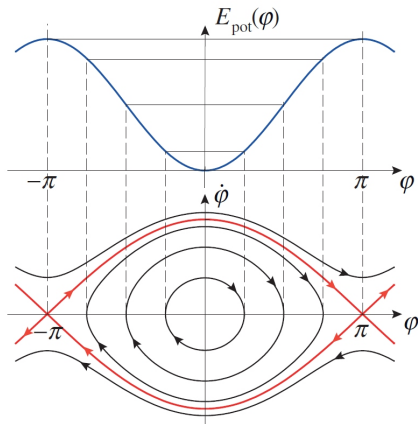
Velikost rychlosti  $v(t)$  kyvadla lze spočítat podle Pythagorovy věty, protože změnu polohy v navzájem kolmých směrech  $x$  i  $y$  známe:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = -r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ (v(t))^2 &= (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = r^2 \dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

Stejně tak víme, že  $h(t) = r(1 - \cos \varphi)$ , tedy platí

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr(1 - \cos \varphi) = \text{konst.}$$

$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = \frac{\text{konst.}}{mr} = K$$



**Obrázek:** Fázový portrét kyvadla bez tření, tlumené kyvadlo pro různé hodnoty tření najdete [v tomto videu](#)



$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = K$$

$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = K$$

Zderivováním dostáváme

$$r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$$

$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = K$$

Zderivováním dostáváme

$$r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$$

tedy

$$\dot{\varphi}(r\ddot{\varphi} + g \sin \varphi) = 0.$$

$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = K$$

Zderivováním dostáváme

$$r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$$

tedy

$$\dot{\varphi}(r\ddot{\varphi} + g \sin \varphi) = 0.$$

Pokud se tedy kyvadlo hýbe, pak výchylka  $\varphi$  splňuje diferenciální rovnici

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 + g(1 - \cos \varphi) = K$$

Zderivováním dostáváme

$$r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$$

tedy

$$\dot{\varphi}(r\ddot{\varphi} + g \sin \varphi) = 0.$$

Pokud se tedy kyvadlo hýbe, pak výchylka  $\varphi$  splňuje diferenciální rovnici

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi$$

nebo systém rovnic pro stavové proměnné  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ , kde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{r} \sin x_1. \end{aligned}$$

- popsali jsme **autonomní systém** diferenciální rovnicí 2. řádu odpovídající systému 2 diferenciálních rovnic 1. řádu  $(\varphi, \dot{\varphi})$

- popsali jsme **autonomní systém** diferenciální rovnicí 2. řádu odpovídající systému 2 diferenciálních rovnic 1. řádu  $(\varphi, \dot{\varphi})$
- tato rovnice odpovídá implicitní rovnici 1. řádu s volitelnou konstantou

- popsali jsme **autonomní systém** diferenciální rovnicí 2. řádu odpovídající systému 2 diferenciálních rovnic 1. řádu  $(\varphi, \dot{\varphi})$
- tato rovnice odpovídá implicitní rovnici 1. řádu s volitelnou konstantou
- trajektorie odpovídají pevně zvolené konstantě, tvoří **fázový portrét** ve 2D



- popsali jsme **autonomní systém** diferenciální rovnicí 2. řádu odpovídající systému 2 diferenciálních rovnic 1. řádu  $(\varphi, \dot{\varphi})$
- tato rovnice odpovídá implicitní rovnici 1. řádu s volitelnou konstantou
- trajektorie odpovídají pevně zvolené konstantě, tvoří **fázový portrét** ve 2D
- fyzikální interpretace této konstanty je velikost celkové energie kyvadla, která se zachovává (systémy tohoto typu jsou tzv. **konzervativní**)

- popsali jsme **autonomní systém** diferenciální rovnicí 2. řádu odpovídající systému 2 diferenciálních rovnic 1. řádu ( $\varphi, \dot{\varphi}$ )
- tato rovnice odpovídá implicitní rovnici 1. řádu s volitelnou konstantou
- trajektorie odpovídají pevně zvolené konstantě, tvoří **fázový portrét** ve 2D
- fyzikální interpretace této konstanty je velikost celkové energie kyvadla, která se zachovává (systémy tohoto typu jsou tzv. **konzervativní**)
- reálné dynamické systémy energii ztrácejí (např. třením) a nazývají se **disipativní** (viz **video**)

Na diferenciální rovnice vyšších řádů můžeme tedy pohlížet jako na systémy ODR.

Například rovnici

$$\ddot{x}(t) + t^2 \dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

můžeme zapsat jako systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2 x_2(t),\end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ .

Například rovnici

$$\ddot{x}(t) + t^2 \dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

můžeme zapsat jako systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2 x_2(t), \end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ .

Vektorově je to zápis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, t) \\ f_2(x_1, x_2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 - t^2 x_2 \end{pmatrix},$$

tj.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , kde  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  a  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ .

Rovnice

$$\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

odpovídá **lineárnímu** systému ODR

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2x_2(t),\end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ ,

Rovnice

$$\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

odpovídá **lineárnímu** systému ODR

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2x_2(t),\end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ , který má maticový zápis tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Rovnice

$$\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

odpovídá **lineárnímu** systému ODR

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2x_2(t),\end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ , který má maticový zápis tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

V našem případě je matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -t^2 \end{pmatrix}$ .



Rovnice

$$\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

odpovídá **lineárnímu** systému ODR

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - t^2x_2(t),\end{aligned}$$

kde  $x = x_1$  a  $\dot{x} = x_2$ , který má maticový zápis tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

V našem případě je matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -t^2 \end{pmatrix}$ .

Dynamický systém je lineární, ale není autonomní – v autonomním lineárním systému jsou prvky matice nezávislé na čase, tj. konstanty.

## Definice

**Trajektorie** s počátečním bodem  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  je uspořádaná podmnožina fázového prostoru  $\mathbf{X}$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} = \varphi^t \mathbf{x}_0, \forall t \in T, \text{ pro které je } \varphi^t \mathbf{x}_0 \text{ definováno}\}$$

V případě spojitého systému jde o orientované křivky v  $\mathbf{X}$ , v případě diskrétního systému jsou to posloupnosti bodů v  $\mathbf{X}$ . **Fázovým portrétem** dynamického systému rozumíme rozmístění trajektorií ve fázovém prostoru  $\mathbf{X}$ .

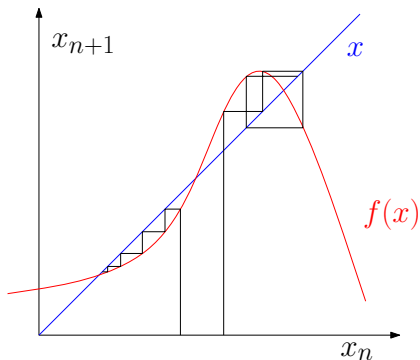
Trajektorie zakreslujeme často také jako funkce (posloupnosti) v  $T \times \mathbf{X}$ .

## Úkol:



Nakreslete trajektorii  $\dot{x} = -x$   
s počátečním bodem  
(podmínkou)  $x_0 = 1$ .  
Nakreslete ji v  $\mathbf{X}$  i v  $T \times \mathbf{X}$ .

Diskrétní trajektorie můžeme také zakreslovat pomocí tzv. pavučinového diagramu:



## Úkol:



Nakreslete trajektorii

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

s počátečním bodem  
(podmínkou)  $x_0 = 1$ .

Nakreslete ji v  $\mathbf{X}$  i v  $T \times \mathbf{X}$ .

Nakreslete také pavučinový  
diagram  $x_{n+1}$  versus  $x_n$ .

## Definice

Bod  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  nazýváme **rovnovážným bodem** (nebo též *stacionárním, singulárním, pevným bodem*) dynamického systému, jestliže pro všechna  $t \in T$  platí

$$\varphi^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

## Definice

Bod  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  nazýváme **rovnovážným bodem** (nebo též stacionárním, singulárním, pevným bodem) dynamického systému, jestliže pro všechna  $t \in T$  platí

$$\varphi^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

Dynamický systém se nachází v rovnováze, jestliže se nemění jeho stavové proměnné.

## Definice

Bod  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$  nazýváme **rovnovážným bodem** (nebo též stacionárním, singulárním, pevným bodem) dynamického systému, jestliže pro všechna  $t \in T$  platí

$$\varphi^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

Dynamický systém se nachází v rovnováze, jestliže se nemění jeho stavové proměnné.

Kyvadlo, které visí a nehoupe se:  $\varphi = 0$  a  $\dot{\varphi} = 0$ .



## Definice

**Autonomním systémem diferenciálních rovnic** rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká.

## Poznámka

Rovnovážné body autonomního systému (23) splňují systém rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

## Definice

**Autonomním systémem diferenčních rovnic** rozumíme systém

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (2)$$

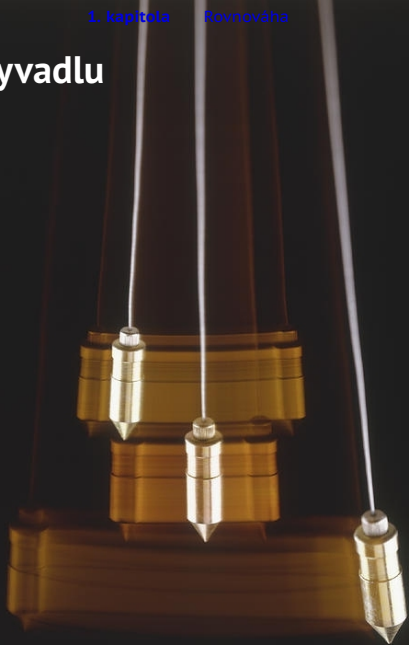
kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká. Někdy mluvíme také o systému iterovaných funkcí (ITF) nebo jen o iteracích.

## Poznámka

Rovnovážné body autonomního systému (2) splňují systém rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

# Vraťme se ke kyvadlu



a jeho rovnováže.



Kyvadlo popisuje systém rovnic pro stavové proměnné  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ , kde

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{r} \sin x_1.\end{aligned}$$

Kyvadlo popisuje systém rovnic pro stavové proměnné  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ , kde

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{r} \sin x_1.\end{aligned}$$

Poloha kyvadla se nemění, pokud  $\dot{x}_1 = 0$ , tj.  $x_2 = \dot{\varphi} = 0$ .

Kyvadlo popisuje systém rovnic pro stavové proměnné  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ , kde

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{r} \sin x_1.\end{aligned}$$

Poloha kyvadla se nemění, pokud  $\dot{x}_1 = 0$ , tj.  $x_2 = \dot{\varphi} = 0$ .  
Rychlost kyvadla se nemění, pokud  $\dot{x}_2 = 0$ .

Kyvadlo popisuje systém rovnic pro stavové proměnné  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ , kde

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{r} \sin x_1.\end{aligned}$$

Poloha kyvadla se nemění, pokud  $\dot{x}_1 = 0$ , tj.  $x_2 = \dot{\varphi} = 0$ .

Rychlost kyvadla se nemění, pokud  $\dot{x}_2 = 0$ .

Odtud tedy musí pro rovnováhu platit nejen  $\dot{\varphi} = 0$ , ale i  $\sin \varphi = 0$ .

Dostáváme tak nekonečně mnoho konstantních řešení

$$\varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

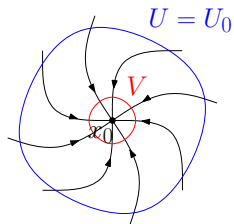


## Definice

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}_0$  se nazývá **stabilní**, jestliže

- pro každé libovolně malé okolí  $\mathbf{U}$  rovnovážného bodu  $\mathbf{x}_0$  existuje okolí  $\mathbf{V}$  bodu  $\mathbf{x}_0$  takové, že  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$  a  $\forall t > 0$  platí  $\varphi^t \mathbf{x} \in \mathbf{U}$  (tento typ stability nazýváme **Ljapunovskou stabilitou**),
- existuje okolí  $\mathbf{U}_0$  rovnovážného bodu  $\mathbf{x}_0$  takové, že  $\varphi^t \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  pro  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}_0$  a  $t \rightarrow \infty$  (tento typ stability nazýváme **asymptotickou stabilitou**).

Stabilní rovnováha:



# Je rovnováha kyvadla stabilní?



# Je rovnováha kyvadla stabilní?

Správná odpověď je – jak která.



# Je rovnováha kyvadla stabilní?

Správná odpověď je – jak která.  
Tahle ano – v realitě ...

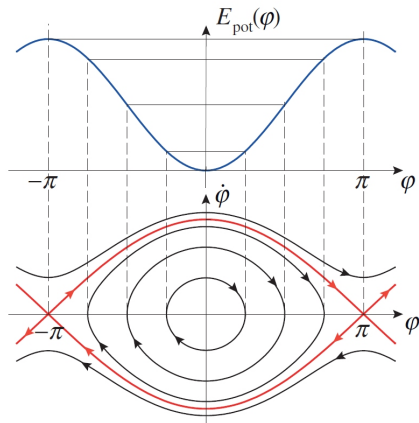


# Je rovnováha kyvadla stabilní?

Správná odpověď je – jak která.  
Tahle ano – v realitě ...

Pro náš model bez tření je rovnováha stabilní pouze Ljapunovsky, nikoliv asymptoticky.





Vidíte proč?

## Poznámka

Stabilní rovnováha  $\mathbf{x}_0$  se často nazývá také **atraktorem** a největší okolí  $U_0$  bodu  $\mathbf{x}_0$  z definice asymptotické stability se nazývá **oblastí přitažlivosti** (*basin of attraction*). Chybně se termín do češtiny někdy překládá jako bazén přitažlivosti. Basin je ale v překladu do češtiny povodí nebo kotlina. Trajektorie z povodí tak stékají ke stabilní rovnováze, které se někdy říká také stok. Tato terminologie souvisí s pojmem toku, který představuje vektorové pole příslušné dané diferenciální rovnici v každém bodě fázového (stavového) prostoru. Fázový prostor je zase pozůstatkem prvních modelů oscilátorů (tedy i kyvadel!), kdy stavovou proměnnou byla fáze. Pojem fázový portrét (*phase portrait*) už zůstal a stavový portrét se nepoužívá.



## Definice

**Invariantní množinou**  $S$  rozumíme podmnožinu  $X$  splňující

$$\mathbf{x}_0 \in S \Rightarrow \varphi^t \mathbf{x}_0 \in S \quad \forall t \in T.$$

Můžeme také rozlišovat invarianci jen pro  $t \geq t_0$  (pozitivně nebo dopředně invariantní množina).

## Definice

Uzavřená invariantní množina  $S$  se nazývá **stabilní**, jestliže

- pro každé libovolně malé okolí  $U$  množiny  $S$  existuje okolí  $V$  množiny  $S$  takové, že  $\forall \mathbf{x} \in V$  a  $\forall t > 0$  platí  $\varphi^t \mathbf{x} \in U$  (tento typ stability nazýváme **Ljapunovskou stabilitou**),
- existuje okolí  $U_0$  množiny  $S$  takové, že  $\varphi^t \mathbf{x} \rightarrow S$  pro  $\mathbf{x} \in U_0$  a  $t \rightarrow \infty$  (tento typ stability nazýváme **asymptotickou stabilitou**).

Množina  $S$  se též nazývá **atraktorem**.

# Lineární systémy



## Co se naučíme:

- popsat lineární dynamický systém matematickou formou

## Co se naučíme:

- popsat lineární dynamický systém matematickou formou
- porozumět jeho dynamice

## Co se naučíme:

- popsat lineární dynamický systém matematickou formou
- porozumět jeho dynamice
- vytvořit si souvislost mezi pojmy z lineární algebry a dynamiky

Nejprve uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$\dot{x} = ax, \quad (3)$$

kde  $a \in \mathbb{R}$  je pevně dané číslo. Řešením takové rovnice jsou právě exponenciální funkce

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

přičemž zřejmě platí  $x(0) = x_0$ . Rovnovážným bodem je tedy  $x(t) \equiv 0$ .

Nejprve uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$\dot{x} = ax, \quad (3)$$

kde  $a \in \mathbb{R}$  je pevně dané číslo. Řešením takové rovnice jsou právě exponenciální funkce

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

přičemž zřejmě platí  $x(0) = x_0$ . Rovnovážným bodem je tedy  $x(t) \equiv 0$ . Tato jednoduchá diferenciální rovnice se používá v mnoha reálných aplikacích. Můžeme ji použít jako Malthusův model růstu populace s mírou růstu  $a$  využitelný např. pro **predikci vývoje světové populace**, pro datování organických materiálů **radiokarbonovou metodou** nebo pro určení odhadu času při chladnutí těles podle Newtonova zákona ochlazování, který lze využít např. při konstrukci tepelných čerpadel, ledniček nebo chlazení sarkofágu Černobylské elektrárny ...

**My ovšem pro jednoduchost zůstaneme u hrnku kávy.**





## Newtonův model ochlazování kávy:

Představme si hrnek horké kávy (o teplotě  $T_0$ ) a postavené do místnosti s teplotou  $T^*$ . Stavová proměnná bude teplota kávy  $T$ , parametrem bude  $k \in \mathbb{R}^+$ , které bude záviset ostatních fyzikálních veličinách (měrná tepelná kapacita kávy, tvar hrníčku nebo kelímku, materiál apod.).

## Newtonův model ochlazování kávy:

Představme si hrnek horké kávy (o teplotě  $T_0$ ) a postavené do místnosti s teplotou  $T^*$ . Stavová proměnná bude teplota kávy  $T$ , parametrem bude  $k \in \mathbb{R}^+$ , které bude záviset ostatních fyzikálních veličinách (měrná tepelná kapacita kávy, tvar hrníčku nebo kelímku, materiál apod.).

Změna teploty kávy bude přibližně úměrná rozdílu teplot kávy a místnosti. Káva chladne rychleji při větším rozdílu teplot.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T^* - T(t)). \quad (4)$$

## Úkol:

Vyřešte rovnici:


$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T^* - T(t)).$$

s počáteční podmínkou  $T(0) = T_0$ . Odhadněte  $k$  pro konkrétní hrnek kafe.

Najděte rovnovážný bod rovnice a určete jeho stabilitu.

Odhadněte, za jak dlouho káva "vystydne". Teoretické výsledky srovnajte s měřením.

## Domácí úkol:



V anglickém hrabství Hampshire stojí hrad ze 13. století – **Winchester**. V hlavní hale visí na zdi kulatý stůl, o kterém se tvrdí, že jde o kulatý stůl krále Artuše (z 5. století). Radiokarbonovou metodou (pomocí rozpadu uhlíku  $^{13}\text{C}$ ) ověřte tuto hypotézu. Okamžitá míra rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku  $^{13}\text{C}$  u dřeva je  $1,245 \cdot 10^{-4}$  za rok. V živém dřevě se rozpadá 6,68 atomů  $^{13}\text{C}$  za minutu v gramu dřeva. Když (v roce 1977) prozkoumali stůl, naměřili rozpad 6,08 atomů  $^{13}\text{C}$  za minutu v gramu dřeva.

## Definice

**Lineárním autonomním systémem**  $m$  diferenčních rovnic rozumíme systém

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \quad (5)$$

kde matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$  je vektor stavových proměnných v čase  $n$ .

## Poznámka

Uvědomme si, že matice  $A$  je maticí lineárního zobrazení ve standardní ortonormální bázi prostoru  $\mathbb{R}^m$ , které zobrazuje vektor  $\mathbf{x}_n$  na vektor  $\mathbf{x}_{n+1}$ . Volbou počátečního vektoru  $\mathbf{x}_0$  tak dostáváme každý vektor iterované posloupnosti ve tvaru  $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$ . Někdy mluvíme také o lineárním systému iterovaných funkcí nebo o iteracích afinních transformací.

## Definice

**Lineárním autonomním systémem**  $m$  diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (6)$$

kde matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  je vektor stavových proměnných, které jsou funkcemi času, tj.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$ , kde přitom  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pro  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

## Poznámka

Derivace je lineární operátor, tedy pro libovolnou matici  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  platí

$$\frac{d\mathbf{T}\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}.$$

Proto i v tomto případě bude lineární zobrazení fundamentálním pojmem a klíčem k pochopení řady předkládaných tvrzení.

## Věta

*Rovnovážným bodem lineárního autonomního systému (5) resp. (6) je počátek  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .*

Pokud je matice  $\mathbf{A} - I$  resp.  $\mathbf{A}$  regulární, je to jediná rovnováha systému (5) resp. (6).

Každý lineární diferenční systém tvaru

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_n + \mathbf{b}, \quad (7)$$

kde  $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$  s regulární  $\mathbf{A} - I$  lze převést do tvaru (5).



Každý lineární diferenční systém tvaru

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_n + \mathbf{b}, \quad (7)$$

kde  $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$  s regulární  $\mathbf{A} - \mathbf{I}$  lze převést do tvaru (5).

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{y}$$

má v takovém případě jediné řešení  $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$  a transformace  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$  posouvá rovnováhu do počátku.

Každý lineární diferenciální systém tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$  s regulární  $\mathbf{A}$  lze převést do tvaru (6).

Každý lineární diferenciální systém tvaru

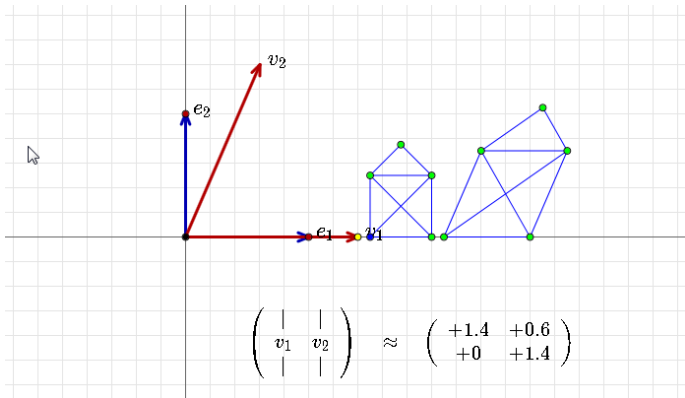
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$  s regulární  $\mathbf{A}$  lze převést do tvaru (6).

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

má v takovém případě jediné řešení  $\mathbf{y}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  a transformace  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$  posouvá rovnováhu do počátku.

Uvažujme lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a matici  $A$  tohoto zobrazení ve standardní ortonormální bázi prostoru  $\mathbb{R}^m$ . Geometrická představa takového zobrazení a jeho vlastních čísel a vektorů je velmi důležitá, proto si chvíli pohrajme s následující **aplikací**.



Pro **vlastní číslo** (vlastní hodnotu) matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  příslušné vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

Pro **vlastní číslo** (vlastní hodnotu) matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  příslušné vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

tj. vlastní čísla hledáme jako kořeny **charakteristického polynomu**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Pro **vlastní číslo** (vlastní hodnotu) matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  příslušné vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

tj. vlastní čísla hledáme jako kořeny **charakteristického polynomu**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Matice  $\mathbf{A}$  má v komplexním oboru  $m$  vlastních hodnot  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  a příslušné vlastní vektory  $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_m}\}$  tvoří bázi  $\mathbb{C}^m$ .

Pro **vlastní číslo** (vlastní hodnotu) matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  příslušné vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

tj. vlastní čísla hledáme jako kořeny **charakteristického polynomu**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Matice  $\mathbf{A}$  má v komplexním oboru  $m$  vlastních hodnot  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  a příslušné vlastní vektory  $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_m}\}$  tvoří bázi  $\mathbb{C}^m$ .

Matice  $\mathbf{T}$  tvořená  $m$  nezávislými vlastními vektory (po sloupcích) tedy splňuje

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$



V případě násobných vlastních hodnot může obsahovat bloky tvaru  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , přičemž sloupce matice  $T$  v tomto případě tvoří tzv. **zobecněné vlastní vektory**.

V případě násobných vlastních hodnot může obsahovat bloky tvaru  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , přičemž sloupce matice  $\mathbf{T}$  v tomto případě tvoří tzv. **zobecněné vlastní vektory**.

K vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0$  splňujícímu  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  přidáváme další vektory  $\mathbf{w}_i$  splňující  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}$ , kde  $i$  nabývá hodnot od 1 do geometrické násobnosti  $k$  vlastního čísla  $\lambda$ . Množina  $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k\}$  pak tvoří bázi prostoru zobecněných vlastních vektorů.

V případě násobných vlastních hodnot může obsahovat bloky tvaru  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , přičemž sloupce matice  $\mathbf{T}$  v tomto případě tvoří tzv. **zobecněné vlastní vektory**.

K vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0$  splňujícímu  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  přidáváme další vektory  $\mathbf{w}_i$  splňující  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}$ , kde  $i$  nabývá hodnot od 1 do geometrické násobnosti  $k$  vlastního čísla  $\lambda$ . Množina  $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k\}$  pak tvoří bázi prostoru zobecněných vlastních vektorů.

Lineární regulární transformace  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  převádí matici  $\mathbf{A}$  na komplexní Jordanův kanonický tvar  $\mathbf{J}$ . Reálný tvar s reálným blokem  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  dostaneme, pokud použijeme místo komplexně sdružených vektorů  $\mathbf{v}$  a  $\bar{\mathbf{v}}$  reálnou a imaginární část  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{w}$  vektoru  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$ .

## Úkol:



Najděte vlastní čísla a množinu zobecněných vlastních vektorů matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

matici  $\mathbf{T}$  a převedte ji na Jordanův kanonický tvar.

Pohrajeme si s iteracemi tvaru (5)  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ .

**Tady spusťte aplikaci.**

## Domácí úkol:



Naprogramujte si v programu Matlab svůj skript, který bude iterovat zvolený bod v rovině se zvoleným počtem iterací a zvolenou maticí zobrazení a bude vykreslovat iterace spolu s vlastními čísly a vektory. Vyzkoušejte si různé varianty – jak matic, tak startovacích bodů. Prozkoumejte hlavně směry vlastních vektorů.

Uvažujme tedy náš lineární diferenční autonomní systém (iterovaná lineární zobrazení)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

kde  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}_0$ . Odtud

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0.$$

Uvažujme tedy náš lineární diferenční autonomní systém (iterovaná lineární zobrazení)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

kde  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}_0$ . Odtud

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0.$$

Označme vlastní hodnoty sestupně  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$ . Protože  $\mathbf{x}_0$  můžeme zapsat jako lineární kombinaci nezávislých vlastních vektorů  $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_m}\}$  (tvoří bázi):

$$\mathbf{x}_0 = k_1 \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \mathbf{v}_{\lambda_2} + \dots + k_m \mathbf{v}_{\lambda_m},$$

můžeme řešení  $\mathbf{x}_n$  vyjádřit.



V případě nenásobných vlastních čísel dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\mathbf{v}_{\lambda_m}) \\ &= k_1\lambda_1^n\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\lambda_2^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\lambda_m^n\mathbf{v}_{\lambda_m} \\ &= \lambda_1^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_m}).\end{aligned}$$

V případě nenásobných vlastních čísel dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\mathbf{v}_{\lambda_m}) \\
 &= k_1\lambda_1^n\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\lambda_2^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\lambda_m^n\mathbf{v}_{\lambda_m} \\
 &= \lambda_1^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_m}).
 \end{aligned}$$

Pro násobná vlastní čísla je třeba za pro zobecněné vektory  $\mathbf{w}_i$  dosadit  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}$ .

V případě nenásobných vlastních čísel dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\mathbf{v}_{\lambda_m}) \\ &= k_1\lambda_1^n\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\lambda_2^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\lambda_m^n\mathbf{v}_{\lambda_m} \\ &= \lambda_1^n(k_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_{\lambda_m}). \end{aligned}$$

Pro násobná vlastní čísla je třeba za pro zobecněné vektory  $\mathbf{w}_i$  dosadit  $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}$ .

Rovnovážným bodem systému (5) je počátek, který je asymptoticky (dokonce exponenciálně) stabilní, pokud  $|\lambda_1| < 1$ . V případě  $|\lambda_1| > 1$  je počátek nutně nestabilní. Je-li  $|\lambda_1| = 1$ , nemůže být počátek asymptoticky stabilní.

Pro systém diferenciálních rovnic bude situace podobná. Je-li  $\lambda \in \mathbb{C}$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v}$  příslušný vlastní vektor, je funkce  $\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  evidentně řešením rovnice (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , díky základní vlastnosti vlastního vektoru:  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

Pro systém diferenciálních rovnic bude situace podobná. Je-li  $\lambda \in \mathbb{C}$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v}$  příslušný vlastní vektor, je funkce  $\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  evidentně řešením rovnice (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , díky základní vlastnosti vlastního vektoru:  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

Připomeňme Eulerův tvar komplexního čísla  $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$ . Pokud  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ , pak

$$\varphi(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{v} = e^{\alpha t} (\cos \beta + i \sin \beta) \mathbf{v}.$$

Pro  $m$  různých vlastních čísel dostáváme  $m$  nezávislých řešení. Protože řešení rovnice (6) tvoří vektorový prostor dimenze  $m$  (popřemýšlejte proč ;-), jsou tato řešení bazí tohoto prostoru. Jejich libovolná lineární kombinace je tedy řešením a takto dostáváme všechna řešení, protože báze generuje vektorový prostor. V případě vlastních čísel s nenulovou imaginární částí dává dvojice komplexně sdružených vlastních čísel a vektorů komplexní řešení tvaru  $\varphi(t)$  a  $\overline{\varphi}(t)$ , a proto lze vybrat i reálnou dvojici nezávislých řešení do báze řešení.

Pokud je  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ , vlastní číslo reálné matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$  příslušný vlastní vektor, je  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

$$\Rightarrow$$

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})}$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}},$$

takže funkce  $\varphi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$  a  $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}}$  jsou dvě nezávislá řešení rovnice (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Pokud je  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ , vlastní číslo reálné matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$  příslušný vlastní vektor, je  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

$$\Rightarrow$$

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})}$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}},$$

takže funkce  $\varphi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$  a  $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}}$  jsou dvě nezávislá řešení rovnice (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\varphi(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{v} = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}).$$

$$\bar{\varphi}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}\bar{\mathbf{v}} = e^{\alpha t}(\cos \beta - i \sin \beta)(\mathbf{u} - i\mathbf{w})$$

generující vektorový podprostor všech řešení (komplexních).



Pokud je  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ , vlastní číslo reálné matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$  příslušný vlastní vektor, je  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

$\Rightarrow$

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{v})} = \overline{(\lambda\mathbf{v})}$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}},$$

takže funkce  $\varphi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$  a  $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}}$  jsou dvě nezávislá řešení rovnice (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\varphi(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{v} = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}).$$

$$\bar{\varphi}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}\bar{\mathbf{v}} = e^{\alpha t}(\cos \beta - i \sin \beta)(\mathbf{u} - i\mathbf{w})$$

generující vektorový podprostor všech řešení (komplexních). Reálné generátory téhož vektorového podprostoru řešení jsou tedy např.

$$\operatorname{Re}\varphi(t) \text{ a } \operatorname{Im}\varphi(t).$$

V případě násobných vlastních čísel je situace složitější, jak uvidíme na konkrétních příkladech, ale také můžeme pro vlastní číslo násobnosti  $k$  nalézt  $k$  nezávislých řešení.

V případě násobných vlastních čísel je situace složitější, jak uvidíme na konkrétních příkladech, ale také můžeme pro vlastní číslo násobnosti  $k$  nalézt  $k$  nezávislých řešení.

Pokud těchto  $m$  nezávislých řešení zapíšeme za sebe, pak toto maticové zobrazení  $t \mapsto \Phi(t)$  se nazývá fundamentální matice řešení příslušného homogenního lineárního systému (6). Jejich lineární kombinace, tj.  $\Phi(t) \cdot \mathbf{c}$ , dávají všechna řešení rovnice (6).

Shrňmě to:

- V případě, že  $\lambda \in \mathbb{R}$  je  $t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{v}$  reálným řešením rovnice (6).
- V případě  $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  je vlastní vektor  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$  a reálnými řešeními rovnice (6) jsou pak

$$t \mapsto e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot \mathbf{u} - \sin \beta t \cdot \mathbf{w}), t \mapsto e^{\alpha t} (\sin \beta t \cdot \mathbf{u} + \cos \beta t \cdot \mathbf{w}).$$

- V případě  $\lambda \in \mathbb{R}$ , které je  $k$ -násobným kořenem charakteristického polynomu jsou

$t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{j=1}^i \frac{t^{i-j} \mathbf{v}_j}{(i-j)!}$ ,  $i = 1, \dots, k$  reálnými řešeními rovnice (6), kde  $\mathbf{v}_i$  je systém  $k$  zobecněných vlastních vektorů ( $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}$  pro  $i > 1$ ).

## Stabilita rovnováhy v lineárním diskretním systému:

Rovnováha  $\mathbf{0}$  systému (5)  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$

- **stabilní atraktor**  $\iff \forall$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $|\lambda| < 1$ ,
- **nestabilní**  $\iff \exists$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $|\lambda| > 1$ ,

## Stabilita rovnováhy v lineárním diskretním systému:

Rovnováha  $\mathbf{0}$  systému (5)  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$

- **stabilní atraktor**  $\iff \forall$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $|\lambda| < 1$ ,
- **nestabilní**  $\iff \exists$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $|\lambda| > 1$ ,

V případě jednotkové vlastní hodnoty má systém (5) v libovolné blízkosti počátku konstantní nenulová nebo periodická nenulová řešení (počátek tedy nemůže být asymptoticky stabilní).

## Stabilita rovnováhy v lineárním spojitém systému:

Rovnováha  $\mathbf{0}$  systému (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

- **stabilní atraktor**  $\iff \forall$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $\text{Re}\lambda < 0$ ,
- **nestabilní**  $\iff \exists$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $\text{Re}\lambda > 0$ ,

## Stabilita rovnováhy v lineárním spojitém systému:

Rovnováha  $\mathbf{0}$  systému (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

- **stabilní atraktor**  $\iff \forall$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $\operatorname{Re}\lambda < 0$ ,
- nestabilní  $\iff \exists$  vl. číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ :  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ ,

V případě nulové vlastní hodnoty má systém (6) v libovolné blízkosti počátku konstantní nenulová řešení nebo v případě ryze imaginárních vlastních hodnot periodická řešení (a také nemůže být počátek asymptoticky stabilní).



## Příklady na lineární systémy v rovině

Všechny úlohy si vyzkoušejte zobrazit v programech XPPAUT a Maple. Zajímavý nápad na vizualizaci trajektorií pomocí **loxodromického gridu** měl prof. Ghrist. Jeho animace jsou fantastické a ještě mnohokrát na jeho **stránky** a **YouTube kanál** zabrousíme.

# Lineární dynamika

## Co se naučíme:

- vytvoříme jakousi kolekci typů lineárních rovnoh

## Co se naučíme:

- vytvoříme jakousi kolekci typů lineárních rovnoh
- podíváme se na to, co se děje, když budeme spojitě měnit matici lineárního systému

## Co se naučíme:

- vytvoříme jakousi kolekci typů lineárních rovnováh
- podíváme se na to, co se děje, když budeme spojitě měnit matici lineárního systému
- použijeme znalosti o lineárních dynamických systémech na praktických úlohách

Uvažujme dvourozměrný systém (5) resp. (6), tj.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ .

Matice  $\mathbf{A}$  má pak dvě vlastní hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2$ , které jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

kde  $\sigma = \operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2$  je stopa matice  $\mathbf{A}$  a  $\Delta = \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2$  je její determinant.

## Věta

Nutnými a postačujícími podmínkami asymptotické stability rovnováhy  $\mathbf{0}$  spojitého systému (6)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  v rovině jsou podmínky

$$\Delta = \det \mathbf{A} > 0 \quad a \quad \sigma = \operatorname{tr} \mathbf{A} < 0.$$

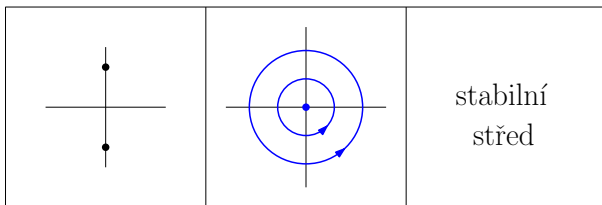
Protože známe pro lineární systémy v rovině tvar řešení, můžeme klasifikovat typy rovnováh i systémů. V případě vlastních čísel, která leží mimo imaginární osu, mluvíme o hyperbolických rovnováhách.

## Klasifikace lineárních spojitých systémů v rovině:

$(m_+, m_-)$	Vlastní hodnoty	Fázový portrét	Stabilita
$(0, 2)$			stabilní
$(1, 1)$			nestabilní
$(2, 0)$			nestabilní



V případě, kdy vlastní číslo leží na imaginární ose, mluvíme o nehyperbolické rovnováze. V případě dvojice komplexně sdružených vlastních čísel je řešení periodické a tomuto typu rovnováhy říkáme střed:



V případě, kdy je nějaké vlastní číslo nulové, má jádro (kernel)  $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  matice  $\mathbf{A}$  jako vektorový podprostor  $\mathbf{X}$  nenulovou dimenzi a rovnováha tedy není izolovaný bod.

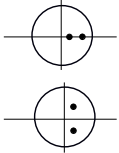
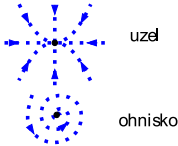
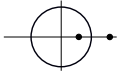
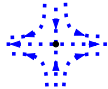
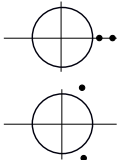
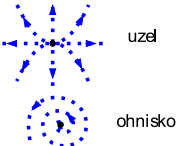
**Věta**

Nutnými a postačujícími podmínkami asymptotické stability rovnováhy  $\mathbf{0}$  diskrétního systému (5)  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$  v rovině jsou podmínky

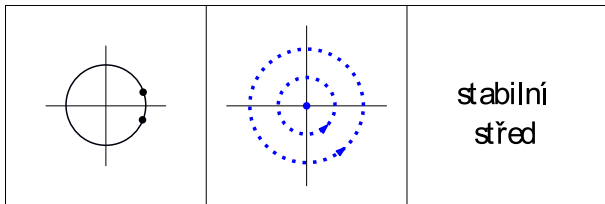
$$\begin{aligned} |\Delta| &= |\det \mathbf{A}| < 1, \\ 1 - \sigma + \Delta &= 1 - \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0 \\ 1 + \sigma + \Delta &= 1 + \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0, \end{aligned}$$

Protože známe pro lineární systémy tvar řešení, můžeme klasifikovat typy rovnováh i systémů. V případě vlastních čísel, která leží mimo jednotkovou kružnici, mluvíme o hyperbolických rovnováhách.

## Klasifikace lineárních diskretních systémů v rovině:

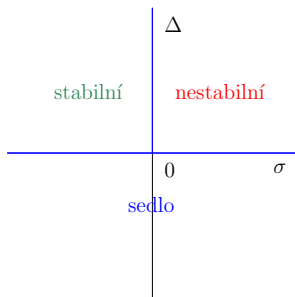
$(m_+, m_-)$	Vlastní hodnoty	Fázový portrét	Stabilita
$(0, 2)$		 uzel ohnisko	stabilní
$(1, 1)$		 sedlo	nestabilní
$(2, 0)$		 uzel ohnisko	nestabilní

V případě, kdy má vlastní číslo velikost 1, mluvíme o nehyperbolické rovnováze. V případě dvojice komplexně sdružených vlastních čísel je řešení periodické a tomuto typu rovnováhy říkáme střed:

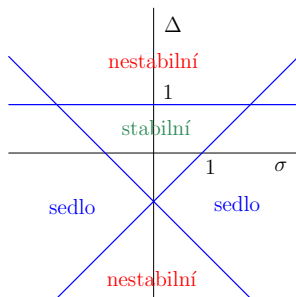


V případě, kdy má matice  $\mathbf{A}$  vlastní číslo 1, je jádro (kernel)  $\{\mathbf{x} : (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  matice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  vektorový podprostor  $\mathbf{X}$  s nenulovou dimenzí a rovnováha tedy není izolovaný bod. V případě, kdy má matice  $\mathbf{A}$  vlastní číslo -1, existuje v libovolném okolí počátku 2-periodické řešení z jádra  $\{\mathbf{x} : (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  matice  $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ .

## Stabilita hyperbolického rovnovážného bodu v rovině:



spojitý systém



diskrétní systém

Co se děje při spojitě změně matice systému?

Pohrejte si **v rovině** a **v prostoru**

**Video prof. Ghrista**

# Praktické úlohy



Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Címrman by řekl, že je jich nepočítaně.



Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Cimrman by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)

Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Cimrman by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)
- modely populačního růstu a epidemiologické modely

Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Círmán by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)
- modely populačního růstu a epidemiologické modely
- věkově strukturované modely, tzv. Leslieho populační modely

Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Cimrman by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)
- modely populačního růstu a epidemiologické modely
- věkově strukturované modely, tzv. Leslieho populační modely
- modely chemických reakcí a chemických rovnováh

Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Cimrman by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)
- modely populačního růstu a epidemiologické modely
- věkově strukturované modely, tzv. Leslieho populační modely
- modely chemických reakcí a chemických rovnováh
- ekonomické modely

Souhrn všech typů praktických úloh zde určitě nemůžete očekávat. Cimrman by řekl, že je jich nepočítaně. Proto vybítáme ty nejdůležitější nebo možná nejznámější:

- různé kompartmentové modely (např. model účinnosti léčivé látky, vytápění domu nebo samočištění ekosystému)
- modely populačního růstu a epidemiologické modely
- věkově strukturované modely, tzv. Leslieho populační modely
- modely chemických reakcí a chemických rovnováh
- ekonomické modely
- fraktály a počítačová grafika

## Kompartmentové modely

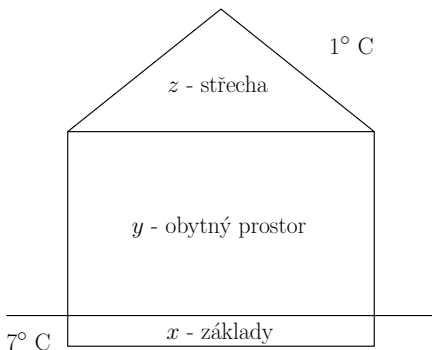
Kompartmentové modely jsou modely, kdy jsou stavové proměnné strukturované. Stavové proměnné (látka, částice, část populace apod.) se v systému nacházejí v diskrétních oblastech, tzv. kompartmentech. Ke grafickému znázornění často používáme bloková schémata – v jednotlivých blocích je uložena určitá zásoba látky se stejnou charakteristikou látka prochází mezi jednotlivými kompartmenty podle struktury modelu. Můžeme tak modelovat třeba krev v jednotlivých orgánech lidského těla, vodu v různých částech atmosféry, látky v určitých chemických stavech, ať už jde o skupenství nebo jinou chemickou formu, nebo organismy v určitém biologickém stavu (pacienti v různých stadiích onemocnění, hmyz ve vývojových fázích dospívání apod.). Podívejte se do [Wikipedie](#).

Protože jsme už prozkoumali Newtonův model ochlazování, použijeme přístup kompartmentů na model vytápění domu.



Protože jsme už prozkoumali Newtonův model ochlazování, použijeme přístup kompartmentů na model vytápění domu.

## Vytápění domu



Jendoduchý model vytápění domu může vypadat třeba takto:

$$\dot{x} = k_0(7 - x) + k_1(y - x),$$

$$\dot{y} = k_1(x - y) + k_2(1 - y) + k_3(z - y) + T,$$

$$\dot{z} = k_3(y - z) + k_4(1 - z),$$

kde  $k_i$ ,  $i \in \{0, \dots, 4\}$  jsou kladné parametry, které závisí na materiálu, zateplení, ploše apod. Tyto jsou pevně dané. Parametr  $T$  energie dodávaná na vytápění. Tento parametr můžeme ovlivňovat.

V programech Maple a XPPAUT prostudujeme dynamiku modelu na cvičení.

Znečištění vodních toků – příklad velkých kanadských jezer:

## Model pro XPPAUT

## Modely populačního růstu a epidemiologické modely

Jako první praktický příklad uvedeme exponenciální populační explozi, kterou můžeme modelovat jak počátek epidemie, tak zezelenání přehrady. Uvažujme populaci, kterou můžeme modelovat spojitě - např. množství sinic na přehradě budeme měřit v  $g/m^3$ , nebudeme je počítat.

## Modely populačního růstu a epidemiologické modely

Jako první praktický příklad uvedeme exponenciální populační explozi, kterou můžeme modelovat jak počátek epidemie, tak zezelenání přehrady. Uvažujme populaci, kterou můžeme modelovat spojitě - např. množství sinic na přehradě budeme měřit v  $g/m^3$ , nebudeme je počítat.

Stejně tak můžeme takový spojitý přístup používat u epidemiologických modelů nebo u rozmnožování populace. Diskrétní přístup se hodí v případě populací s daným obdobím rozmnožování (mnoho druhů zvířat a rostlin).

Označíme-li  $x(t)$  velikost populace v čase  $t$ ,  $b$  okamžitou míru reprodukce a  $d$  míru vymírání (zde předpokládáme, že jsou míry  $b$  a  $d$  konstantní), pak můžeme populaci popsat diferenciální rovnicí

$$\dot{x} = bx - dx = rx,$$

kde  $r$  je konstantní míra růstu populace a  $\dot{x}$  představuje okamžitou změnu velikosti populace.


Označíme-li  $x(t)$  velikost populace v čase  $t$ ,  $b$  okamžitou míru reprodukce a  $d$  míru vymírání (zde předpokládáme, že jsou míry  $b$  a  $d$  konstantní), pak můžeme populaci popsat diferenciální rovnicí

$$\dot{x} = bx - dx = rx,$$

kde  $r$  je konstantní míra růstu populace a  $\dot{x}$  představuje okamžitou změnu velikosti populace.

Řešením je exponenciální funkce  $x(t) = x_0 e^{rt}$ . Pokud je  $r < 0$ , tj.  $d > b$ , populace vymře (rovnovážný stav  $x(t) \equiv 0$  je stabilní), pokud je  $r > 0$ , tj.  $d < b$ , populace bude růst nade všechny meze (rovnovážný stav  $x(t) \equiv 0$  je nestabilní).

## Úkol:



Kdy je třeba vyhlásit zákaz koupání v přehradě, jestliže jsme minulé 4 dny v 8:00 ráno naměřili v odběrné nádobě hodnoty 2, 3, 5 a 7 mikrogramů. Hranice toxicity je  $30 \mu g$ .

**Simulovat v Maplu**



Ve cvičení si vyzkoušíme modelování **růstu světové populace** nebo epidemie **COVID-19**.

Spojitým a diskretním modelům populačního růstu a epidemiologickým modelům se velmi důkladně věnují předměty profesora Pospíšila **PřF:M5858 Spojité deterministické modely I** a **PřF:M8230 Diskretní deterministické modely**.

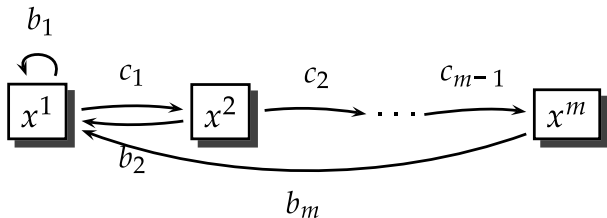
## Leslieho populační modely

Jde o kompartmentový model věkově strukturované populace, který můžeme použít pro modelování růstu populace víceletých rostlin, populace ryb nebo i lidí.

Leslieho populačním modelům se velmi důkladně věnuje předmět profesora Pospíšila **PřF:M7116 Maticové populační modely**.

Modelujeme diskrétně, populace se kontroluje po určitých pevných intervalech. Stavovými proměnnými jsou jednotlivé věkové třídy populace:  $x^1, \dots, x^m$ . Některé skupiny produkují nové jedince, a to s různou mírou reprodukce  $b_i > 0$  (dospělí jedinci), jiné mají míru reprodukce nulovou,  $b_i = 0$  (nedospělí jedinci). Po nějakém čase přechází určitá část dané třídy  $x^i$  do následující třídy  $x^{i+1}$  (tyto míry přežití označíme pro každou třídu  $c_i$ .)

Modelujeme diskrétně, populace se kontroluje po určitých pevných intervalech. Stavovými proměnnými jsou jednotlivé věkové třídy populace:  $x^1, \dots, x^m$ . Některé skupiny produkují nové jedince, a to s různou mírou reprodukce  $b_i > 0$  (dospělí jedinci), jiné mají míru reprodukce nulovou,  $b_i = 0$  (nedospělí jedinci). Po nějakém čase přechází určitá část dané třídy  $x^i$  do následující třídy  $x^{i+1}$  (tyto míry přežití označíme pro každou třídu  $c_i$ .)



Systém můžeme zapsat lineárním diferenčním systémem

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{m-1} & b_m \\ c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$$

s Leslieho maticí  $\mathbf{L}$  a vektorem iterací struktury populace

$\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$ , tj.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_n.$$

Ze struktury řešení víme, že se věková struktura populace dlouhodobě stabilizuje proporcionálně vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}$ , který přísluší v absolutní hodnotě největšímu vlastnímu číslu. Procentní vyjádření je tedy dáno normalizovaným vektorem

$$P = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

kde výrazem  $|\mathbf{v}|$  rozumíme součet (kladných) složek vektoru  $\mathbf{v}$ .

## Aplikace pro Leslieho systém v Maplu

## Úkol:

Uvažujme populaci ryb  
s Leslieho maticí

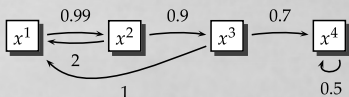
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Můžeme zvolit rovnoměrný  
výlov nebo výlov některé  
věkové skupiny. Je některá  
z variant výlovu dlouhodobě  
udržitelná?

**Výpočet v Maplu**

## Domácí úkol:

Modelujte populaci žen ve věkovém rozmezí 0-14, 15-29, 30-44 a více let.



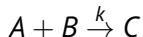
0-14	15-29	30-44	45 a více
1200	1500	1000	1300

Predikujte situaci za 30 let s počátečními podmínkami danými tabulkou a odhadněte dlouhodobou strukturu populace.



## Modely chemických reakcí

Chemické a biochemické reakce je vhodné popisovat pomocí diferenciálních rovnic. Elementární reakce podléhají kinetické rovnici, která popisuje rychlost, se kterou interagují dvě látky a vytvářejí třetí:



Koncentrace látek se značí v hranatých závorkách a uvedenou reakci můžeme popsat rovnicí

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B],$$

kde derivace koncentrace  $[C]$  je okamžitá změna koncentrace  $[C]$ , tedy rychlost, s jakou je tvořen produkt reakce. Konstanta  $k$  je rychlostní konstanta, která vlastně konstantou není – závisí např. na teplotě nebo homogenitě směsi.

Nejjednodušší chemickou reakcí je přeměna jedné látky na druhou (rozpad), může probíhat oběma směry:



Změna koncentrace  $[A]$  pak splňuje

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_+[A] + k_-[B].$$

Rovnováha se ustanoví v poměru  $[B]/[A] = k_+/k_-$ .

Nejjednodušší chemickou reakcí je přeměna jedné látky na druhou (rozpad), může probíhat oběma směry:



Změna koncentrace  $[A]$  pak splňuje

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_+[A] + k_-[B].$$

Rovnováha se ustanoví v poměru  $[B]/[A] = k_+/k_-$ . Pokud je systém uzavřený, pak  $[A] + [B] = [A]_{\text{tot}}$  a

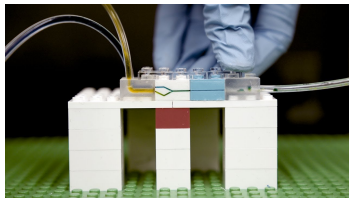
$$\frac{d[A]}{dt} = -k_+[A] + k_-([A]_{\text{tot}} - [A]) = k_-[A]_{\text{tot}} - (k_+ + k_-)[A]$$

a rovnováha  $[A]_{\text{eq}} = \frac{k_-}{k_+ + k_-} [A]_{\text{tot}}$  je stabilní.

Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární.

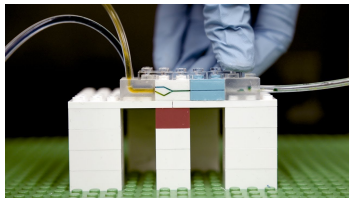
Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární. Podívejte se, jak vypadá dnešní matematické modelování v biochemii a systémové a syntetické biologii:

■ **Metabolické sítě (co jsou metabolické sítě a jejich modelování)**



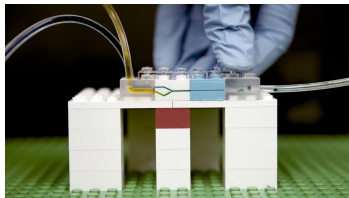
Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární. Podívejte se, jak vypadá dnešní matematické modelování v biochemii a systémové a syntetické biologii:

- **Metabolické sítě (co jsou metabolické sítě a jejich modelování)**
- **GRN – Genové regulační sítě (co jsou GNR)**



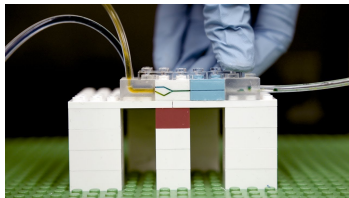
Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární. Podívejte se, jak vypadá dnešní matematické modelování v biochemii a systémové a syntetické biologii:

- **Metabolické sítě (co jsou metabolické sítě a jejich modelování)**
- **GRN – Genové regulační sítě (co jsou GNR)**
- **Elektrofyzologie a neurální sítě**



Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární. Podívejte se, jak vypadá dnešní matematické modelování v biochemii a systémové a syntetické biologii:

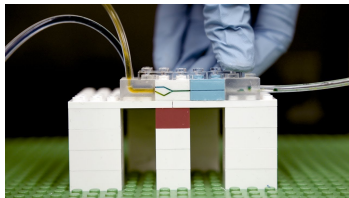
- **Metabolické sítě (co jsou metabolické sítě a jejich modelování)**
- **GRN – Genové regulační sítě (co jsou GNR)**
- **Elektrofyzologie a neurální sítě**
- **Biochemické sítě**





Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic, které ani nebudou lineární. Podívejte se, jak vypadá dnešní matematické modelování v biochemii a systémové a syntetické biologii:

- **Metabolické sítě (co jsou metabolické sítě a jejich modelování)**
- **GRN – Genové regulační sítě (co jsou GNR)**
- **Elektrofyzologie a neurální sítě**
- **Biochemické sítě**
- **Cirkadiánní rytmy – PER gen**



## Ekonomické modely

Ekonomové modelují nejčastěji lineárně (nebo loglineárně), ať už jde např. o budoucí hodnotu peněz, diskontaci, nebo makroekonomické modely rovnováh trhů (**IS-LM model**, **AD-AS model**, **AD-IA model**).

## Ekonomické modely

Ekonomové modelují nejčastěji lineárně (nebo loglineárně), ať už jde např. o budoucí hodnotu peněz, diskontaci, nebo makroekonomické modely rovnováh trhů (**IS-LM model**, **AD-AS model**, **AD-IA model**).

Důvod je zřejmý. Dynamiku tak složitého systému jako je ekonomický trh modelují nejjednodušším způsobem. Fitovat data, predikovat nebo dynamicky optimalizovat je i v takovém případě obtížný úkol. Makroekonomům také jde často jen o krátkodobý efekt fiskální a monetární politiky - snížení inflace, zvýšení exportu apod.

My si uvedeme slavný příklad **destabilizace makroekonomické rovnováhy** Paula Anthonyho Samuelsona, otce moderní ekonomie, nositele Nobelovy ceny za ekonomii (1970).

My si uvedeme slavný příklad **destabilizace makroekonomické rovnováhy** Paula Anthonyho Samuelsona, otce moderní ekonomie, nositele Nobelovy ceny za ekonomii (1970).

### Samuelsonův model interakce multiplikátoru a akcelérátoru

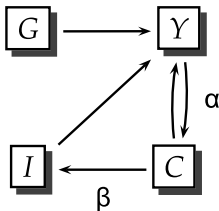
Model popisuje jak ovlivňuje GNP tzv. multiplikační a akcelerační efekt. Multiplikačním efektem rozumíme to, že růst vládních výdajů vede k růstu GNP. Akcelerační efekt je růst investic díky růstu GNP.

Model:

Proměnnými jsou vládní výdaje  $G$  a hrubý národní produkt  $Y$ , který je součtem investic  $I$ , spotřeby  $C$  a vládních výdajů  $G$ . Uvažujeme nejjednodušší případ – uzavřenou ekonomiku.

Model:

Proměnnými jsou vládní výdaje  $G$  a hrubý národní produkt  $Y$ , který je součtem investic  $I$ , spotřeby  $C$  a vládních výdajů  $G$ . Uvažujeme nejjednodušší případ – uzavřenou ekonomiku.



Rovnice:

$$Y_{n+1} = I_{n+1} + C_{n+1} + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

$$I_{n+1} = \beta(C_{n+1} - C_n),$$

kde  $\alpha \in (0, 1)$  je sklon ke spotřebě,  $\beta > 0$  je míra růstu investic. GNP  $Y_n$ , spotřeba  $C_n$  a investice  $I_n$  jsou stavové proměnné v  $n$ -tém období,  $G$  je exogenní proměnná,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry.



Rovnice:

$$Y_{n+1} = I_{n+1} + C_{n+1} + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

$$I_{n+1} = \beta(C_{n+1} - C_n),$$

kde  $\alpha \in (0, 1)$  je sklon ke spotřebě,  $\beta > 0$  je míra růstu investic. GNP  $Y_n$ , spotřeba  $C_n$  a investice  $I_n$  jsou stavové proměnné v  $n$ -tém období,  $G$  je exogenní proměnná,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry. Jde o lineární dynamický diskrétní model, kde investice lze vyloučit z modelu (všimněte si, že pokud je systém v rovnováze, jsou investice nulové):

$$Y_{n+1} = \beta(C_{n+1} - C_n) + C_{n+1} + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

Rovnice:

$$Y_{n+1} = I_{n+1} + C_{n+1} + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

$$I_{n+1} = \beta(C_{n+1} - C_n),$$

kde  $\alpha \in (0, 1)$  je sklon ke spotřebě,  $\beta > 0$  je míra růstu investic. GNP  $Y_n$ , spotřeba  $C_n$  a investice  $I_n$  jsou stavové proměnné v  $n$ -tém období,  $G$  je exogenní proměnná,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry. Jde o lineární dynamický diskretní model, kde investice lze vyloučit z modelu (všimněte si, že pokud je systém v rovnováze, jsou investice nulové):

$$Y_{n+1} = \beta(C_{n+1} - C_n) + C_{n+1} + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

a přepsat do tvaru 2-rozměrného systému

$$Y_{n+1} = (1 + \beta)\alpha Y_n - \beta C_n + G,$$

$$C_{n+1} = \alpha Y_n,$$

Matice systému má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1 + \beta)\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a protože  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 - \alpha$ , je evidentně regulární.

Matice systému má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1 + \beta)\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a protože  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 - \alpha$ , je evidentně regulární. Rovnováha tedy splňuje

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} Y^* \\ C^* \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} -1 & -\beta \\ \alpha & 1 - (1 + \beta)\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice systému má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1 + \beta)\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a protože  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 - \alpha$ , je evidentně regulární. Rovnováha tedy splňuje

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} Y^* \\ C^* \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} -1 & -\beta \\ \alpha & 1 - (1 + \beta)\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud

$$Y^* = \frac{G}{1-\alpha} \quad \text{a} \quad C^* = \frac{\alpha G}{1-\alpha}$$

Multiplikační efekt je zřejmý – růst vládních výdajů vede k růstu GNP  $Y^*$ , přičemž multiplikátor je  $\frac{1}{1-\alpha}$ .

$$I^* = Y^* - C^* - G = \frac{G}{1-\alpha} - \frac{\alpha G}{1-\alpha} - G = 0$$

Akcelerační efekt GNP na investice je zprostředkovaný změnou spotřeby, v rovnováze jsou tedy investice opravdu nulové (nezapomeňte, že předpokládáme uzavřenou ekonomiku).

Dynamika v okolí rovnováhy je určena vlastními čísly matice  $\mathbf{A}$ .

Dynamika v okolí rovnováhy je určena vlastními čísly matice  $\mathbf{A}$ .  
Charakteristický polynom je

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - (1 + \beta)\alpha & \beta \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha(\beta + 1)\lambda + \alpha\beta = 0.$$

Dynamika v okolí rovnováhy je určena vlastními čísly matice  $\mathbf{A}$ .  
Charakteristický polynom je

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - (1 + \beta)\alpha & \beta \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha(\beta + 1)\lambda + \alpha\beta = 0.$$

Vlastní hodnoty jsou proto

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(\beta + 1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta + 1)^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$



Dynamika v okolí rovnováhy je určena vlastními čísly matice  $\mathbf{A}$ .  
 Charakteristický polynom je

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - (1 + \beta)\alpha & \beta \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha(\beta + 1)\lambda + \alpha\beta = 0.$$

Vlastní hodnoty jsou proto

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(\beta + 1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta + 1)^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

Podle věty o stabilitě diskrétního systému je rovnováha stabilní, pokud platí  $|\lambda_{1,2}| < 1$ , tj.

$$\left| \frac{\alpha(\beta + 1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta + 1)^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right| < 1.$$

Postačující podmínky stability rovnováhy jsou

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |\det \mathbf{A}| < 1, \\ 1 - \sigma + \Delta &= 1 - \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0 \\ 1 + \sigma + \Delta &= 1 + \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0, \end{aligned}$$

kde  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \alpha(\beta + 1)$  a  $\det \mathbf{A} = \alpha\beta$ .

Postačující podmínky stability rovnováhy jsou

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |\det \mathbf{A}| < 1, \\ 1 - \sigma + \Delta &= 1 - \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0 \\ 1 + \sigma + \Delta &= 1 + \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} > 0, \end{aligned}$$

kde  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \alpha(\beta + 1)$  a  $\det \mathbf{A} = \alpha\beta$ . Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \alpha\beta < 1, \\ 1 - \sigma + \Delta &= 1 - \alpha(\beta + 1) + \alpha\beta = 1 - \alpha > 0 \\ 1 + \sigma + \Delta &= 1 + \alpha(\beta + 1) + \alpha\beta > 0, \end{aligned}$$

přičemž druhá a třetí podmínka je vždy splněna. Postačující podmínkou stability je tedy  $\alpha\beta < 1$ .

Vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(\beta+1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta+1)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$  mohou být i komplexní.  
Řešení proto osciluje, pokud  $\alpha < \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}$ .

Vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(\beta+1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta+1)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$  mohou být i komplexní.

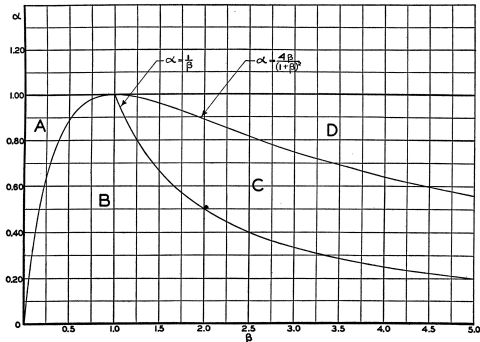
Řešení proto osciluje, pokud  $\alpha < \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}$ .

**Samuelsonův graf** (str. 5 článku):

78

THE REVIEW OF ECONOMIC STATISTICS

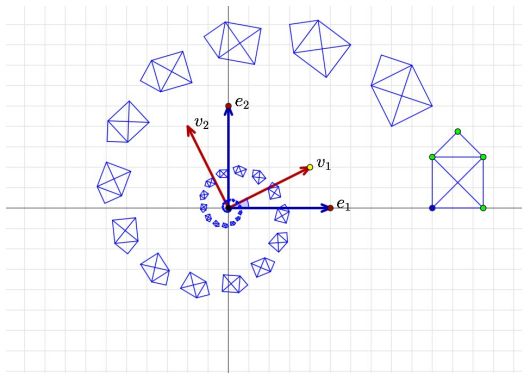
CHART 2.—DIAGRAM SHOWING BOUNDARIES OF REGIONS YIELDING DIFFERENT QUALITATIVE BEHAVIOR OF NATIONAL INCOME



# Fraktály a počítačová grafika

# Fraktály a počítačová grafika

## Systémy iterovaných funkcí



## Vyzkoušejte

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988



Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  s pravděpodobností  $p = 0,01$

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0,01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,85$$

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0,01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,85$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,07$$

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0,01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,85$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,07$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,07$$

Michael Fielding Barnsley (\*1946) - kniha Fractals Everywhere, 1988

Použil čtyři afinní transformace tvaru:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0,01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,85$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,07$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0,07$$

Zkuste to **v Matlabu!**

Zkuste si sami!

<https://cindyjs.org/gallery/main/Barnsley/>

[https://cindyjs.org/examples/17\\_ShapeOperations.html](https://cindyjs.org/examples/17_ShapeOperations.html)

[https://cindyjs.org/examples/144\\_randomtree.html](https://cindyjs.org/examples/144_randomtree.html)

<https://cindyjs.org/gallery/main/IFS/>

<https://youtu.be/wujlqihioEU>

# Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her



## Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her
- první použití ve filmu: Loren Carpenter - Star Trek II

## Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her
- první použití ve filmu: Loren Carpenter - Star Trek II
- Loren Carpenter, zakladatel a vývojář firem Pixar, RenderMan

## Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her
- první použití ve filmu: Loren Carpenter - Star Trek II
- Loren Carpenter, zakladatel a vývojář firem Pixar, RenderMan
- filmy Kráska a zvíře, Aladdin, Lví král, Terminator 2: Den zúčtování, Jurský park, Avatar, Titanic, Star Wars, Pán prstenů...

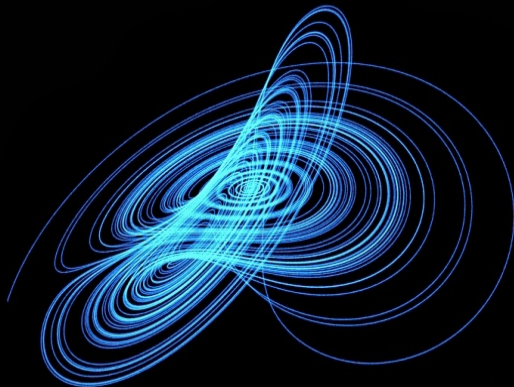
## Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her
- první použití ve filmu: Loren Carpenter - Star Trek II
- Loren Carpenter, zakladatel a vývojář firem Pixar, RenderMan
- filmy Kráska a zvíře, Aladdin, Lví král, Terminator 2: Den zúčtování, Jurský park, Avatar, Titanic, Star Wars, Pán prstenů...
- umění a užití v reálných aplikacích (rozpoznávání, 3D modely, fotografie)

## Počítačová a filmová grafika

- dnes běžně užívané pro textury a grafiku počítačových her
- první použití ve filmu: Loren Carpenter - Star Trek II
- Loren Carpenter, zakladatel a vývojář firem Pixar, RenderMan
- filmy Kráska a zvíře, Aladdin, Lví král, Terminator 2: Den zúčtování, Jurský park, Avatar, Titanic, Star Wars, Pán prstenů...
- umění a užití v reálných aplikacích (rozpoznávání, 3D modely, fotografie)
- simulace zemětřesení, růstu krystalů, růstu orgánů, krajiny ...

# Nelineární dynamika a linearizace



## Co se naučíme:

- pracovat s nelineárními systémy

## Co se naučíme:

- pracovat s nelineárními systémy
- porozumět pojmu „topologická ekvivalence“



## Co se naučíme:

- pracovat s nelineárními systémy
- porozumět pojmu „topologická ekvivalence“
- Grobmanovu-Hartmanovu větu

## Co se naučíme:

- pracovat s nelineárními systémy
- porozumět pojmu „topologická ekvivalence“
- Grobmanovu-Hartmanovu větu
- a její použití v praktických úlohách

Nejprve se podívejte na [video](#) k rovnici  $\dot{x} = (x + 4)(x + 1)(x - 4)$ .

Nejprve se podívejte na [video](#) k rovnici  $\dot{x} = (x + 4)(x + 1)(x - 4)$ .

Jak bychom nejrychleji popsali, co se děje třeba v okolí  $x = -1$ ?

Nejprve se podívejte na [video](#) k rovnici  $\dot{x} = (x + 4)(x + 1)(x - 4)$ .

Jak bychom nejrychleji popsalí, co se děje třeba v okolí  $x = -1$ ?

$$\dot{x} \approx (-1 + 4)(x + 1)(-1 - 4) = -15(x + 1),$$

takže bod blízko  $-1$  změní svou polohu asi  $-15\times$ . Pokud leží vpravo, posune se zhruba  $15\times$  vlevo a naopak. Musí se tedy k rovnováze velmi rychle přibližovat!

Nejprve se podívejte na [video](#) k rovnici  $\dot{x} = (x + 4)(x + 1)(x - 4)$ .

Jak bychom nejrychleji popsali, co se děje třeba v okolí  $x = -1$ ?

$$\dot{x} \approx (-1 + 4)(x + 1)(-1 - 4) = -15(x + 1),$$

takže bod blízko  $-1$  změní svou polohu asi  $-15\times$ . Pokud leží vpravo, posune se zhruba  $15\times$  vlevo a naopak. Musí se tedy k rovnováze velmi rychle přibližovat! Samozřejmě to platí pouze lokálně – v blízkosti bodu  $-1$ , u bodu  $4$  je situace úplně jiná ...

Provedli jsme první linearizaci nelineární dynamiky.

Pokud budeme studovat 2-rozměrné nelineární systémy  
diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{9}$$

můžeme si podobnou geometrickou představou velmi pomoci.

Pokud budeme studovat 2-rozměrné nelineární systémy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{9}$$

můžeme si podobnou geometrickou představou velmi pomoci.

### Definice

$x_j$ -**nulklinou** systému (9) rozumíme implicitně danou křivku

$$f_i(x_1, x_2) = 0, i \in \{1, 2\}.$$



Pokud budeme studovat 2-rozměrné nelineární systémy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{9}$$

můžeme si podobnou geometrickou představou velmi pomoci.

## Definice

$x_j$ -**nulklinou** systému (9) rozumíme implicitně danou křivku

$$f_i(x_1, x_2) = 0, i \in \{1, 2\}.$$

Trajektorie procházející  $x_1$ -nulklinou jsou rovnoběžné s osou  $x_2$  a naopak.

Nelineární úlohu (23)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  s rovnováhou  $\mathbf{x}_0$  lze posunutím tohoto bodu do počátku převést na tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

kde  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  je Jacobiho matice  $\mathbf{f}$  v rovnováze  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$  pro  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ , což znamená, že

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Nelineární úlohu (23)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  s rovnováhou  $\mathbf{x}_0$  lze posunutím tohoto bodu do počátku převést na tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

kde  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  je Jacobiho matice  $\mathbf{f}$  v rovnováze  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$  pro  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ , což znamená, že

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Často dokonce  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq k \|\mathbf{x}\|^2$  na  $\|\mathbf{x}\| < a$  ( $a > 0, k > 0$ ). Je-li  $t \mapsto \Phi(t)$  fundamentální matice řešení příslušného homogenního lineárního systému tvaru (6), pak metodou variace konstanty dostáváme řešení úlohy (10) s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(t_0) = \xi$  tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(\mathbf{x}(s)) ds.$$

V případě, že  $\mathbf{A}$  má pouze vlastní hodnoty se zápornými reálnými částmi odtud lze (pomocí Gronwallova lemmatu) ukázat, že existují  $a, b, c > 0$  takové, že každé řešení (10) s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ ,  $\|\boldsymbol{\xi}\| \leq b$  splňuje pro  $t \geq t_0$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq c \|\boldsymbol{\xi}\| e^{-a(t-t_0)}.$$

Dostáváme tedy následující tvrzení:

### Věta (Ljapunovova věta)

*Uvažujme systém (23) s rovnováhou  $\mathbf{x}_0$ . Označme  $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  Jacobiho matici v bodě  $\mathbf{x}_0$ . Pak  $\mathbf{x}_0$  je stabilní (atraktor), jestliže všechna vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  matice  $\mathbf{J}$  splňují  $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ .*

## Poznámka

*„Obrácením běhu času“, tj. pro  $t \rightarrow -\infty$ , můžeme analogicky odvodit Ljapunovovu větu pro nestabilní „odpuzující“ rovnováhu (tzv. repeler). V takovém případě musí všechna vlastní čísla splňovat  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ .*

## Poznámka

*„Obrácením běhu času“, tj. pro  $t \rightarrow -\infty$ , můžeme analogicky odvodit Ljapunovovu větu pro nestabilní „odpuzující“ rovnováhu (tzv. repeler). V takovém případě musí všechna vlastní čísla splňovat  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ .*

Je vidět, že malá změna v nelineárních členech systému, při zachování těch lineárních, nebude mít v případě atraktoru ani v případě repeleru vliv na dynamiku v okolí rovnováhy – zůstane v podstatě tatáž.

Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci.

Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci. Než ji vyslovíme, potřebujeme ale popsat dvě důležité věci:



Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci. Než ji vyslovíme, potřebujeme ale popsat dvě důležité věci:

- co to vlastně je „stejná“ dynamika

Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci. Než ji vyslovíme, potřebujeme ale popsat dvě důležité věci:

- co to vlastně je „stejná“ dynamika
- kde a za jakých okolností je dynamika „stejná“

Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci. Než ji vyslovíme, potřebujeme ale popsat dvě důležité věci:

- co to vlastně je „stejná“ dynamika
- kde a za jakých okolností je dynamika „stejná“

Platí dokonce mnohem silnější tvrzení – Grobmanova-Hartmanova věta o linearizaci. Než ji vyslovíme, potřebujeme ale popsat dvě důležité věci:

- co to vlastně je „stejná“ dynamika
- kde a za jakých okolností je dynamika „stejná“

„Stejnost“ neboli **ekvivalenci** lze definovat pro dynamické systémy různými způsoby. V literatuře naleznete mnoho ekvivalencí dynamických systémů. Zde půjde o ekvivalenci dostatečně širokou – **topologickou**.

## Definice

Dynamický systém  $D_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \varphi^t\}$  se nazývá **topologicky ekvivalentní** dynamickému systému  $D_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$ , jestliže existuje homeomorfismus  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , které zobrazuje trajektorie systému  $D_1$  na trajektorie systému  $D_2$ , přičemž zachovává jejich orientaci. Často v takovém případě mluvíme také o (topologicky) **ekvivalentních fázových portrétech**.

## Definice

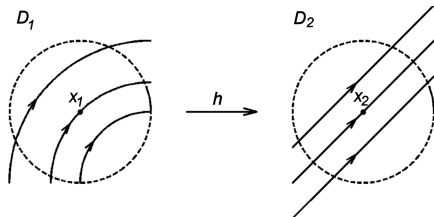
Dynamický systém  $D_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \varphi^t\}$  se nazývá **topologicky ekvivalentní** dynamickému systému  $D_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$ , jestliže existuje homeomorfismus  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , které zobrazuje trajektorie systému  $D_1$  na trajektorie systému  $D_2$ , přičemž zachovává jejich orientaci. Často v takovém případě mluvíme také o (topologicky) **ekvivalentních fázových portrétech**.

## Definice

Dynamický systém  $D_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \varphi^t\}$  se nazývá **lokálně topologicky ekvivalentní** v okolí  $O_1$  bodu  $\mathbf{x}_1$  dynamickému systému  $D_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$  v okolí  $O_2$  bodu  $\mathbf{x}_2$ , jestliže existuje homeomorfismus  $h : O_1 \rightarrow O_2$ , které zobrazuje trajektorie systému  $D_1$  v okolí  $O_1$  na trajektorie systému  $D_2$  v okolí  $O_2$ , přičemž zachovává jejich orientaci.

## Poznámka

Homeomorfismus je invertibilní zobrazení, které je spojitě a jehož inverzní zobrazení je také spojitě. Trajektorie systému  $D_1$  se tedy dají jednoznačně přiřadit (i s orientací, resp. uspořádáním) k trajektoriím systému  $D_2$  tak, aby si vzájemně odpovídaly „sousední“ body, lokální okolí. Nezajímají nás geometrické vzdálenosti a vztahy, ale topologické vlastnosti.



## Definice

Izolovanou rovnováhu  $\mathbf{x}_0$  systému (23) nazveme **hyperbolickou**, jestliže žádná z vlastních hodnot příslušné Jacobiho matice  $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  neleží na imaginární ose.



## Věta (Grobmanova-Hartmanova věta, věta o linearizaci)

*Systém (23)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je v okolí své hyperbolické rovnováhy  $\mathbf{x}_0$  lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací*

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}. \quad (11)$$

Důkaz naleznete např. v [originálním článku](#) a také v mnoha monografiích.

## Věta (Grobmanova-Hartmanova věta, věta o linearizaci)

*Systém (23)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je v okolí své hyperbolické rovnováhy  $\mathbf{x}_0$  lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací*

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}. \quad (11)$$

Důkaz naleznete např. v **originálním článku** a také v mnoha monografiích.

## Poznámka

*Systémy tvaru (23) v okolí hyperbolických rovnovážných bodů  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{y}_0$  jsou tedy lokálně topologicky ekvivalentní právě tehdy, když mají tyto rovnovážné body stejný počet vlastních hodnot s kladnou a zápornou reálnou částí. Dimenze stabilních resp. nestabilních podprostorů, které generují příslušné vlastní vektory, se označují  $n_-$  (pro  $\text{Re}\lambda < 0$ ) a  $n_+$  (pro  $\text{Re}\lambda > 0$ ).*

## Linearizace – video prof. Ghrista

## Linearizace – video prof. Ghrista

### Příklady na nulkliny a fázové portréty v rovině

# Praktické úlohy



Na úvod začneme jednorozměrným modelem růstu populace a vynecháme ten lineární (Malthusův, exponenciální). Pokud volíme míru růstu populace závisle na čase prostřednictvím velikosti populace, dostáváme autonomní nelineární dynamický systém

$$\dot{x} = r(x)x,$$

Volbou  $r(x)$  dostáváme následující běžně používané modely populačního růstu:

$\dot{x} = r_0 x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$	logistický Verhulstovův model,
$\dot{x} = r_0 x \left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^\beta\right), \beta > 0$	Richardsův model,
$\dot{x} = r_0 x \left(\left(\frac{x}{K}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right)$	von Bertalanffyho model,
$\dot{x} = r_0 x \frac{1 - \frac{x}{K}}{1 + c \frac{x}{K}}, c > 0$	Smithův model,
$\dot{x} = r_0 x \ln\left(\frac{K}{x}\right)$	Gompertzův model,
$\dot{x} = r_0 x \left(\frac{x}{A} - 1\right) \left(1 - \frac{x}{K}\right)$	Alleeho model,

$K > 0$  je tzv. kapacita prostředí,  $A$  je Alleeho prahová hodnota,  $r_0$  je specifická míra růstu.

## Domácí úkol:



Prozkoumejte různé tvary funkcí  $r(x)$  a diskutujte důvody jejich použití. Vyhledejte typické použití v literatuře. Umíte nalézt tvary řešení? Najděte rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.



Ukážeme si linearizaci na **Verhulstově modelu**

$$\dot{x} = r_0 \left( 1 - \frac{x}{K} \right) x$$

Ukážeme si linearizaci na **Verhulstově modelu**

$$\dot{x} = r_0 \left( 1 - \frac{x}{K} \right) x$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

Ukážeme si linearizaci na **Verhulstově modelu**

$$\dot{x} = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

rovnováha:  $x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$

Ukážeme si linearizaci na **Verhulstově modelu**

$$\dot{x} = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

rovnováha:  $x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$

$Df(0) = r_0 > 0, x = 0$  je nestabilní rovnováha

Ukážeme si linearizaci na **Verhulstově modelu**

$$\dot{x} = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

rovnováha:  $x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$

$Df(0) = r_0 > 0, x = 0$  je nestabilní rovnováha

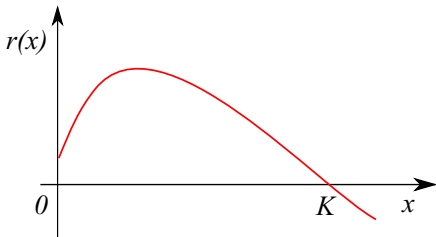
$Df(K) = -r_0 < 0, x = K$  je stabilní rovnováha

**Alleeho efekt** je jev kdy se zvyšující se velikostí populace zdatnost každého jejího člena roste. Může vést až ke vzniku kritické populační velikosti, která je nutná k přežití populace jako celku: klesne-li velikost populace pod tuto hodnotu, pak populace s velkou pravděpodobností vymírá.

**Alleeho efekt** je jev kdy se zvyšující se velikostí populace zdatnost každého jejího člena roste. Může vést až ke vzniku kritické populační velikosti, která je nutná k přežití populace jako celku: klesne-li velikost populace pod tuto hodnotu, pak populace s velkou pravděpodobností vymírá.

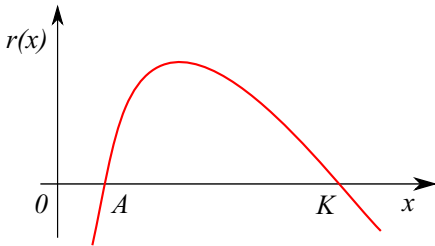
Alleeho efekt může vyvolávat řada mechanismů. Může to být např. potřeba nalézt partnera pro páření, kdy při malé velikosti populace je úspěšné nalezení partnera a vyvedení mláďat obtížné a schopnost rozmnožování se tak zvyšuje se zvětšující se velikostí populace. Podobně se může zdatnost jedinců zvyšovat s velikostí populace při obraně před predátory nebo při vzájemné spolupráci při uzpůsobování svého životního prostředí (např. tučňáci by jistě v malé kolonii nepřežili).

Rozlišujeme silný a slabý Alleeho efekt. Slabý Alleeho efekt nastává v situaci, kdy pro malé velikosti populace specifická míra růstu populace roste a je kladná, tedy s rostoucí populací roste zdatnost jedinců až do určité maximální hodnoty a poté klesá až k nulové hodnotě v kapacitě prostředí  $K$ .





Daleko významější je silný Alleeho efekt, kdy existuje jistá prahová velikost populace  $A$ , pod kterou populace není schopna přežít.



Uvažujme **Verhulstův model s Alleeho efektem** tvaru

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right),$$

kde  $r > 0$ ,  $K > 0$  a  $A \in (0, K)$ . Pro specifickou míru růstu populace platí

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right).$$

Uvažujme **Verhulstův model s Alleeho efektem** tvaru

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right),$$

kde  $r > 0$ ,  $K > 0$  a  $A \in (0, K)$ . Pro specifickou míru růstu populace platí

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right).$$

Grafem této funkce je konkávní parabola s kořeny v  $A$  a  $K$ , přičemž pro hodnoty populace v intervalu  $(0, A)$  je  $r(x) < 0$ . To je právě silný Alleeho efekt, kdy takto malá populace nemůže přežít, protože velikost populace klesá,  $x = 0$  je stabilním rovnovážným bodem, atraktorem. Při překročení této prahové hodnoty platí  $r(x) > 0$  a velikost populace roste až k rovnovážnému stabilnímu bodu  $x = K$ .

$$\dot{x} = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right)$$

$$\dot{x} = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right)$$

$$f'(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) + rx \left(-\frac{1}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) + rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{1}{A}\right)$$

$$\dot{x} = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right)$$

$$f'(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) + rx \left(-\frac{1}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) + rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{1}{A}\right)$$

Také Grobmanova–Hartmanova věta potvrzuje tyto úvahy:

$$f'(0) = r > 0, \quad f'(A) = r \left(1 - \frac{A}{K}\right) > 0, \quad f'(K) = -r \left(\frac{K}{A} - 1\right) < 0.$$

Pokud budeme takovouto populaci vytěžovat (viz např. model rybolovu s konstatním úsilím), dostaneme model s rovnicí tvaru

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - Ex = rx \left(\left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - \frac{E}{r}\right).$$

Pokud budeme takovouto populaci vytěžovat (viz např. model rybolovu s konstatním úsilím), dostaneme model s rovnicí tvaru

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - Ex = rx \left(\left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - \frac{E}{r}\right).$$

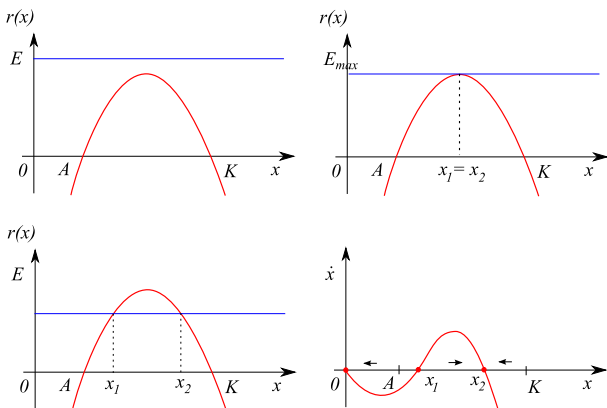
Z tvaru pravé strany je zřejmé, že  $x = 0$  je stabilní rovnováha a pro vysoké  $E$  je to jediná rovnováha systému. Prahovou hodnotou vynaloženého úsilí  $E$  je hodnota specifické míry růstu populace v jejím maximu  $x = \frac{K+A}{2}$ , tj.

$$E_{max} = r \frac{(K-A)^2}{4AK}$$



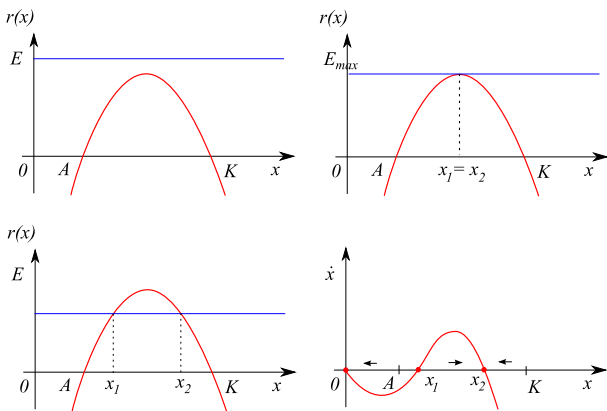
Pro  $E$  pod hodnotou  $E_{max}$  má systém 3 rovnovážné stavy  $x = 0$ ,  $x = x_1$  a  $x = x_2$  (viz obr. 128), kde  $x_1 < x_2$  jsou řešení kvadratické rovnice

$$r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) = E.$$



Pro  $E$  pod hodnotou  $E_{max}$  má systém 3 rovnovážné stavy  $x = 0$ ,  $x = x_1$  a  $x = x_2$  (viz obr. 128), kde  $x_1 < x_2$  jsou řešení kvadratické rovnice

$$r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) = E.$$



Pro  $E$  nad hodnotou  $E_{max}$  má systém jediný stabilní rovnovážný stav  $x = 0$ .

Při zvýšení těžby přes prahovou hodnotu  $E_{max}$  dochází ke **kvalitativní změně dynamiky** – bifurkaci.

Při zvýšení těžby přes prahovou hodnotu  $E_{max}$  dochází ke **kvalitativní změně dynamiky** – bifurkaci.

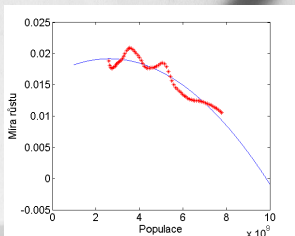
Situace, kdy se těžba s efektivitou  $E_{max}$  je prakticky neudržitelná a také vede k vymření populace. Udržitelná těžba tedy musí splňovat jednak podmínku  $E < E_{max}$ , ale také podmínku na počáteční stav populace, která musí být dostatečně velká, musí být nad prahovou hodnotou nestabilního prostředního rovnovážného bodu, tj.  $x(0) > x_1$ . Pokud tedy ekonomické tlaky na těžbu biopopulace vedou k jejímu stálému růstu, jak to vidíme dnes, dochází k tomu, že těžená populace v ustáleném rovnovážném bodě  $x_2$  má mírnou klesající tendenci ovšem pouze do okamžiku, kdy se těžba přiblíží prahové hranici  $E_{max}$ , případně ji překročí. V takovém okamžiku dojde k velmi rychlé kvalitativní změně a velikost populace rapidně klesne a druh vymírá.

Je evidentní, že pro záchranu populace už nestačí těžbu snížit, pokud bude totiž počáteční populace pod  $x_1$ , k vymření stejně dojde. K záchraně druhu je pak třeba daleko větší úsilí: navýšení kapacity prostředí, specifické míry růstu, nebo snížení prahové hodnoty  $A$ . Tento jednoduchý model tak ukazuje, jak nebezpečné je chování dnešní globalizované společnosti, která tlačí na maximální vytěžování, což vidíme např. u populace tuňáka obecného.

## Domácí úkol:

Modelujte světovou populaci s Alleeho efektem

Funkci růstového koeficientu  $r(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$  můžeme odhadnout pomocí lineární regrese z dat na [www.worldometers.info](http://www.worldometers.info) nebo v souboru [population.xlsx](#). Zkuste to a ukažte, že nejlepší odhad koeficientů je  $a_0 = 0.016645$ ,  $a_1 = 1.938243 \cdot 10^{-12}$  a  $a_2 = -3.693209 \cdot 10^{-22}$ . Porovnejte váš výsledek s obrázkem.



Dalšími typickými modely jsou **modely interakcí (Příbylová: Deterministické modely, str. 164)**, **epidemiologické modely (Pospíšil, Příbylová: Spojité deterministické modely, str. 153)**, již zmíněné **biochemické modely (Pospíšil, Příbylová: Spojité deterministické modely, str. 165)**, modely v **neurovědě (Pospíšil, Příbylová: Spojité deterministické modely, str. 185)** .... **FitzHughův–Nagumův model neuronu (Scholar)** si během semestru ukážeme blíže.

# Fold, transkritická a vidličková bifurkace





## Co se naučíme:

- popsat dynamické systémy s parametrem

## Co se naučíme:

- popsat dynamické systémy s parametrem
- porozumět pojmu bifurkace rovnovážného bodu

## Co se naučíme:

- popsat dynamické systémy s parametrem
- porozumět pojmu bifurkace rovnovážného bodu
- nakreslit bifurkační diagram

## Co se naučíme:

- popsat dynamické systémy s parametrem
- porozumět pojmu bifurkace rovnovážného bodu
- nakreslit bifurkační diagram
- pochopit změnu dynamiky spjitých systémů související s přechodem vlastního čísla přes 0

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s parametrem tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (12)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  je vektor proměnných,  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$  je vektor parametrů a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká.

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s parametrem tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (12)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  je vektor proměnných,  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$  je vektor parametrů a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká.

Jestliže  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{0}$ , má systém (12) rovnovážný bod  $\mathbf{x}_0$  pro parametr  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$  a linearizovaný systém v tomto bodě je

$$\dot{\mathbf{u}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{u},$$

kde  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$  značí Jacobiho matici v bodě  $\mathbf{x}_0$  pro parametr  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ .

Je-li pro  $\varepsilon_0$  rovnovážný bod  $\mathbf{x}_0$  hyperbolický, je lineární transformace  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  invertibilní a věta o implicitní funkci zaručuje lokálně existenci a jednoznačnost křivky  $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ , která splňuje  $\beta(\varepsilon_0) = \mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \mathbf{0}$ , tedy  $\beta(\varepsilon)$  odpovídá rovnovážnému bodu pro parametr  $\varepsilon$ .

Je-li pro  $\varepsilon_0$  rovnovážný bod  $\mathbf{x}_0$  hyperbolický, je lineární transformace  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  invertibilní a věta o implicitní funkci zaručuje lokálně existenci a jednoznačnost křivky  $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ , která splňuje  $\beta(\varepsilon_0) = \mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \mathbf{0}$ , tedy  $\beta(\varepsilon)$  odpovídá rovnovážnému bodu pro parametr  $\varepsilon$ .

Navíc, pokud  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  má  $m_+$  a  $m_-$  vlastních hodnot s kladnou resp. zápornou reálnou částí, bude mít v okolí  $\varepsilon_0$  Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$  stejný počet  $m_+$  a  $m_-$  vlastních hodnot s kladnou resp. zápornou reálnou částí.



Uvažujme systém diferenčních rovnic s parametrem tvaru

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (13)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  je vektor proměnných,  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$  je vektor parametrů a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká.

Uvažujme systém diferenčních rovnic s parametrem tvaru

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (13)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$  je vektor proměnných,  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$  je vektor parametrů a vektorová funkce  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  je dostatečně hladká.

Jestliže  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{x}_0$ , má systém (13) rovnovážný bod  $\mathbf{x}_0$  pro parametr  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$  a linearizovaný systém v tomto bodě je

$$\mathbf{u}(n+1) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{u}(n),$$

kde  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$  značí Jacobiho matici v bodě  $\mathbf{x}_0$  pro parametr  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ .

Je-li pro  $\varepsilon_0$  pevný bod  $\mathbf{x}_0$  hyperbolický, je lineární transformace  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) - I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  invertibilní a věta o implicitní funkci zaručuje lokálně existenci a jednoznačnost křivky  $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ , která splňuje  $\beta(\varepsilon_0) = \mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv \beta(\varepsilon)$ , tedy  $\beta(\varepsilon)$  odpovídá pevnému bodu pro parametr  $\varepsilon$ .

Navíc, pokud  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  má  $m_+$  a  $m_-$  vlastních hodnot s velikostí větší resp. menší než 1, bude mít v okolí  $\varepsilon_0$  Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$  stejný počet  $m_+$  a  $m_-$  vlastních hodnot s velikostí větší resp. menší než 1.

Hyperbolický rovnovážný bod bude mít tedy pro parametry  $\varepsilon$  dostatečně blízké  $\varepsilon_0$  stejné kvalitativní vlastnosti (stabilitu, nestabilitu, dimenze stabilní a nestabilní variety). V okolí hyperbolického rovnovážného bodu závislého na parametru je tedy tento systém tzv. **strukturálně stabilní**, tj. perturbovaný systém je s ním lokálně topologicky ekvivalentní.

V případě, že má Jacobiho matice  $Df(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0)$  nějakou vlastní hodnotu s nulovou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí rovnou 1 v diskrétním případě ( $m_0 \neq 0$ ), není zaručena existence ani jednoznačnost křivky  $\beta(\varepsilon)$ , tj. při perturbaci může dojít k zániku rovnovážného bodu (v každém okolí  $\varepsilon_0$ ), nebo k vzniku nové větve rovnovážných řešení (odtud vznikl název, rozvětvení = bifurkace) a samozřejmě při přechodu  $\varepsilon_0$  může dojít ke změně stability, dimenze stabilní a nestabilní variety, tedy obecně k lokální kvalitativní změně chování systému.

## Definice

**Lokální bifurkací** systému (12) resp. (13) v okolí rovnovážného bodu  $\mathbf{x}_0 = \beta(\varepsilon_0)$  s kritickou hodnotou parametru  $\varepsilon = \varepsilon_0$  rozumíme kvalitativní změnu dynamiky v okolí kritické hodnoty  $\varepsilon_0$ , kdy fázové portréty v okolí rovnováhy  $\mathbf{x}_0$  při přechodu přes bifurkační parametr  $\varepsilon_0$  nejsou lokálně topologicky ekvivalentní.

## Poznámka

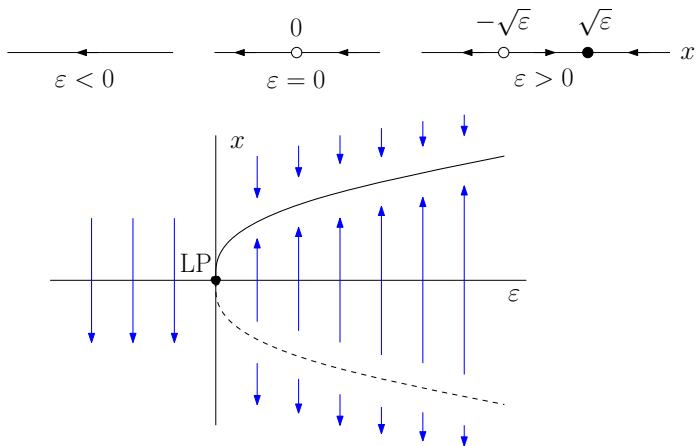
V okolí nehyperbolické rovnováhy, kde dochází k bifurkaci, je systém strukturálně nestabilní.

Uvažujme diferenciální rovnice s parametrem tvaru

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Rovnovážné body splňují  $f(x, \varepsilon) := \varepsilon - x^2 = 0$ , tj. leží na křivce  $\varepsilon = x^2$ . Pro  $\varepsilon < 0$  nemá rovnice (14) žádný rovnovážný bod, pro  $\varepsilon = 0$  je rovnováhou bod  $x_0 = 0$  a pro  $\varepsilon > 0$  jsou rovnováhy dvě:  $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ . Parametr  $\varepsilon = 0$  je tedy bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci typu fold (ohyb). Bod  $(x_0, \varepsilon_0) = (0, 0)$  je tzv. limitním bodem. Všimněte si, že vlastní hodnota  $\lambda = Df(0, 0) = 0$ .

Bifurkační diagram bifurkace typu fold:



Křivka odpovídající stabilní rovnováze se zakresluje plnou čarou (plný bod), nestabilní rovnováže pak čárkovaně (prázdný bod).

## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

kde  $f$  je hladká funkce, má pro  $\alpha = \alpha_0$  rovnovážný bod  $x = x_0$  a  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka transverzality.} \end{array}$$

Pak je (15) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **fold bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon \pm y^2$$

(v libovolném okolí počátku).



$$f(x, \alpha) =$$
$$\cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + f_\alpha(x_0, \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2$$

+ členy s vyššími mocninami

Rovnováha  $x_0$  spňuje  $f(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Dochází k narušení hyperbolicity, tj.  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ .

$$f(x, \alpha) = \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + f_\alpha(x_0, \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2$$

+ členy s vyššími mocninami

Rovnováha  $x_0$  spňuje  $f(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Dochází k narušení hyperbolicity, tj.  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Reparametrizace  $\varepsilon = |f_\alpha(x_0, \alpha_0)|(\alpha - \alpha_0) + \dots$  a posun do počátku  $y^2 = |\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)|(x - x_0)^2 + \dots$  převádí první členy na rovnici (14)  $\dot{y} = \pm\varepsilon \pm y^2$ , která je tzv. normálním tvarem pro fold bifurkaci.

$$f(x, \alpha) = \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + f_\alpha(x_0, \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2 + \text{členy s vyššími mocninami}$$

Rovnováha  $x_0$  spňuje  $f(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Dochází k narušení hyperbolicity, tj.  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Reparametrizace  $\varepsilon = |f_\alpha(x_0, \alpha_0)|(\alpha - \alpha_0) + \dots$  a posun do počátku  $y^2 = |\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)|(x - x_0)^2 + \dots$  převádí první členy na rovnici (14)  $\dot{y} = \pm\varepsilon \pm y^2$ , která je tzv. normálním tvarem pro fold bifurkaci. Znaménko  $f_\alpha(x_0, \alpha_0)$  pak určuje znaménko u  $\varepsilon$  v normálním tvaru, znaménko  $f_{xx}(x_0, \alpha_0)$  určuje znaménko u  $y^2$ .

$$f(x, \alpha) = \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + f_\alpha(x_0, \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2 + \text{členy s vyššími mocninami}$$

Rovnováha  $x_0$  spňuje  $f(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Dochází k narušení hyperbolicity, tj.  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ .

Reparametrizace  $\varepsilon = |f_\alpha(x_0, \alpha_0)|(\alpha - \alpha_0) + \dots$  a posun do počátku  $y^2 = |\frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)|(x - x_0)^2 + \dots$  převádí první členy na rovnici (14)  $\dot{y} = \pm\varepsilon \pm y^2$ , která je tzv. normálním tvarem pro fold bifurkaci. Znaménko  $f_\alpha(x_0, \alpha_0)$  pak určuje znaménko u  $\varepsilon$  v normálním tvaru, znaménko  $f_{xx}(x_0, \alpha_0)$  určuje znaménko u  $y^2$ .

Každá jednoparametrická diferenciální rovnice tvaru (15) splňující podmínky věty má dynamiku v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní s jejím normálním tvarem (jedna ze 4 možností znaménkových hodnot).

**Podmínka nedegenerovanosti**  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že nejde o jiný typ bifurkace.

**Podmínka nedegenerovanosti**  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že nejde o jiný typ bifurkace. **Podmínka transversality**  $f_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že při přechodu parametru přes kritickou hodnotu skutečně dochází ke kvalitativní změně (vzniku či zániku rovnovážných bodů).

**Podmínka nedegenerovanosti**  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že nejde o jiný typ bifurkace. **Podmínka transversality**  $f_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že při přechodu parametru přes kritickou hodnotu skutečně dochází ke kvalitativní změně (vzniku či zániku rovnovážných bodů).

Kdyby některá z těchto hodnot byla nulová, museli bychom v Taylorově rozvoji použít členy vyšších mocnin, např. s  $f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)$  nebo s  $f_{xxx}(x_0, \alpha_0)$  a tvar normální formy by se změnil a mohlo by dojít ke kvalitativní změně dynamiky této rovnice.

**Podmínka nedegenerovanosti**  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že nejde o jiný typ bifurkace. **Podmínka transversality**  $f_{\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  zaručuje, že při přechodu parametru přes kritickou hodnotu skutečně dochází ke kvalitativní změně (vzniku či zániku rovnovážných bodů).

Kdyby některá z těchto hodnot byla nulová, museli bychom v Taylorově rozvoji použít členy vyšších mocnin, např. s  $f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)$  nebo s  $f_{xxx}(x_0, \alpha_0)$  a tvar normální formy by se změnil a mohlo by dojít ke kvalitativní změně dynamiky této rovnice.

Ti, kteří chtějí vědět, jak najít onen neznámý homeomorfismus z definice topologické ekvivalence, můžou zalistovat v Kuzněcovovi nebo počkat do předmětu **PřF:M9BCF Teorie bifurkací, chaos a fraktály**.

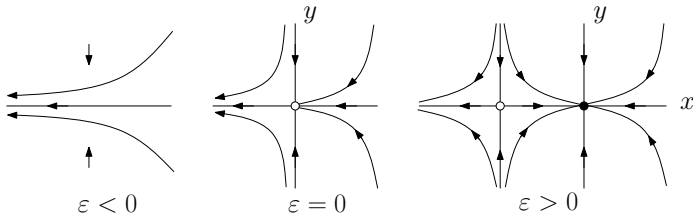


Bifurkace typu fold se nazývá také někdy **bifurkace sedlo-uzel**.  
Podívejte se proč:

Bifurkace typu fold se nazývá také někdy **bifurkace sedlo-uzel**.  
Podívejte se proč:

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2,$$

$$\dot{y} = -y,$$



**sedlo-uzel.gif**  
**video prof. Ghrista**

## Příklady na fold bifurkaci

Pro hledání vhodných „adept“ pro jednoparametrickou bifurkaci sedlo-uzel vícerozměrného víceparametrického systému tvaru (12)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

můžeme použít jednoduchý algoritmus. Hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \mathbf{0}, \\ \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= 0\end{aligned}$$

vzhledem k  $\mathbf{x}$  a jednomu vybranému parametru. Kromě jedné tedy fixujeme všechny složky  $\varepsilon$ .

Pro hledání vhodných „adept“ pro jednoparametrickou bifurkaci sedlo-uzel vícerozměrného víceparametrického systému tvaru (12)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

můžeme použít jednoduchý algoritmus. Hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \mathbf{0}, \\ \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

vzhledem k  $\mathbf{x}$  a jednomu vybranému parametru. Kromě jedné tedy fixujeme všechny složky  $\varepsilon$ .

Zda skutečně dochází k bifurkaci sedlo-uzel můžeme ověřit až spočtením vlastních hodnot Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$  v okolí kritické hodnoty  $\varepsilon_0$ , přitom Jacobiho matice je vypočtena v rovnovážném bodě  $\mathbf{x} = \beta(\varepsilon)$ , který závisí na parametru.

## Další jednoparametrické bifurkace počtu rovnovážných bodů ve spojitých systémech:

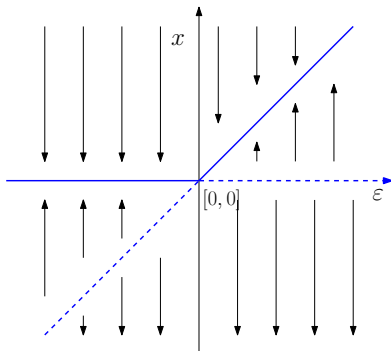
Normální forma transkritické bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^2 \quad (16)$$

## Další jednoparametrické bifurkace počtu rovnovážných bodů ve spojitých systémech:

Normální forma transkritické bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^2 \quad (16)$$



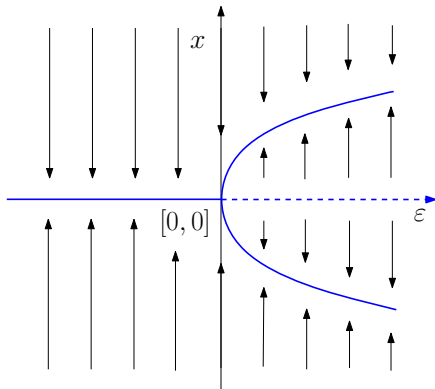
## Normální forma vidličkové (pitchfork) bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3 \quad (17)$$



## Normální forma vidličkové (pitchfork) bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3 \quad (17)$$



## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

kde  $f$  je hladká funkce, která má pro  $\alpha = \alpha_0$  nehyperbolickou rovnováhu  $x = x_0$  ( $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ ), která leží na průsečíku dvou větví rovnováh, tj. platí také  $f_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0$ . Předpokládejme, že jsou navíc splněny podmínky

$$f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

$$f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transverzality.}$$

Pak je (18) v okolí rovnováhy  $x_0$  lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **transkritické bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^2$$

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + \cancel{f_\alpha(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2 + f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \text{členy s vyššími mocninami} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + \cancel{f_\alpha(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^2 + f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \text{členy s vyššími mocninami} \end{aligned}$$

Podmínka  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0$  byla u fold bifurkace také podmínka nedegenerovanosti. Porušená je podmínka transversality fold bifurkace, protože  $f_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0$ , ale člen s  $f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)$  nevymizí.

## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

kde  $f(x - x_0)$  je v okolí počátku lichá funkce, která má pro  $\alpha = \alpha_0$  nehyperbolickou rovnováhu  $x = x_0$  ( $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ ).

Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$f_{xxx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

$$f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transverzality.}$$

Pak je (19) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **vidličkové bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^3$$

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + \cancel{f_\alpha(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0) + \\ & \frac{1}{2}\cancel{f_{xx}(x_0, \alpha_0)}(x - x_0)^2 + f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \frac{1}{2}\cancel{f_{\alpha\alpha}(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0)^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^3 + \\ & + \text{členy s vyššími mocninami} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, \alpha) = & \cancel{f(x_0, \alpha_0)} + \cancel{f_x(x_0, \alpha_0)}(x - x_0) + \cancel{f_\alpha(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0) + \\
 & \frac{1}{2}\cancel{f_{xx}(x_0, \alpha_0)}(x - x_0)^2 + f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + \\
 & + \frac{1}{2}\cancel{f_{\alpha\alpha}(x_0, \alpha_0)}(\alpha - \alpha_0)^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(x_0, \alpha_0)(x - x_0)^3 + \\
 & + \text{členy s vyššími mocninami}
 \end{aligned}$$

Lichost funkce  $f$  implikuje  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) = 0$ , tedy je porušena podmínka nedegenerovanosti fold bifurkace. Ze stejného důvodu je porušena podmínka transversality a  $f_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0$ . První nevyrušené členy jsou s  $f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)$  a s  $f_{xxx}(x_0, \alpha_0)$ .

## Poznámka

*Jak v případě fold, tak v případě transkritické bifurkace znaménko  $u y^2$  odpovídá znaménku levé strany podmínky nedegenerovanosti. Podobně u vidličkové bifurkace je znaménko  $u y^3$  znaménkem levé strany podmínky nedegenerovanosti. Znaménko  $u \varepsilon$  odpovídá znaménku levé strany podmínky transversality.*



**Příklady na transkritickou a vidličkovou bifurkaci**  
**Příklady s více bifurkacemi**

# Příklady nelineárních jevů (fold, transkritická a vidličková bifurkace)



## Co se naučíme:

- pochopit nelineární jevy v dynamických systémech související s uvedenými bifurkacemi

## Co se naučíme:

- pochopit nelineární jevy v dynamických systémech související s uvedenými bifurkacemi
- použít znalostí o bifurkacích souvisejících s přechodem vlastního čísla přes 0 na praktických úlohách

## Co se naučíme:

- pochopit nelineární jevy v dynamických systémech související s uvedenými bifurkacemi
- použít znalostí o bifurkacích souvisejících s přechodem vlastního čísla přes 0 na praktických úlohách
- popsat bifurkaci SNIPER a jev synchronizace

Jednparametrická bifurkace spojitého systému spojená s přechodem reálného vlastního čísla přes 0 je typicky příčinou jednak změny stability rovnováhy, ale hlavně změny **počtu rovnováh**.

- **fold bifurkace** je typicky příčinou **skokové změny** v dynamice systému, kdy ustálený stav (stabilní rovnováha) při malé změně parametru pod kritickou hodnotu zanikne a systém reaguje velkou změnou stavových hodnot

Jednparametrická bifurkace spojitého systému spojená s přechodem reálného vlastního čísla přes 0 je typicky příčinou jednak změny stability rovnováhy, ale hlavně změny **počtu rovnováh**.

- **fold bifurkace** je typicky příčinou **skokové změny** v dynamice systému, kdy ustálený stav (stabilní rovnováha) při malé změně parametru pod kritickou hodnotu zanikne a systém reaguje velkou změnou stavových hodnot
- **transkritická bifurkace** je typicky příčinou změny v dynamice systému, která sice skoková není, ale vede k **odlišné závislosti výstupu systému na parametrech**, což může znamenat např. dichotomii v měřených datech apod.

Jednparametrická bifurkace spojitého systému spojená s přechodem reálného vlastního čísla přes 0 je typicky příčinou jednak změny stability rovnováhy, ale hlavně změny **počtu rovnováh**.

- **fold bifurkace** je typicky příčinou **skokové změny** v dynamice systému, kdy ustálený stav (stabilní rovnováha) při malé změně parametru pod kritickou hodnotu zanikne a systém reaguje velkou změnou stavových hodnot
- **transkritická bifurkace** je typicky příčinou změny v dynamice systému, která sice skoková není, ale vede k **odlišné závislosti výstupu systému na parametrech**, což může znamenat např. dichotomii v měřených datech apod.
- **vidličková bifurkace** je generická v symetrických systémech, kde hraje stejnou roli, jako transkritická, kromě toho je příčinou **vzniku větvení**



Vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **biochemický přepínač**.

Vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **biochemický přepínač**.

Modelová (velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce:

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1+g^2} - k_2 g$$

Vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **biochemický přepínač**.

Modelová (velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce:

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1+g^2} - k_2 g$$

Protein vzniká autokatalytickou reakcí, která zde není popsána, ale můžete se podívat na **Hillovu rovnici**. Jde o popis kinetiky o něco složitější reakce, než je **enzymatická kinetika Michaelise–Mentenové**.

Vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **biochemický přepínač**.

Modelová (velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce:

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1+g^2} - k_2 g$$

Protein vzniká autokatalytickou reakcí, která zde není popsána, ale můžete se podívat na **Hillovu rovnici**. Jde o popis kinetiky o něco složitější reakce, než je **enzymatická kinetika Michaelise–Mentenové**.

Zavedeme novou proměnnou  $x(t) = g\left(\frac{t}{k_1}\right)$  a označíme  $a = \frac{k_2}{k_1}$ . Pak:

Vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **biochemický přepínač**.

Modelová (velmi zjednodušená) rovnice produkce genetického proteinu v buňce:

$$\dot{g} = k_1 \frac{g^2}{1+g^2} - k_2 g$$

Protein vzniká autokatalytickou reakcí, která zde není popsána, ale můžete se podívat na **Hillovu rovnici**. Jde o popis kinetiky o něco složitější reakce, než je **enzymatická kinetika Michaelise–Mentenové**.

Zavedeme novou proměnnou  $x(t) = g\left(\frac{t}{k_1}\right)$  a označíme  $a = \frac{k_2}{k_1}$ . Pak:

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax$$

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax$$

Rovnováha splňuje

$$x \left( \frac{x}{1+x^2} - a \right) = 0.$$

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax$$

Rovnováha splňuje

$$x \left( \frac{x}{1+x^2} - a \right) = 0.$$

Jedna rovnováha je tedy nulová a druhá splňuje

$$a = \frac{x}{1+x^2},$$

můžeme tedy větve rovnováh nakreslit. Zajímají nás pouze kladné hodnoty koncentrace i parametru jako poměru rychlostí reakcí.

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - ax$$

Rovnováha splňuje

$$x \left( \frac{x}{1+x^2} - a \right) = 0.$$

Jedna rovnováha je tedy nulová a druhá splňuje

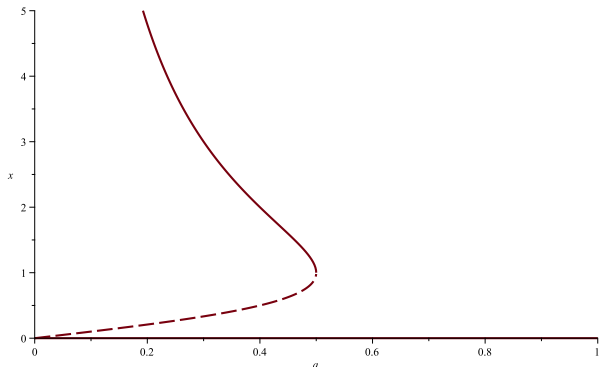
$$a = \frac{x}{1+x^2},$$

můžeme tedy větve rovnováh nakreslit. Zajímají nás pouze kladné hodnoty koncentrace i parametru jako poměru rychlostí reakcí.

Se znalostmi z předchozí kapitoly můžeme ukázat (ukážte!), že  $[0, 0]$  je bod transkritické bifurkace (bod větvení) a bod  $[a^*, x^*] = [\frac{1}{2}, 1]$  je limitní bod (kritická hodnota fold bifurkace).



$$\dot{x} = x \left( \frac{x}{1+x^2} - a \right)$$



Překročí-li tedy  $a = \frac{k_2}{k_1}$  kritickou hodnotu  $\frac{1}{2}$ , gen se přestane produkovat.

Dalším vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **vymírání populací**.

Dalším vzorovým příkladem skokové změny zapříčiněné fold bifurkací je **vymírání populací**.

Používané rovnice pro modelování velikosti (hustoty) populace jsme si již uvedli a dokonce jsme si ukázali příklad vymírání na modelu s Alleeho efektem:

$$\dot{x} = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - Ex.$$

## Domácí úkol:

Použijte teorii bifurkací k analýze modelu lovu v populaci s Alleeho efektem:

$$\dot{x} = f(x, E) =$$

$$= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{A} - 1\right) - Ex.$$

Návod: fold bifurkace nastává pro  $E^*$  a  $x^*$  splňující:  
 $f(x, E) = 0$  a  $f_x(x, E) = 0$ .

## Model výlovu s logistickým růstem:

Uvažujme konstantně lovenou populaci (např. tuňáků) modelovanou logistickou rovnicí

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h = f(x, h)$$

s mírou růstu  $r > 0$ , výlovem  $h > 0$  a kapacitou prostředí  $K > 0$ .

## Model výlovu s logistickým růstem:

Uvažujme konstantně lovenou populaci (např. tuňáků) modelovanou logistickou rovnicí

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h = f(x, h)$$

s mírou růstu  $r > 0$ , výlovem  $h > 0$  a kapacitou prostředí  $K > 0$ .

Výlov  $h$  je parametrem, který ovlivňuje existenci rovnovážného stavu

$$x_{1,2}^* = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{hK}{r}}.$$

## Model výlovu s logistickým růstem:

Uvažujme konstantně lovenou populaci (např. tuňáků) modelovanou logistickou rovnicí

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h = f(x, h)$$

s mírou růstu  $r > 0$ , výlovem  $h > 0$  a kapacitou prostředí  $K > 0$ .

Výlov  $h$  je parametrem, který ovlivňuje existenci rovnovážného stavu

$$x_{1,2}^* = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{hK}{r}}.$$

Bifurkace typu fold nastává v případě, že pro rovnovážný bod v kritické hodnotě parametru platí

$$f_x(x^*, h^*) = r - \frac{2r}{K}x^* = 0,$$

tj. pokud platí

$$x^* = \frac{K}{2},$$

což je právě splynutí rovnováh  $x_1$  a  $x_2$  v jedinou.

To nastává pro kritickou hodnotu parametru  $h$ :

$$h^* = \frac{rK}{4}.$$

Protože  $f_{xx} = -\frac{2r}{K} \neq 0$  a  $f_h = -1 \neq 0$ , jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transversality bifurkace typu fold.

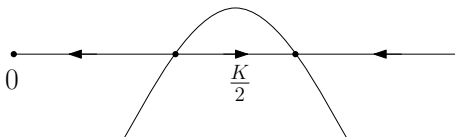


To nastává pro kritickou hodnotu parametru  $h$ :

$$h^* = \frac{rK}{4}.$$

Protože  $f_{xx} = -\frac{2r}{K} \neq 0$  a  $f_h = -1 \neq 0$ , jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transversality bifurkace typu fold.

Pokud výlov překročí tuto prahovou hodnotu  $h^*$ , populace nutně vymře.



## Model excitace neuronu:

Nejjednodušší model toku  $\text{Na}^+$  do neuronu přes buněčnou membránu je rovnice

$$\dot{x} = kx(a - x)(x - 1) + i,$$

kde  $x$  je normalizované membránové napětí (potenciál) excitabilní buňky,  $k > 0$  ovlivňuje rychlost odpovědi a  $a \in (0, 1)$  je práh mezi elektrickým klidem a vzruchem. Parametr  $i$  je elektrický proud, který prochází membránou - vnější buzení.

## Model excitace neuronu:

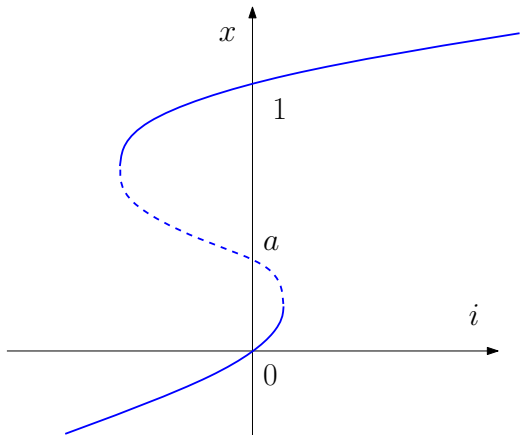
Nejjednodušší model toku  $\text{Na}^+$  do neuronu přes buněčnou membránu je rovnice

$$\dot{x} = kx(a - x)(x - 1) + i,$$

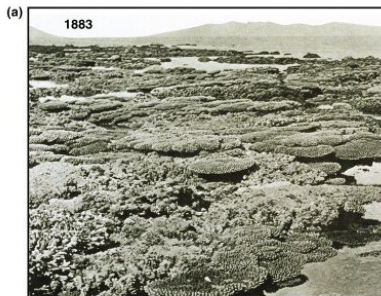
kde  $x$  je normalizované membránové napětí (potenciál) excitabilní buňky,  $k > 0$  ovlivňuje rychlost odpovědi a  $a \in (0, 1)$  je práh mezi elektrickým klidem a vzruchem. Parametr  $i$  je elektrický proud, který prochází membránou - vnější buzení.

Větev rovnováh  $i = kx(x - a)(x - 1)$  má vždy dva limitní body. Viz [neuron.mw](#).

Rovnováhy pak můžeme nakreslit v závislosti na parametru  $i$  podle vztahu  $i = kx(x - a)(x - 1)$ . Dva limitní body i stabilita jsou v tomto modelu „vidět“. Fold bifurkace pak vysvětluje jev, kdy excitabilita neuronu je skoková změna napětí způsobená překročením hraničního prahu vstupního proudu. Do tohoto prahu neuron neodpovídá.



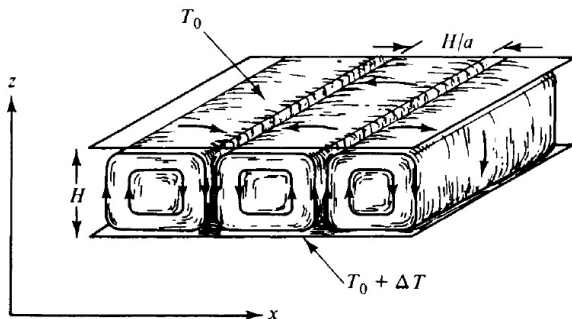
Přestože to není typické, i transkritická bifurkace může být příčinou skokové změny. Uvedme zde **model zániku korálových útesů**.



*TRENDS in Ecology & Evolution*

Tento model si ukážeme na cvičení.

Jako příklad vidličkové bifurkace si ukážeme slavný **Lorenzův model**. Nebudeme se ale zabývat oblastí, kde vzniká Lorenzův chaotický atraktor, ale oblastí, kde dochází k zániku jediné stabilní rovnováhy, která odpovídá stacionárnímu rozložení teplot mezi teplejší zemí a studenější horní vrstvou atmosféry a vzniku konvekčního proudění.



## Lorenzův model

Rovnice popisující proudění vznikající vedením tepla si uvádět nebudeme (jde o parciální diferenciální rovnice). Anglický fyzik John William Strutt, 3. baron Rayleigh ukázal, že pokud

$$R \equiv \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa} > R_c \equiv \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2},$$

vznikají periodická řešení těchto PDR. Číslo  $R$  se proto nazývá Rayleighovo číslo, kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\alpha$  tepelná roztažnost,  $\nu$  viskozita a  $\kappa$  tepelná vodivost kapaliny.

## Lorenzův model

Rovnice popisující proudění vznikající vedením tepla si uvádět nebudeme (jde o parciální diferenciální rovnice). Anglický fyzik John William Strutt, 3. baron Rayleigh ukázal, že pokud

$$R \equiv \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa} > R_c \equiv \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2},$$

vznikají periodická řešení těchto PDR. Číslo  $R$  se proto nazývá Rayleighovo číslo, kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\alpha$  tepelná roztažnost,  $\nu$  viskozita a  $\kappa$  tepelná vodivost kapaliny.

Jak se zvyšuje rozdíl teplot povrchů  $\Delta T$ , vedení tepla se stává nestabilní a vzniká cirkulace kapaliny. Můžete ho sledovat v hrnku horké kávy jako **tmavé skvrny...**



## Lorenzův model

Rovnice popisující proudění vznikající vedením tepla si uvádět nebudeme (jde o parciální diferenciální rovnice). Anglický fyzik John William Strutt, 3. baron Rayleigh ukázal, že pokud

$$R \equiv \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa} > R_c \equiv \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2},$$

vznikají periodická řešení těchto PDR. Číslo  $R$  se proto nazývá Rayleighovo číslo, kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\alpha$  tepelná roztažnost,  $\nu$  viskozita a  $\kappa$  tepelná vodivost kapaliny.

Jak se zvyšuje rozdíl teplot povrchů  $\Delta T$ , vedení tepla se stává nestabilní a vzniká cirkulace kapaliny. Můžete ho sledovat v hrnku horké kávy jako **tmavé skvrny...**

Zjednodušený model pohybu atmosféry uveřejnil v roce 1963 Edward Lorenz. Model potvrzuje nejen Rayleighovy výsledky, ale ukazuje vznik turbulencí.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= r x - y - x z, \\ \dot{z} &= -b z + x y,\end{aligned}$$

- $x(t)$ : rychlost rotace konvekčního proudění
- $y(t)$ : rozdíl teplot spodní a horní vrstvy
- $z(t)$ : odchylka teploty od její střední hodnoty

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= r x - y - x z, \\ \dot{z} &= -b z + x y,\end{aligned}$$

- $x(t)$ : rychlost rotace konvekčního proudění
- $y(t)$ : rozdíl teplot spodní a horní vrstvy
- $z(t)$ : odchylka teploty od její střední hodnoty

a parametry jsou

- $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ : Prandtlovo číslo (kinematická viskozita/součinitel teplotní vodivosti),
- $r = \frac{R}{R_c} \sim$  **Rayleighovo číslo**,
- $b = \frac{4}{(1+a^2)} \sim$  šířka / délka konvekční buňky

## Úkol:



Ukažte, že pro  $r < 1$  má systém jedinou stabilní rovnováhu, která fyzikálně odpovídá systému bez proudění (vyrovnání teplot) a  $r = 1$  je bod symetrického větvení. V MATCONTU ověřte, že jde o bod vidličkové bifurkace.

Pro při přechodu přes  $r = 1$  (zvýšením rozdílu teplot horního a dolního povrchu  $\Delta T$ ) dochází v systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

k vzniku dvou stabilních stavů z nulového stavu  $x = 0$ . Ten odpovídá nulové rychlosti rotace konvekčního proudění, teplota je stacionárně rozložena mezi spodní a horní vrstvou (viz stacionární řešení rovnice vedení tepla pro Dirichletovu okrajovou podmínku v předmětu profesora Pospíšila **PřF:M6868 Spojité deterministické modely II** ). Nově vzniklé stabilní stavy  $x = \pm\sqrt{b(r - 1)}$  odpovídají konvekčnímu proudění o rotaci proti směru a ve směru hodinových ručiček. Vznikají tedy konvekční proudění oběma směry o stejné rychlosti.

## Bifurkace SNIPER a synchronizace

Poslední významnou aplikací fold bifurkace je Saddle-Node Infinite PERiod bifurkace – SNIPER.

## Bifurkace SNIPER a synchronizace

Poslední významnou aplikací fold bifurkace je Saddle-Node Infinite PERiod bifurkace – SNIPER.

Uvažujme spojitý systém popsaný v polárních souřadnicích systémem

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= \omega - \sin \theta.\end{aligned}$$



## Bifurkace SNIPER a synchronizace

Poslední významnou aplikací fold bifurkace je Saddle-Node Infinite PERiod bifurkace – SNIPER.

Uvažujme spojitý systém popsáný v polárních souřadnicích systémem

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = \omega - \sin \theta.$$

Má rovnovážný bod  $r = 0, \theta = 0$ , který je nestabilní.

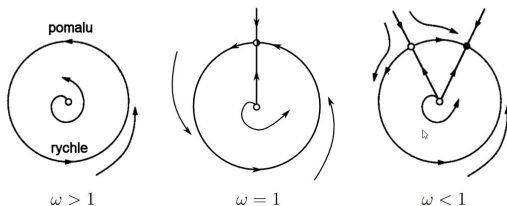
## Bifurkace SNIPER a synchronizace

Poslední významnou aplikací fold bifurkace je Saddle-Node Infinite PERiod bifurkace – SNIPER.

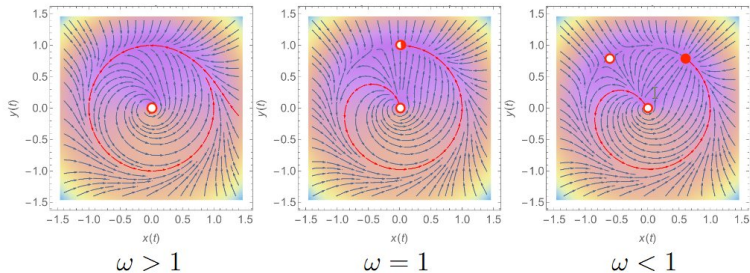
Uvažujme spojitý systém popsáný v polárních souřadnicích systémem

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= \omega - \sin \theta.\end{aligned}$$

Má rovnovážný bod  $r = 0, \theta = 0$ , který je nestabilní. Pro  $r = 1$  může existovat rovnováha odpovídající cyklu, která zaniká fold bifurkací pro kritickou hodnotu  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ .



Kritický bod této bifurkace pak dává vzniknout cyklu s nekonečně dlouhou periodou, odtud její název. Fázový portrét vypadá takto:



Tento typ bifurkace stojí za jevem, kterému říkáme **synchronizace**.

Tento typ bifurkace stojí za jevem, kterému říkáme **synchronizace**.

Představte si dva běžce na oválu (nebo taky oscilující neurony, rotující vesmírná tělesa, děti na houpačce, hodiny na stěně nebo metronomy na společné základně). Každý má svou úhlovou rychlost  $\omega_1$  a  $\omega_2$  a jeho pozice na oválu (fáze) je dána rovnicí

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Neznají se, nekomunikují spolu. Běží (oscilují) svou vlastní frekvencí.

Pokud se ale běžci znají a chtějí spolu komunikovat, upraví svůj běh (oscilaci, rotaci, houpání nebo kývání). Čím blíže k sobě budou, tím víc se budou snažit. Sílu spřažení označme  $\kappa_j$ .

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 - \kappa_1 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 - \kappa_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),\end{aligned}$$

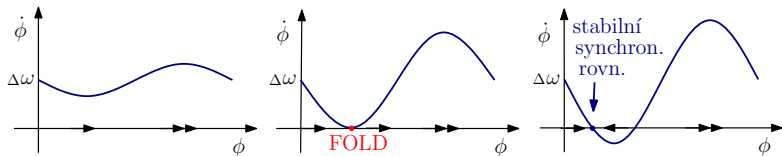
Pokud se ale běžci znají a chtějí spolu komunikovat, upraví svůj běh (oscilaci, rotaci, houpání nebo kývání). Čím blíže k sobě budou, tím víc se budou snažit. Sílu spřažení označme  $\kappa_j$ .

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 - \kappa_1 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 - \kappa_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),\end{aligned}$$

Stavová proměnná  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$  popisující úhlovou vzdálenost mezi běžci (oscilátory) má rovnici

$$\dot{\varphi} = \Delta\omega - (\kappa_1 + \kappa_2) \sin \varphi, \quad \text{kde } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - (\kappa_1 + \kappa_2) \sin \phi$$



Proto vznikne vazba. Pokud bude dost silná, vznikne **stabilní vázaná rotace – synchronizace**. Proto se díváme stále na stejnou přivrácenou stranu Měsíce a máme štěstí, že vázaná rotace nevznikla mezi Sluncem a Zemí, protože jsme dostatečně daleko.



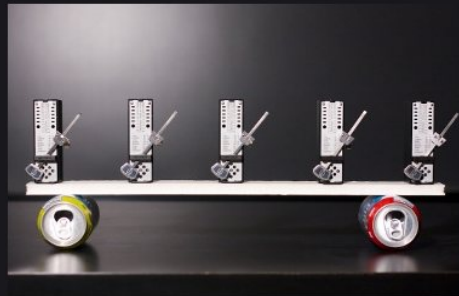
## Úkol:



Vyzkoušejte si synchronizaci  
na metronomech.

V reálu

i **v Maplu.**



# Hystereze a cusp bifurkace



## Co se naučíme:

- porozumět bistabilitě a jevu hystereze

## Co se naučíme:

- porozumět bistabilitě a jevu hystereze
- pochopit pojem varieta rovnováh ve dvouparametrickém systému

## Co se naučíme:

- porozumět bistabilitě a jevu hystereze
- pochopit pojem varieta rovnováh ve dvouparametrickém systému
- popsat dvouparametrickou cusp bifurkaci

## Co se naučíme:

- porozumět bistabilitě a jevu hystereze
- pochopit pojem varieta rovnováh ve dvouparametrickém systému
- popsat dvouparametrickou cusp bifurkaci
- použít znalosti o cusp bifurkaci na praktických úlohách

Hystereze je jev, kdy dynamický systém vykazuje jakousi paměť.

Hystereze je jev, kdy dynamický systém vykazuje jakousi paměť.

V deterministickém systému bez hystereze je možné předpovědět výstup pouze v závislosti na čase, v systému s hysterezí to nelze, kromě času musíme znát i "cestu" vstupu, tedy trajektorii, kterou vstup prošel, než dosáhl určité hodnoty.

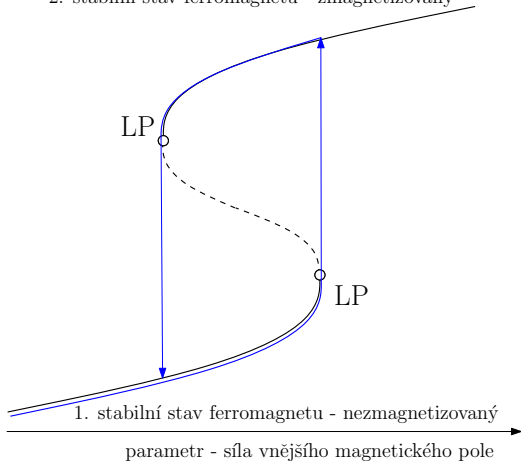


Hystereze je jev, kdy dynamický systém vykazuje jakousi paměť.

V deterministickém systému bez hystereze je možné předpovědět výstup pouze v závislosti na čase, v systému s hysterezí to nelze, kromě času musíme znát i "cestu" vstupu, tedy trajektorii, kterou vstup prošel, než dosáhl určité hodnoty.

Hystereze vykazuje typicky zpoždění při návratu do původního stavu. Známá je hystereze u feromagnetických materiálů, které po vystavení magnetickému poli vykazují nějakou dobu magnetické vlastnosti, poté dojde k zániku vnitřního magnetického pole. Tento jev se ale objevuje i v jiných oborech - biologii, medicíně, ekonomii apod.

2. stabilní stav ferromagnetu - zmagnetizovaný



## Model populace obaleče *Choristoneura Occidentalis* Spruce Budworm Model

V roce 1978 byl vytvořen model populace obaleče, který je v Kanadě škůdcem jehličnatých lesů. V 30-40tiletém cyklu se obaleč přemnoží tak, že zcela zničí lesy. Model umožnil pochopit dynamiku populace obaleče a mechanismus vzniku skokových změn, kdy dochází k jeho přemnožení. Na základě modelu je možné populaci obaleče ukontrolovat.

Model obaleče nám bude sloužit jako modelový systém pro vysvětlení jevu hystereze a její souvislosti s bistabilitou a cusp bifurkací.

Populace obaleče bude modelována logistickým modelem růstu

$$\dot{N} = r_B N \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

kde  $N$  je populace,  $r > 0$  míra růstu populace a  $K > 0$  kapacita prostředí (v případě obaleče je dána hustotou jehličí). Funkce predace ptáky  $p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$  (analyzujte průběh funkce), která má sigmoidní charakter ( $A, B > 0$ ),  $r_B > 0$  je specifická míra růstu a parametry  $A > 0$ ,  $B > 0$  souvisí s efektivitou lovu.  $A$  s časem, který je k lovu potřebný a  $B$  s množstvím. Čím více bude obaleče na stromech, tím bude  $A$  menší a  $B$  větší.

V této rovnici lze zmenšit počet parametrů (změnou měřítka populace a času) substitucí  $x = \frac{N}{A}$ ,  $\tau = \frac{Bt}{A}$ ,  $r = \frac{Ar_B}{B}$ ,  $q = \frac{K}{A}$  a dostaneme tak

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{q} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

V této rovnici lze zmenšit počet parametrů (změnou měřítka populace a času) substitucí  $x = \frac{N}{A}$ ,  $\tau = \frac{Bt}{A}$ ,  $r = \frac{Ar_B}{B}$ ,  $q = \frac{K}{A}$  a dostaneme tak

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{q} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Všimněte si, že  $r$  i  $q$  roste s dostupností kořisti.

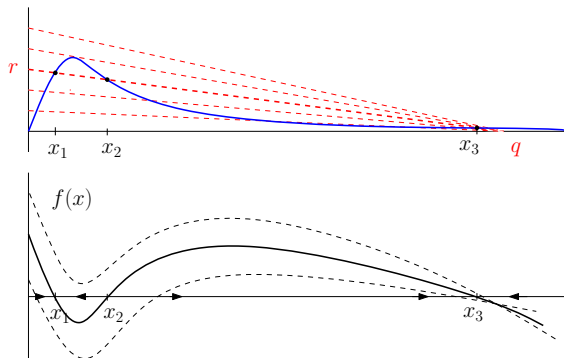
V této rovnici lze zmenšit počet parametrů (změnou měřítka populace a času) substitucí  $x = \frac{N}{A}$ ,  $\tau = \frac{Bt}{A}$ ,  $r = \frac{Ar_B}{B}$ ,  $q = \frac{K}{A}$  a dostaneme tak

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{q} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Všimněte si, že  $r$  i  $q$  roste s dostupností kořisti. Je zřejmé, že  $x = 0$  je nestabilní rovnováha (proč?). Další rovnovážné body splňují rovnici

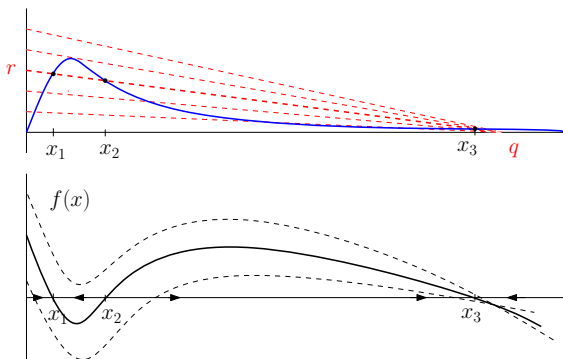
$$r \left( 1 - \frac{x}{q} \right) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Graficky můžeme rovnovážné body najít jako průsečíky přímky s nelineární křivkou:



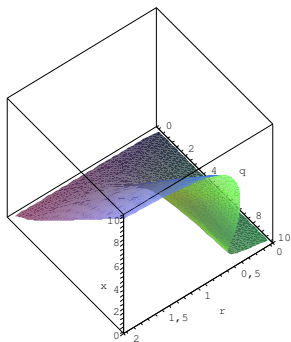


Graficky můžeme rovnovážné body najít jako průsečíky přímky s nelineární křivkou:



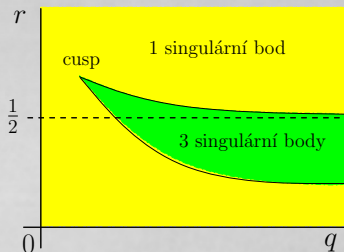
Je zřejmé, že v případě vyznačeném na obrázku jsou nenulové rovnováhy tři, vnější dvě stabilní, vnitřní nestabilní. Při malé změně parametrů může dojít k zániku jednoho z těchto rovnováh. Při zániku bodu  $x_1$  tedy dochází i při relativně nízké velikosti populace k prudkému přemnožení, které navíc vykazuje hysterезi.

Varietu odpovídající rovnovážným bodům můžeme zobrazit závisle na obou parametrech -  $r$  a  $q$ .



Tento typický ohyb (fold - přeložení) se nazývá katastrofa bodu vratu - cusp katastrofa. Jde o bifurkaci dvouparametrickou. Schéma bifurkačního diagramu se v takovém případě zakresluje do prostoru parametrů, který je bifurkačními hranicemi (odpovídají limitním bodům bifurkace fold) rozdělen na strukturálně stabilní oblasti, tj. oblasti s topologicky ekvivalentními fázovými portréty.

## Úkol:



Analyzujte model v programu XPPAUT a vykreslete bifurkační diagram pomocí jeho podprogramu AUTO nebo v programu MATCONT.

Zkuste **interaktivní aplet**.

Je vidět, že jev hystereze, který jsme viděli úzce souvisí s vznikem dvou stabilních atraktorů. V příkladu modelu biotopu korálových útesů a řas jsme se s hysterezí potkali také – šlo o případ dvou transkritických bifurkací, kdy stabilní větve rovnováh pro určité parametry vznikaly resp. zanikaly.

Existence dvou nebo více stabilních atraktorů v dynamickém systému pro jisté parametry se nazývá **bistabilita** resp. **multistabilita**. Nejčastějším případem, kdy takový jev vzniká je okolí bifurkace typu cusp.

## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální dvouparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde  $f$  je hladká funkce, má pro  $\alpha = \alpha_0$  rovnováhu  $x = x_0$  a platí  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$ ,  $f_{xx}(x_0, \alpha_0) = 0$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$f_{xxx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

$$(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transverzality.}$$

Pak je uvedený nelineární systém v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **bifurkace bodu vratu - cusp**

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3$$

Rovnovážné body leží na varietě

$$M : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0,$$

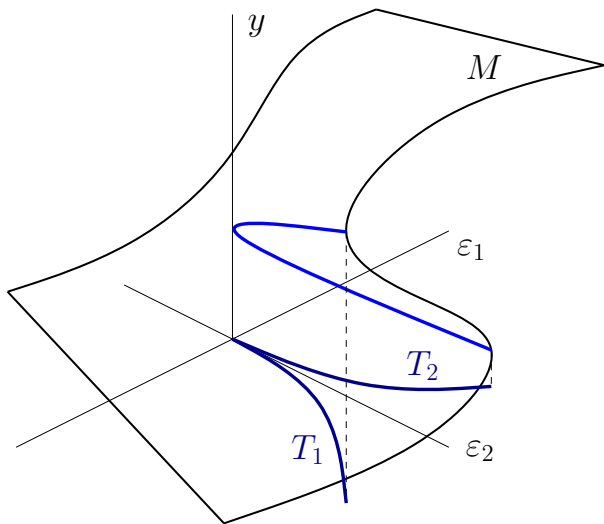
přitom nulová první derivace, tedy podmínka pro bifurkaci typu fold (sedlo-uzel) je splněna na křivce splňující navíc

$$\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0.$$

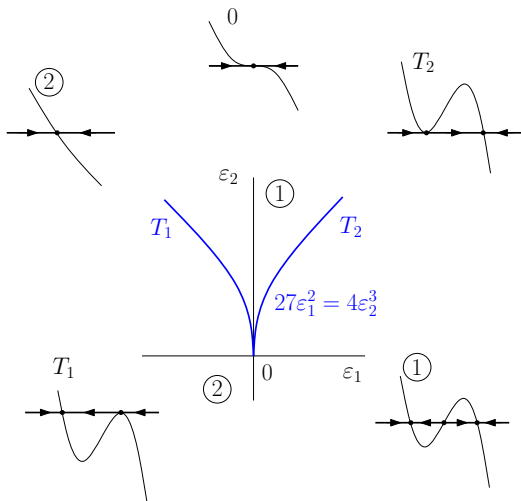
Pokud z těchto dvou rovnic vyloučíme  $y$ , dostaneme křivku typického tvaru V

$$27\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_2^3 = 0$$

s bodem vratu v počátku.



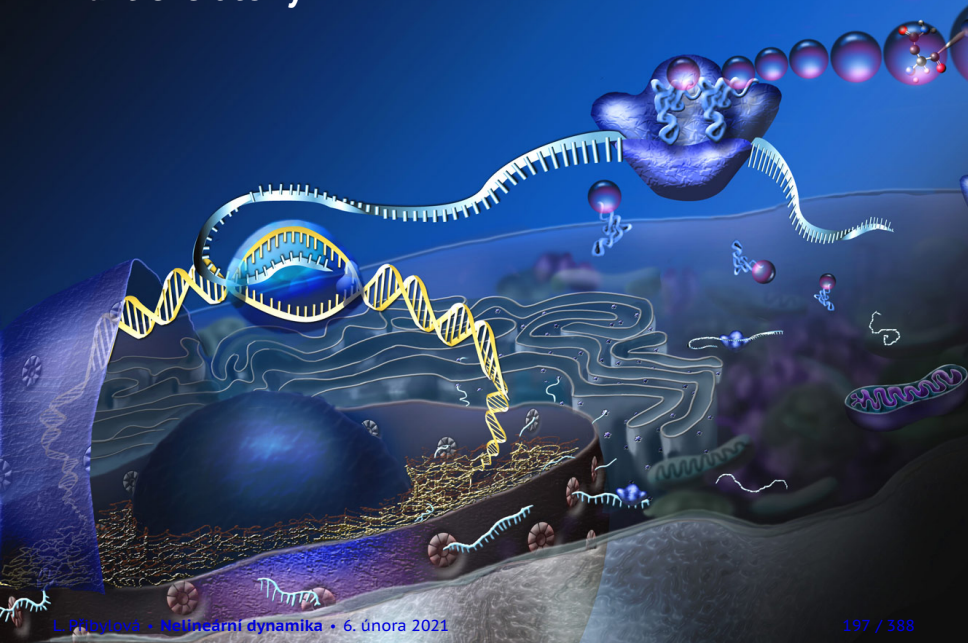
Jednotlivé větve  $T_1$ ,  $T_2$  odpovídají zánikům dvojice rovnovážných bodů v ohybech variety  $M$ , tedy jsou to bifurkační hranice bifurkace fold (LP). Bifurkace bodu vratu (cusp) implikuje vznik hystereze.



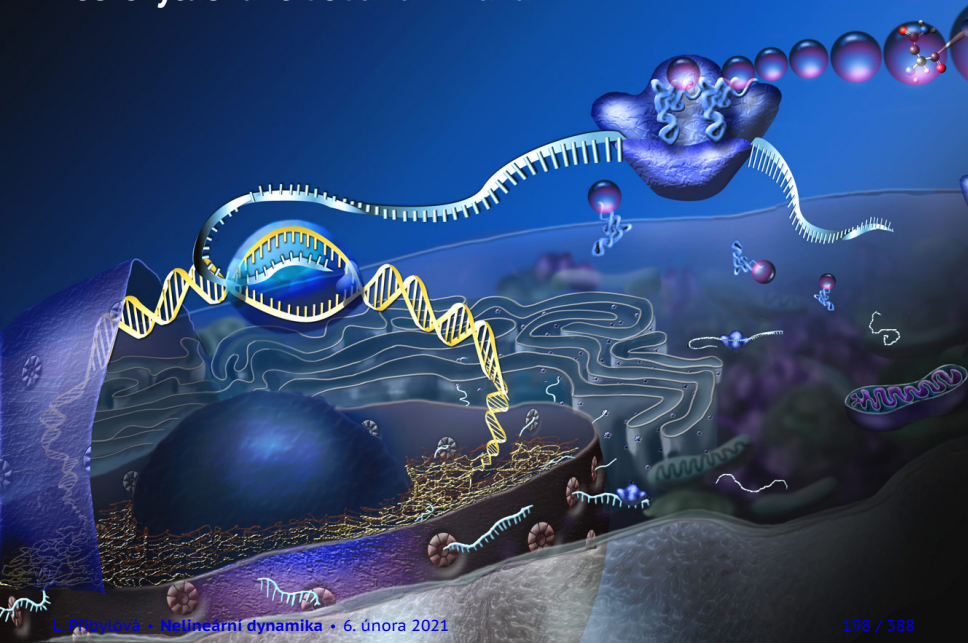


Oblasti označené 1 a 2 jsou strukturálně stabilní oblasti, ve kterých má systém 3 resp. jedinou rovnováhu.  $T_1$  a  $T_2$  odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold, jsou to hranice kodimenze 1 v 2-rozměrném prostoru parametrů. Jejich průnikem je bod vratu, který má dimenzi 0, tedy kodimenzi 2 v 2-rozměrném prostoru parametrů.

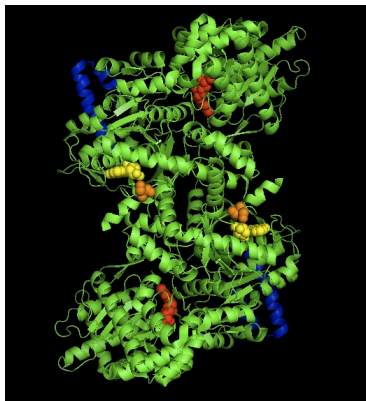
# Praktické úlohy



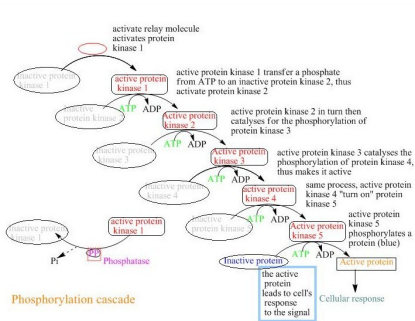
# Fosforylaci aktivovaná kináza



# Fosforylační aktivovaná kináza



**Kinázy** (nejčastěji proteinkinázy) jsou enzymy, které se účastní širokého spektra buněčných pochodů, jako je regulace exprese genů, mitóza, buněčná diferenciace a proliferace nebo i programovaná buněčná smrt.



V reálných dějích jde o několikastupňovou fosforylační kaskádu kináz, v níž v každém kroku předcházející kináza aktivuje tu následující.

Jednparametrický model této nejjednodušší struktury, která umožňuje vznik genetické změny vlastní aktivitou, jsme si již jako typický biochemický přepínač ukázali. Teď se na model podíváme blíže. Jde o model samostatné fosforylací aktivované kinázy, která je transkripčním faktorem pozitivně regulujícím vlastní expresi v rámci genomu:

$$\dot{X} = k_0 + \frac{V_m X^2}{K_m^2 + X^2} - k_d X,$$

kde  $X \in \mathbb{R}$  kvantifikuje aktivitu kinázy a  $k_0$ ,  $V_m$ ,  $K_m$  a  $k_d$  jsou kladné parametry. Parametr  $k_0$  odpovídá bazální (autonomní) produkci kinázy nezávisle na aktivitě  $X$ , druhý člen  $\frac{V_m X^2}{K_m^2 + X^2}$  odpovídá genové expresi probíhající skrze transkripci a translaci v případě genetické změny fosforylací v biochemické signalizaci (Hillova funkce). Třetí člen  $k_d X$  odpovídá rozkladu proteinu (transkripčního faktoru), defosforylací.

Substitucí  $x = k_d X$  a reparametrizací času  $\tau = \frac{V_m}{K_m} t$  dostáváme rovnici

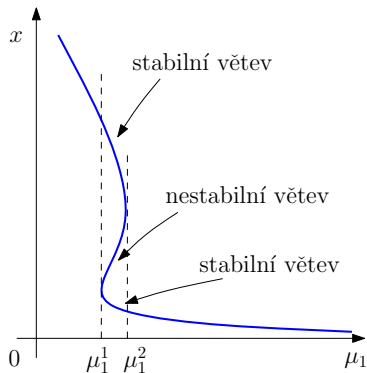
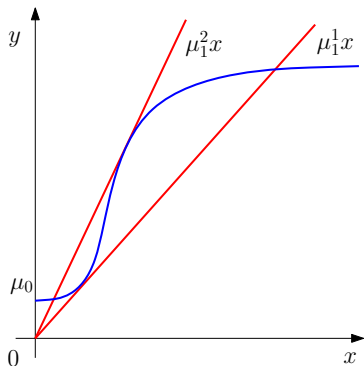
$$\frac{dx}{d\tau} = \mu_0 + \frac{x^2}{1+x^2} - \mu_1 x$$

s bezrozměrnými parametry  $\mu_0 = \frac{k_0}{V_m}$ ,  $\mu_1 = \frac{k_d K_m}{V_m}$ .  
Rovnovážné body musí splňovat

$$\mu_0 + \frac{x^2}{1+x^2} = \mu_1 x.$$

Analýzu průběhu funkce  $y = \mu_0 + \frac{x^2}{1+x^2}$  zjistíme, že jde v kladných hodnotách o esovitou křivku s inflexním bodem  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Jde navíc o funkci omezenou asymptotou  $y = 1 + \mu_0$ .

Pro jisté hodnoty  $\mu_1 \in (\mu_1^1, \mu_1^2)$  bude mít systém tři rovnovážné body a vně tohoto intervalu jen jeden rovnovážný bod. Díky bistabilitě bude docházet k biochemickému přepínači na základě změny hodnot parametrů  $V_m$ ,  $K_m$  a  $k_d$  ovlivňujících  $\mu_1$ . K transkripci genu tak dojde až po přepnutí na vysokou hladinu aktivní kinázy.





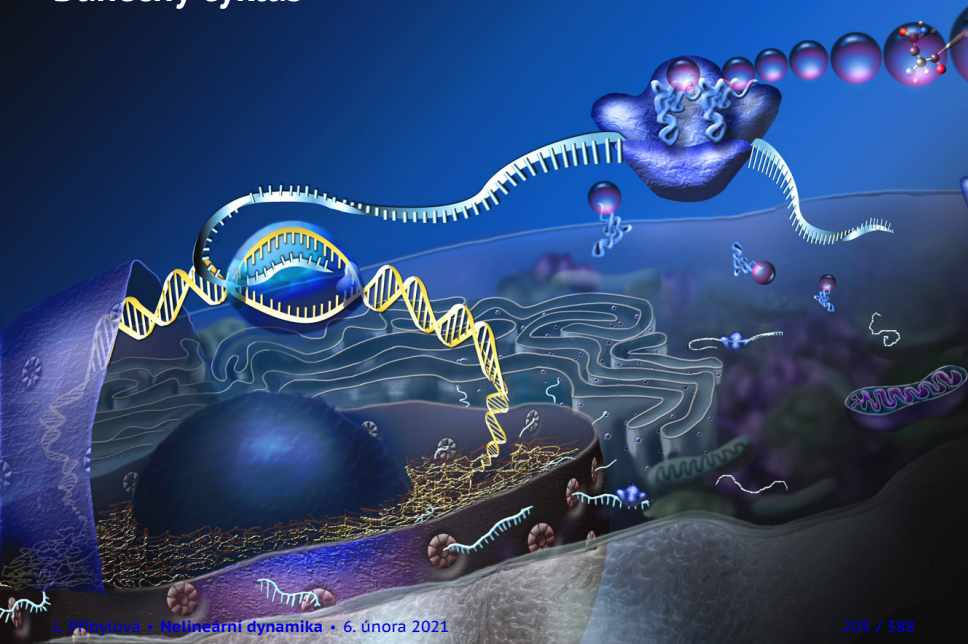
## Úkol:

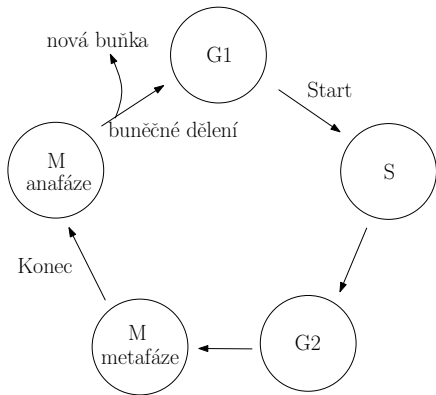
Analyticky najděte kritickou hodnotu cusp bifurkace systému

$$\dot{x} = \mu_0 + \frac{x^2}{1+x^2} - \mu_1 x$$

a v programu MATCONT vykreslete bifurkační diagram v prostoru parametrů  $\mu_0$  a  $\mu_1$ . Vysvětlete výsledek vzhledem k jevu biochemického přepínače. .

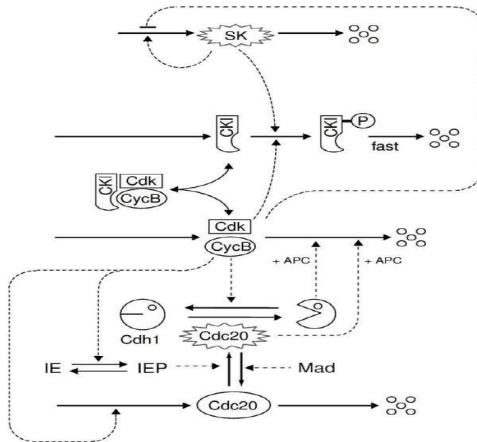
# Buněčný cyklus





G1 – růstová fáze nové buňky  
 S – duplikace chromozomů  
 G2 – růstová fáze pro zdvojení  
 M – mitóza

- Jedním z cílů současné molekulární biologie je vysvětlit fyziologii proliferace eukaryotické buňky.
- Procesy uvnitř buňky jsou řízené systémem signálů, jehož centrálními prvky jsou tzv. cyklin-dependentní kinázy (Cdk).
- Ve fázi G1 se v buňce vyskytuje pouze malé množství cyklinů aktivujících tvorbu Cdk, a tyto cykliny jsou rychle odbourávány. Aktivita Cdk je prakticky nulová.
- Ve fázi S-G2-M je zamezeno jeho odbourávání, což vede k výraznému nárůstu aktivity Cdk, vysoká hladina Cdk je potřebná pro replikaci DNA, kondenzaci chromozomů a tvorbu dělicího vřeténka. Na Konci je aktivován komplex proteinů APC, který určí, které proteiny mají být dále odbourány. APC se skládá z komplexu asi 12 polypeptidů a 2 pomocných bílkovin – Cdc20 a Cdh1. Tyto 2 proteiny reagují na proměnnou koncentraci cyklinu/Cdk odlišně: její zvýšení vede k aktivaci Cdc20 a odbourávání Cdh1.



$$\frac{dx}{dt} = k_1 - (k'_2 + k''_2 y)x, \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(k'_3 + k''_3 A)(1 - y)}{J_3 + 1 - y} - \frac{k_4 mxy}{J_4 + y}. \quad (21)$$

Zde  $x$  a  $y$  představují koncentrace dimeru cyklin B/Cdk a komplexu aktivního Cdh1/APC. Hodnoty  $k_i$  jsou rychlostní konstanty,  $J_i$  Michaelisovy konstanty,  $m$  je hmotnost buňky a  $A$  je parametr závislý na dalších interakcích. Členy v rovnici (20) představují tvorbu a odbourávání CycB, přičemž rychlost odbourávání CycB je závislá na aktivitě Cdh1 (za předpokladu, že je hodně APC). Předpokládáme, že molekuly cyklinu B se rychle kombinují s nadbytečným Cdk, takže nemusíme sledovat monomery CycB a Cdk. Členy v rovnici (21) reprezentují aktivaci a odbourávání Cdh1. Předpokládáme, že celková koncentrace Cdh1 je konstantní a normovaná (rovna jedné), tedy i komplex aktivního Cdh1/APC označený  $y$  musí splňovat  $y \in (0, 1)$  a dále také  $J_3, J_4 \ll 1$ .

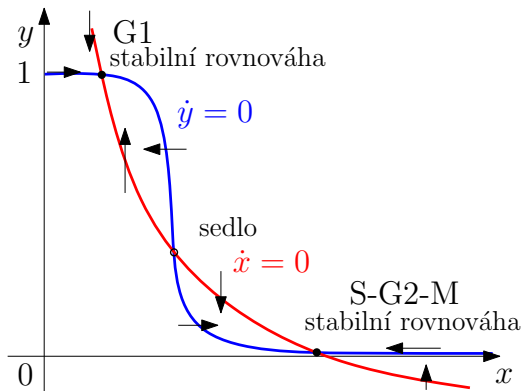
Rovnovážné body leží na průsečících nulklin daných rovnicemi

$$\text{nulklina } \frac{dx}{dt} = 0 : \quad x = \frac{k_1}{k_2' + k_2''y},$$

což je v prvním kvadrantu klesající funkce (část hyperboly) a

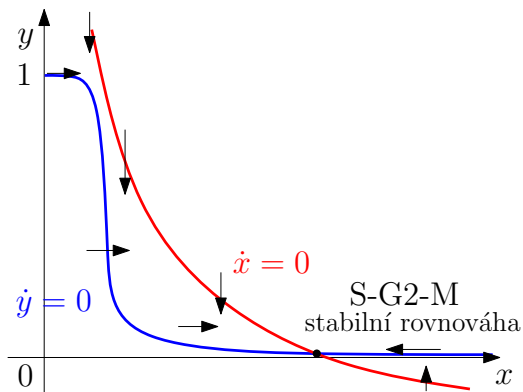
$$\text{nulklina } \frac{dy}{dt} = 0 : \quad x = \frac{p(1-y)(J_4 + y)}{y(J_3 + 1 - y)},$$

kde  $p = \frac{k_3' + k_3''A}{k_4m}$ . Tato funkce má průsečík s osou  $y$  v bodě  $[0, 1]$  a má asymptotu  $y = 0$  pro  $x \rightarrow \infty$ . Pokud bychom provedli analýzu průběhu této funkce v prvním kvadrantu, zjistili bychom, že v závislosti na parametrech jde o více či méně esovitě prohnutou křivku.



Obrázek: Fázový portrét systému (20), (21) pro malou hmotnost buňky  $m$ .





**Obrázek:** Fázový portrét systému (20), (21) pro vyšší než kritickou hmotnost buňky  $m$ .

- Pro malou, čerstvě vzniklou buňku ve fázi G1 je kontrolní systém CycB-Cdh1 přitahován ke stabilnímu stavu označenému G1.
- Když buňka roste, narůstá její hmotnost  $m$  a  $p$  klesá. Po jistém čase klesne hodnota  $p$  pod kritickou hodnotu, stav G1 zanikne a kontrolní systém bude přitahován k druhé stabilní rovnováze označené S-G2-M. Vysoká aktivita CycB/Cdk spustí procesy syntézy DNA a mitózy a buňka pokračuje v růstu.
- Když je dokončena replikace DNA a chromozomy jsou správně seřazeny v dělicím vřeténku,  $A$  se náhle zvětší (pro zdůvodnění změn hodnoty parametru  $A$  je třeba sledovat interakce mezi dalšími bílkovinnými strukturami) a dojde k nárůstu hodnoty  $p$ . Buňka se rozdělí (hmotnost se zmenší na polovinu),  $A$  klesne k nule a systém CycB-Cdh1 se vrátí do počátečního stavu.

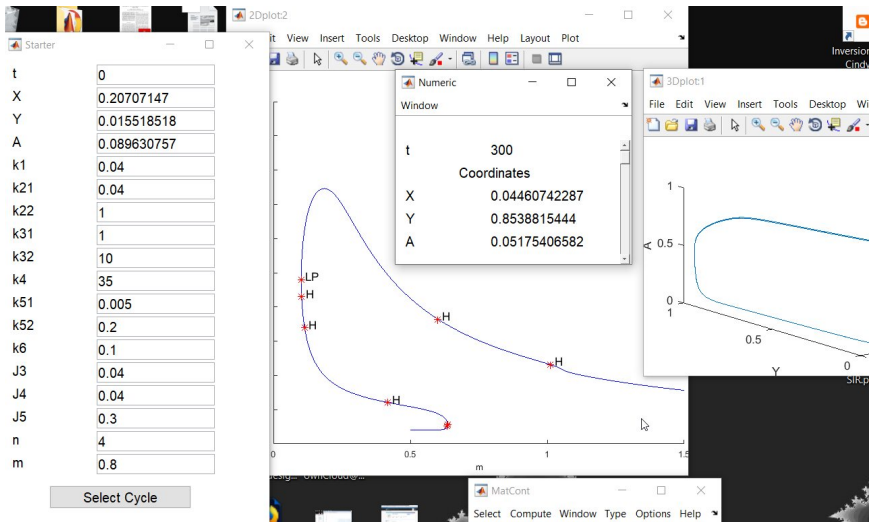
## Úkol:



Analyzujte model buněčného cyklu v programu MATCONT vzhledem k parametru  $m$ . Pokuste se nalézt nějaký bod cusp bifurkace - jako druhý parametr volte aktivátor  $A$ . Ostatní parametry volte takto: **PROSÍM O POSLÁNÍ TEX PODKLADU PRO PARAMETRY - ZKUSTE NEJPRVE 3D MODEL VIZ DÁL a na základě něj vytvořte vhodně toto DÍKY!**

Tento model je velmi zjedodušený.  
Zde najdete **trochu složitější varianty modelu**. Ten trojrozměrný si  
vyzkoušejte v MATCONTu:

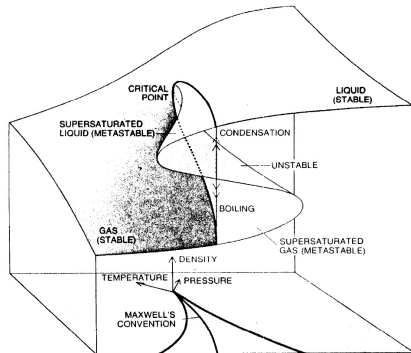
## 7. kapitola Buněčný cyklus



# Další příklady ...



Příklady takovýchto dynamických jevů najdeme v mnohých oblastech. Ve fyzice to může být přechod látky z plynného do kapalného stavu a naopak (stavová proměnná je hustota) v závislosti na teplotě a tlaku (kontrolní bifurkační parametry). Skoková změna je zde var a kondenzace. Při vysokém tlaku již plyn od kapaliny nerozlišujeme - přešli jsme kritický bod vratu.



# Model vznícení





Prostudujte **model vznícení**.

**Zde** hezky česky.

# Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



Psychologie, sociologie ...





## Psychologie, sociologie ...



## Psychologie, sociologie ...



Psychologie, sociologie ...

V kterém obrázku jste uviděli ženu?

Psychologie, sociologie ...

V kterém obrázku jste uviděli ženu? Pátý?

Psychologie, sociologie ...

V kterém obrázku jste uviděli ženu? Pátý? Šestý?

## Psychologie, sociologie ...

V kterém obrázku jste uviděli ženu? Pátý? Šestý? Ne, nevracejte se hned zpět. Tedy vlastně ano. Dívejte se na jev hysterese – váš mozek i při reverzní posloupnosti obrázků vidí ženu mnohem déle.

# Numerické výpočty bifurkačních variet

## Co se naučíme:

- porozumět principu numerických kontinuačních metod



## Co se naučíme:

- porozumět principu numerických kontinuačních metod
- pochopit princip kontinuace větve rovnováh a bifurkační variety

## Co se naučíme:

- porozumět principu numerických kontinuačních metod
- pochopit princip kontinuace větve rovnováh a bifurkační variety
- seznámit se s kontinuačními programy MATCONT a Auto

## Co se naučíme:

- porozumět principu numerických kontinuačních metod
- pochopit princip kontinuace větve rovnováh a bifurkační variety
- seznámit se s kontinuačními programy MATCONT a Auto
- porozumět principu metody Gröbnerových bazí pro polynomiální dynamické systémy

## Co se naučíme:

- porozumět principu numerických kontinuačních metod
- pochopit princip kontinuace větve rovnováh a bifurkační variety
- seznámit se s kontinuačními programy MATCONT a Auto
- porozumět principu metody Gröbnerových bazí pro polynomiální dynamické systémy
- použít metodu Gröbnerových bazí na praktických úlohách

Jak jsme viděli, mnoho praktických úloh vede na řešení úlohy nalezení variety rovnováh v závislosti na parametru. Výpočetní software, který kontinuuje již známou rovnováhu a numerickou metodou aproximuje tuto rovnováhu malým posunem pro blízkou hodnotu parametru, se nazývá **kontinuační**. Podobně kontinuační program umožňuje nalézt kromě řezů varietami rovnováh také řezy některými bifurkačními varietami.

Jak jsme viděli, mnoho praktických úloh vede na řešení úlohy nalezení variety rovnováh v závislosti na parametru. Výpočetní software, který kontinuuje již známou rovnováhu a numerickou metodou aproximuje tuto rovnováhu malým posunem pro blízkou hodnotu parametru, se nazývá **kontinuační**. Podobně kontinuační program umožňuje nalézt kromě řezů varietami rovnováh také řezy některými bifurkačními varietami.

My jsme prozatím pracovali v kontinuačním toolboxu Matlabu pro spojitě systémy MATCONT. Existuje i diskrétní verze MATCONTM – M jako maps, zobrazení. Dále vyzkoušíme AUTO, který je součástí XPP pod Linux, odtud název XPPAUT. Varianta pro XPP pod Windows se jmenuje LOCBIF.

Spojité i diskrétní úloha nalezení rovnováhy v dynamickém systému, který závisí na parametru, vede na úlohu

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0, \quad (22)$$

kde  $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \varepsilon]$ .

Spojité i diskrétní úloha nalezení rovnováhy v dynamickém systému, který závisí na parametru, vede na úlohu

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0, \quad (22)$$

kde  $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \varepsilon]$ .

Ve spojitém systému je  $\mathbf{f}$  přímo pravou stranou rovnice systému  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ , v diskrétním popisuje pevný bod zobrazení  $\mathbf{g}$ , tj.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ . Nejčastěji je systém (22) nelineární úloha a  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je hladká funkce.



Numerické metody pro řešení takové soustavy rovnic se naučíte v předmětu **PřF:M4180 Numerické metody I.** dr. Zelinky. Obecně je princip založen na výpočtu posloupnosti bodů, která aproximuje danou větev rovnováhy, typicky se používá metody prediktor–korektor.

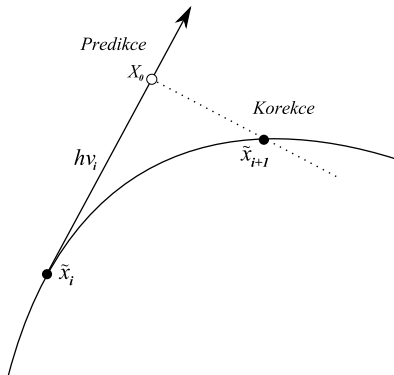
Numerické metody pro řešení takové soustavy rovnic se naučíte v předmětu **PřF:M4180 Numerické metody I.** dr. Zelinky. Obecně je princip založen na výpočtu posloupnosti bodů, která aproximuje danou větev rovnováhy, typicky se používá metody prediktor–korektor.

Nejprve předpokládáme, že jsme našli bod  $\tilde{\mathbf{x}}_i = [\mathbf{x}_i, \varepsilon_i]$ , který leží na požadované větvi rovnováh. Další bod  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = [\mathbf{x}_{i+1}, \varepsilon_{i+1}]$  nalezneme ve dvou krocích:

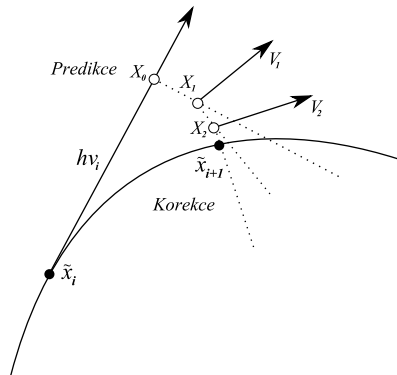
1. **Predikce:** Pro krok  $h > 0$  najdeme

$$\mathbf{X}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_i + h\mathbf{v}_i \quad .$$

2. **Korekce:** Pokud je bod  $\mathbf{X}_0$  blízko rovnovážné větvi, použije se Newtonova metoda, resp. její modifikace tak, abychom našli další bod  $\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$  na rovnovážné větvi.



(a) Kontinuace pseudo-arclength



(b) Mooreova-Penroseova kontinuuace

Vektor  $\mathbf{v}_i$  je vektor rovnoběžný s křivkou rovnováh v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a je tedy řešením úlohy

$$DF(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{v}_i = 0,$$

kde  $DF(\tilde{\mathbf{x}}_i)$  je Jacobiho matice v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a vektor je  $\mathbf{v}_i$  je normalizovaný. Jako normalizační podmínka se může použít  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  nebo  $\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ .

Vektor  $\mathbf{v}_i$  je vektor rovnoběžný s křivkou rovnováh v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a je tedy řešením úlohy

$$DF(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{v}_i = 0,$$

kde  $DF(\tilde{\mathbf{x}}_i)$  je Jacobiho matice v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a vektor je  $\mathbf{v}_i$  je normalizovaný. Jako normalizační podmínka se může použít  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  nebo  $\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ .

Ze startovacího bodu  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  lze kontinuovat dvěma směry, které se určí buď znaménkem  $h = dt$  (AUTO) nebo volbou Forward/Backward (MATCONT).

Vektor  $\mathbf{v}_i$  je vektor rovnoběžný s křivkou rovnováh v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a je tedy řešením úlohy

$$DF(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{v}_i = 0,$$

kde  $DF(\tilde{\mathbf{x}}_i)$  je Jacobiho matice v bodě  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  a vektor je  $\mathbf{v}_i$  je normalizovaný. Jako normalizační podmínka se může použít  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  nebo  $\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ .

Ze startovacího bodu  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  lze kontinuovat dvěma směry, které se určí buď znaménkem  $h = dt$  (AUTO) nebo volbou Forward/Backward (MATCONT).

V případě, že se kontinuační blíží fold bifurkaci, ohyb křivky v bodě LP působí výpočetní problémy. Jacobiho matice  $DF(\tilde{\mathbf{x}}_i)$  není regulární (a je třeba úlohu regularizovat), korekce může křivku rovnováh minout, proto vznikly modifikované metody apod.

Nalezením větve rovnováh pro dynamický systém s několika parametry většinou nezískáme úplný obraz o rovnovážné varietě, ale jen řez. Kontinuujeme totiž rovnovážnou větev v závislosti na jednom parametru. Pokud na větvi rovnováh sledujeme vhodnou účelovou funkci, můžeme detekovat bifurkaci. Fold bifurkace nastává pro spojitý systém v případě, že vlastní číslo přejde přes kritickou hodnotu 0. Kontinuační software toto může detekovat jednoduchým algoritmem – výpočtem hodnoty determinantu matice  $DF(\tilde{x}_i)$ . Při změně znaménka determinantu pak kontinuační software ohlásí fold bifurkaci a bod označí LP. Program MATCONT navíc vypočte hodnoty koeficientů, jejichž znaménka určují typ bifurkace (vzpomeňte si, byly 4).

Nalezením větve rovnováh pro dynamický systém s několika parametry většinou nezískáme úplný obraz o rovnovážné varietě, ale jen řez. Kontinuujeme totiž rovnovážnou větev v závislosti na jednom parametru. Pokud na větvi rovnováh sledujeme vhodnou účelovou funkci, můžeme detekovat bifurkaci. Fold bifurkace nastává pro spojitý systém v případě, že vlastní číslo přejde přes kritickou hodnotu 0. Kontinuační software toto může detekovat jednoduchým algoritmem – výpočtem hodnoty determinantu matice  $DF(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ . Při změně znaménka determinantu pak kontinuační software ohlásí fold bifurkaci a bod označí LP. Program MATCONT navíc vypočte hodnoty koeficientů, jejichž znaménka určují typ bifurkace (vzpomeňte si, byly 4).

Na druhou stranu pokud k systému rovnic (22)  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$  přidáme rovnici  $\det DF(\tilde{\mathbf{x}}_i) = 0$  a využijeme nalezený LP bod jako start pro kontinuaci pomocí dalšího parametru, můžeme nalézt LP křivku ve dvouparametrickém prostoru.



## Úkol:



Otevřete si znovu v MATCONTU model obaleče a prohlédněte si nastavení numeriky během výpočtu rovnováh a obou větví fold bifurkace. Zkuste si zvětšit a zmenšit krok kontinuace, podívejte se na výstupy v hlavním okně Matlabu, kde pro LP bifurkaci dostanete typ normální formy detekovaného LP bodu. Úplný postup najdete v **disertační práci** dr. Veroniky Hajnové, kap. 2.5.

## Úkol:



Model obaleče si vykoušejte také v XPP v AUTO, **návod** naleznete na stránce prof. Ermentrouta.

## Nalezení variety rovnováh a fold bifurkace

### – analytické metody

V případě, že je dynamický systém popsán pomocí polynomiální funkce nebo racionální lomené funkce, můžeme se pokusit nalézt rovnováhy a kritické body fold bifurkace analyticky. Pro polynomy vyšších stupňů, je ale taková úloha často nemožná. Existuje ale způsob, jak v takovém případě popsat varietu rovnováh a nalézt fold varietu v prostoru všech parametrů a nikoliv pouze numericky její řezy.

## Nalezení variety rovnováh a fold bifurkace

### – analytické metody

V případě, že je dynamický systém popsán pomocí polynomiální funkce nebo racionální lomené funkce, můžeme se pokusit nalézt rovnováhy a kritické body fold bifurkace analyticky. Pro polynomy vyšších stupňů, je ale taková úloha často nemožná. Existuje ale způsob, jak v takovém případě popsat varietu rovnováh a nalézt fold varietu v prostoru všech parametrů a nikoliv pouze numericky její řezy.

Vyzkoušejme to na Lorenzově modelu se třemi stavovými proměnnými a třemi parametry:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

Rovnováha splňuje systém polynomiálních rovnic

$$0 = -\sigma(x - y),$$

$$0 = rx - y - xz,$$

$$0 = -bz + xy,$$

Rovnováha splňuje systém polynomiálních rovnic

$$0 = -\sigma(x - y),$$

$$0 = rx - y - xz,$$

$$0 = -bz + xy,$$

přičemž z první rovnice dostáváme symetrickou podmínku  $x = y$  a z poslední rovnice dostáváme, že  $z = \frac{x^2}{b}$ .

Rovnováha splňuje systém polynomiálních rovnic

$$0 = -\sigma(x - y),$$

$$0 = rx - y - xz,$$

$$0 = -bz + xy,$$

přičemž z první rovnice dostáváme symetrickou podmínku  $x = y$  a z poslední rovnice dostáváme, že  $z = \frac{x^2}{b}$ . Dosazením do druhé rovnice pak nutně rovnováha splňuje

$$rx - x - x\frac{x^2}{b} = x\left(r - 1 - \frac{x^2}{b}\right) = 0.$$

Dostáváme tak dvě větve rovnováh, variety analyticky popsané v prostoru parametrů.

Rovnováha splňuje systém polynomiálních rovnic

$$0 = -\sigma(x - y),$$

$$0 = rx - y - xz,$$

$$0 = -bz + xy,$$

přičemž z první rovnice dostáváme symetrickou podmínku  $x = y$  a z poslední rovnice dostáváme, že  $z = \frac{x^2}{b}$ . Dosazením do druhé rovnice pak nutně rovnováha splňuje

$$rx - x - x\frac{x^2}{b} = x\left(r - 1 - \frac{x^2}{b}\right) = 0.$$

Dostáváme tak dvě větve rovnováh, variety analyticky popsané v prostoru parametrů. Již víme, že jejich průsečíkem je počátek pro kritickou hodnotu  $r = 1$  vidličkové bifurkace. Teď je ale pro nás důležité si všimnout mechanismu, jakým jsme tyto rovnovážné variety v prostoru všech parametrů získali. Je to eliminace stavových proměnných.



Pokud by dynamický systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$  byl lineární, lze pro eliminaci stavových proměnných použít Gaussovu (nebo Jordanovu) eliminační metodu. V případě polynomiálních rovnic vyšších stupňů je zobecněním tohoto přístupu výpočet Gröbnerovy báze např. Buchbergerovým algoritmem. Je to metoda konečná, ale zdlouhavá, a proto je vhodné k výpočtu využít implementaci v některém softwaru (např. balík Groebner v Maple).

Pokud by dynamický systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$  byl lineární, lze pro eliminaci stavových proměnných použít Gaussovu (nebo Jordanovu) eliminační metodu. V případě polynomiálních rovnic vyšších stupňů je zobecněním tohoto přístupu výpočet Gröbnerovy báze např. Buchbergerovým algoritmem. Je to metoda konečná, ale zdlouhavá, a proto je vhodné k výpočtu využít implementaci v některém softwaru (např. balík Groebner v Maple).

Pro hledání variety fold bifurkace je polynomiální systém  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$  doplněn o postačující podmínku  $\det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$  a je tak možné eliminovat všechny stavové proměnné, čímž se lze vyhnout explicitnímu výpočtu rovnováhy.

## Poznámka

*V angličtině se v teorii dynamických systémů používá pojmu „manifold“, přestože by lépe vyhovoval pojem „variety“. Čeština ovšem oba názvy nerozlišuje. Na tomto místě je vhodné upozornit na rozdíl v definici variety („manifold“) a algebraické variety („variety“). Afinity algebraická varieta  $\mathbf{V}$  je definována jako množina řešení systému polynomiálních rovnic nad komplexními čísly, přičemž v aplikacích nás samozřejmě zajímá její reálná část. Varieta  $\mathbf{V}$  může obsahovat i singulární body, ve kterých nelze definovat tečný prostor (naproti tomu „manifold“ je regulární). Dimenze variety  $\mathbf{V}$  je maximální dimenze tečného prostoru v regulárním bodě  $\mathbf{V}$ . Pro dimenzi  $n = 1$  tak mluvíme o algebraických křivkách, pro  $n = 2$  o algebraických plochách, obecně o algebraických nadplochách nebo hyperplochách.*

Budeme pracovat s polynomy  $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  s reálnými koeficienty a proměnnými  $x_1, \dots, x_m$ .

## Definice

*Pro podmnožinu  $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  definujeme její afinní algebraickou varietu jako množinu bodů, na které se nulují všechny její polynomy (v angličtině se jí říká „vanishing set“ nebo „zero set“)*

$$V(S) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall p \in S : p(x_1, \dots, x_m) = 0\}.$$

Budeme pracovat s polynomy  $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  s reálnými koeficienty a proměnnými  $x_1, \dots, x_m$ .

## Definice

Pro podmnožinu  $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  definujeme její afinní algebraickou varietu jako množinu bodů, na které se nulují všechny její polynomy (v angličtině se jí říká „vanishing set“ nebo „zero set“)

$$V(S) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall p \in S : p(x_1, \dots, x_m) = 0\}.$$

## Definice

Ideálem rozumíme podgrupu  $I$  okruhu  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  splňující

$$\forall r \in \mathbb{R} \text{ a } \forall x \in I \Rightarrow rx \in I.$$

Ideál  $I = (S)$  je ideál generovaný množinou  $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ , pokud je to nejmenší ideál splňující  $S \subseteq I$ .

## Věta

Ideál  $I = (S)$  generovaný množinou  $S$  má stejnou afinní algebraickou varietu  $V(I) = V(S)$ .

Pro potřeby definování Gröbnerovy báze ideálu  $I = (S)$  potřebujeme seřadit  $x_1 \succ \dots \succ x_m$  pomocí monomiálního lexikografického řazení, přičemž

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \succ x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m},$$

znamená, že existuje index  $i$  tak, že  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i$ .

## Věta

Ideál  $I = (S)$  generovaný množinou  $S$  má stejnou afinní algebraickou varietu  $V(I) = V(S)$ .

Pro potřeby definování Gröbnerovy báze ideálu  $I = (S)$  potřebujeme seřadit  $x_1 \succ \dots \succ x_m$  pomocí monomiálního lexikografického řazení, přičemž

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \succ x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m},$$

znamená, že existuje index  $i$  tak, že  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i$ .

Budeme používat zkrácený zápis  $x^\alpha$  místo  $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$  pro  $m$ -tici  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

## Věta

Každý nenulový polynom  $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  lze jednoznačně zapsat jako

$$p = a_\alpha x^\alpha + \sum_{x^\alpha \succ x^\beta} a_\beta x^\beta,$$

kde  $a_\alpha \neq 0$ .

V takovém případě se  $a_\alpha$  nazývá **vedoucí koeficient**,  $x^\alpha$  **vedoucí monom** a  $a_\alpha x^\alpha$  **vedoucí člen** polynomu  $p$ . Označují se  $LCp$ ,  $LMp$  a  $LTp$ .



## Definice

*Nechť  $I$  je ideál. Pak  $LTI$  označuje ideál generovaný vedoucími členy prvků z  $I$ . Polynomy  $p_1, \dots, p_n \in I$  jsou **Gröbnerovou bazí** ideálu  $I$ , jestliže jejich vedoucí členy generují  $LTI$ .*

Je známo, že každá Gröbnerova báze generuje ideál  $I$ , pro libovolný ideál  $I$  existuje a pro konečný ideál  $I$  ji lze nalézt v konečném počtu kroků .

Gröbnerovu bázi lze nalézt algoritmicky např. Buchbergerovým algoritmem. Vhodnou volbou lexikografického řazení pak lze eliminovat některé proměnné a zapsat tak afinní varietu příslušného systému polynomiálních rovnic výhodným způsobem. Pro eliminaci stavových proměnných je musíme umístit v lexikografickém řazení dopředu.

Gröbnerovu bázi lze nalézt algoritmicky např. Buchbergerovým algoritmem. Vhodnou volbou lexikografického řazení pak lze eliminovat některé proměnné a zapsat tak afinní varietu příslušného systému polynomiálních rovnic výhodným způsobem. Pro eliminaci stavových proměnných je musíme umístit v lexikografickém řazení dopředu.

Mějme ideál  $I = (p_1, \dots, p_n)$ .

Gröbnerovu bázi lze nalézt algoritmicky např. Buchbergerovým algoritmem. Vhodnou volbou lexikografického řazení pak lze eliminovat některé proměnné a zapsat tak afinní varietu příslušného systému polynomiálních rovnic výhodným způsobem. Pro eliminaci stavových proměnných je musíme umístit v lexikografickém řazení dopředu.

Mějme ideál  $I = (p_1, \dots, p_n)$ .

Pro  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  označme  $x^\alpha$  největší společný dělitel  $\text{LM}f$  a  $\text{LM}g$ . Takzvaný **S-polynom**  $f$  a  $g$  je

$$S(f, g) = (\text{LT}g/x^\alpha) \cdot f - (\text{LT}f/x^\alpha) \cdot g.$$

Touto metodou se vyrušíme vedoucí členy  $f$  a  $g$  (vzpomeňte si na ekvivalentní úpravy v Gaussově eliminaci).

**Zbytek** polynomu  $f$  po dělení množinou polynomů  $\{p_1, \dots, p_n\}$  se definuje následující rekurzivní procedurou: pokud je  $LMf$  dělitelný některým  $LMp_i$ , zaměníme  $f$  polynomem  $f - (LTf/LTp_i)p_i$ . Opakujeme tak dlouho, dokud  $LMf$  není dělitelný žádným z  $LMp_i$ . Výsledný polynom je zbytek. (Obecně není určen jednoznačně, protože index  $i$  není v krocích jednoznačně určen.)

**Zbytek** polynomu  $f$  po dělení množinou polynomů  $\{p_1, \dots, p_n\}$  se definuje následující rekurzivní procedurou: pokud je  $LMf$  dělitelný některým  $LMp_i$ , zaměníme  $f$  polynomem  $f - (LTf/LTp_i)p_i$ . Opakujeme tak dlouho, dokud  $LMf$  není dělitelný žádným z  $LMp_i$ . Výsledný polynom je zbytek. (Obecně není určen jednoznačně, protože index  $i$  není v krocích jednoznačně určen.)

**Buchbergerův algoritmus** pro nalezení Gröbnerovy báze ideálu

$I = (p_1, \dots, p_n)$ :

1. Začni množinou polynomů  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ .
2. Pro každé  $i, j$  vypočti zbytek  $p_{ij}$   $S$ -polynomu  $S(p_i, p_j)$  po dělení  $P$ . Do  $P$  přidej všechny nenulové zbytky  $p_{ij}$ .
3. Pokud se zvětšila množina  $P$ , opakuj předchozí krok. V opačném případě je  $P$  Gröbnerovou bazí původní množiny.

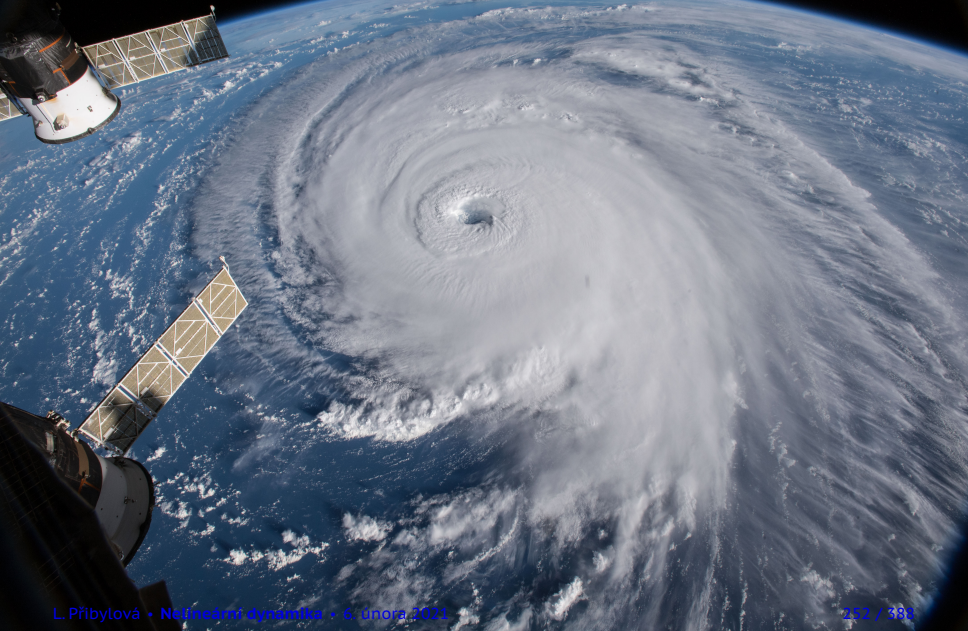
## Úkol:



V programu Maple si nechte spočítat Gröbnerovu bázi pomocí toolboxu Groebner a projděte si i postup Buchbergerova algoritmu pro nalezení **rovnovážné variety Lorenzova modelu**.

Použijte metodu na **model obaleče**.

# Cykly, limitní cykly, Poincarého řez





## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému

## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému
- pochopit souvislost cyklu v diskretním systému s rovnováhou

## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému
- pochopit souvislost cyklu v diskretním systému s rovnováhou
- pochopit metodu Poincarého řezu spojitého systému a pojem multiplikátoru cyklu

## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému
- pochopit souvislost cyklu v diskretním systému s rovnováhou
- pochopit metodu Poincarého řezu spojitého systému a pojem multiplikátoru cyklu
- pochopit analogii fold bifurkace (spojité) v diskretním případě

## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému
- pochopit souvislost cyklu v diskretním systému s rovnováhou
- pochopit metodu Poincarého řezu spojitého systému a pojem multiplikátoru cyklu
- pochopit analogii fold bifurkace (spojité) v diskretním případě
- popsat vznik cyklu bifurkací fold

## Co se naučíme:

- definovat cyklus a limitní cyklus ve spojitém i diskretním systému
- pochopit souvislost cyklu v diskretním systému s rovnováhou
- pochopit metodu Poincarého řezu spojitého systému a pojem multiplikátoru cyklu
- pochopit analogii fold bifurkace (spojité) v diskretním případě
- popsat vznik cyklu bifurkací fold
- numericky kontinuovat cykly ve spojitém systému a nalézt bifurkaci LPC (fold cyklu)

Uvažujme spojitý obecný dynamický systém  $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ . Doposud jsme se zabývali rovnováhou v takovém systému. Nyní budeme definovat jinou invariantní množinu takového systému – po rovnováze další „nejjednodušší“ možnou.

## Definice

**Cyklem** rozumíme periodickou trajektorii  $L$ , která není rovnovážným bodem, splňující  $\forall \mathbf{x}_0 \in L$

$$\varphi^{t+T_0}\mathbf{x}_0 = \varphi^t\mathbf{x}_0,$$

pro nějaké  $T_0 > 0$ ,  $\forall t \in T$ . Nejmenší takové  $T_0$  nazýváme periodou cyklu  $L$ . **Limitním cyklem** rozumíme cyklus, v jehož okolí nejsou jiné cykly.

## Poznámka

*V systému s cyklem vznikají periodické oscilace. Cyklus spojitého systému je uzavřená křivka v  $\mathbf{X}$ . Cyklem diskrétního systému je konečná uspořádaná  $k$ -tice bodů z  $\mathbf{X}$ .*

U diskrétního systému  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n))$  mluvíme často o cyklu délky  $k = T_0$ , protože jde o uspořádanou  $k$ -tici

$$\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k-1),$$

pro kterou platí  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(0))$ ,  $\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(1))$ ,  $\dots$ ,  
 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1))$ . Uvědomme si navíc, že

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k-2))) = \dots = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}(0))$$

a tedy  $\mathbf{x}(0)$  je nutně rovnováhou dynamického systému

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}(n)).$$



Na cyklus v diskrétním systému tedy můžeme pohlížet jako na rovnováhu jiného diskrétního dynamického systému. Takový myšlenkový postup ale lze použít i u spojitého systému.

Na cyklus v diskrétním systému tedy můžeme pohlížet jako na rovnováhu jiného diskrétního dynamického systému. Takový myšlenkový postup ale lze použít i u spojitého systému.

Uvažujme nyní spojitý  $m$ -rozměrný systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Na cyklus v diskrétním systému tedy můžeme pohlížet jako na rovnováhu jiného diskrétního dynamického systému. Takový myšlenkový postup ale lze použít i u spojitého systému.

Uvažujme nyní spojitý  $m$ -rozměrný systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Předpokládejme navíc, že systém (23) má periodickou trajektorii  $L$  – cyklus. V nějakém bodě  $\mathbf{x}_0 \in L$  uvažujme hladkou  $m - 1$ -rozměrnou varietu (např. nadrovinu)

$$\Sigma = \{g(\mathbf{x}) = 0 : g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g(\mathbf{x}_0) = 0\},$$

kteřá je tzv. transverzální, což znamená, že není v bodě  $\mathbf{x}_0$  tečná  $L$ , tedy řeže cyklus  $L$ . V angličtině se jí proto říká *Poincaré cross-section*  $\Sigma$  – česky **Poincarého řez**.

Podmínku transversality můžeme zapsat pomocí gradientu funkce  $g$  (normálového vektoru  $\Sigma$ ) takto:

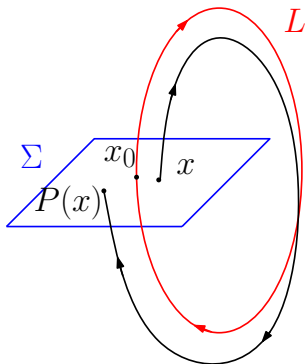
$$\langle \nabla g(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \rangle \neq 0,$$

tedy normálový vektor  $\Sigma$  nesmí být kolmý k trajektorii cyklu  $L$ . Je zřejmé, že takovou varietou může být například rovina kolmá k  $L$  v  $\mathbf{x}_0$ :

$$g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle = 0.$$

Na této varietě v okolí  $x_0$  nyní definujeme zobrazení  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , které zobrazuje bod  $x$  trajektorie  $\varphi^t x$  systému (23) na následující průsečík této trajektorie s varietou  $\Sigma$ .

Poincarého zobrazení:



Zobrazení  $\mathbf{P}$  se nazývá Poincarého zobrazení příslušné cyklu  $\mathbf{L}$ . Lokálně takto definujeme diskrétní dynamický systém  $\{\mathbb{N}, \Sigma, \mathbf{P}^n\}$  s pevným bodem  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{L}$ . Pokud na  $m - 1$ -rozměrné  $\Sigma$  zvolíme souřadný systém s počátkem v  $\mathbf{x}_0$ , bude možné v těchto souřadnicích  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$  zapsat Poincarého zobrazení jako diferenční systém

$$\xi(n + 1) = \mathbf{P}(\xi(n))$$

s pevným bodem  $\mathbf{0}$  a maticí linearizovaného systému  $D\mathbf{P}(\mathbf{0})$ . Cyklus  $\mathbf{L}$  bude stabilní (atraktivní), pokud budou všechny vlastní hodnoty  $D\mathbf{P}(\mathbf{0})$  v absolutní hodnotě menší jedné. Tato vlastní čísla se někdy nazývají charakteristické (Floquetovy) multiplikátory cyklu. Lze ukázat, že vlastní hodnoty matice linearizovaného systému nezávisí ani na volbě bodu  $\mathbf{x}_0$ , ani na volbě  $\Sigma$  a ani na volbě souřadnic.

## Příklad Poincarého zobrazení

Předchozí příklad je ojedinělým případem, kdy lze Poincarého zobrazení explicitně vyjádřit. Většinou jej počítáme numericky, program XPPAUT má tuto možnost předprogramovanou. Rozhodnutí o stabilitě cyklu spojitého systému jsme převedli na rozhodnutí o stabilitě rovnováhy (pevného bodu) Poincarého zobrazení. Podobně i o stabilitě diskrétního cyklu délky  $k$  můžeme rozhodovat na základě znalosti velikosti vlastních čísel rovnováhy  $k$ -násobně složeného zobrazení.



Předchozí příklad je ojedinělým případem, kdy lze Poincarého zobrazení explicitně vyjádřit. Většinou jej počítáme numericky, program XPPAUT má tuto možnost předprogramovanou. Rozhodnutí o stabilitě cyklu spojitého systému jsme převedli na rozhodnutí o stabilitě rovnováhy (pevného bodu) Poincarého zobrazení. Podobně i o stabilitě diskrétního cyklu délky  $k$  můžeme rozhodovat na základě znalosti velikosti vlastních čísel rovnováhy  $k$ -násobně složeného zobrazení.

Bifurkace rovnováhy jistého diskrétního systému tedy bude bifurkací příslušnou cyklu.

## Fold bifurkace v diskrétním systému

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = \varepsilon + x(n) - x(n)^2, \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Pevné body splňují  $f(x, \varepsilon) := \varepsilon + x - x^2 = x$ , tj. leží na křivce  $\varepsilon = x^2$ . Pro  $\varepsilon < 0$  systém (24) nemá žádný pevný bod, pro  $\varepsilon = 0$  je pevný bod  $x_0 = 0$  a pro  $\varepsilon > 0$  jsou pevné body dva  $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ . Parametr  $\varepsilon = 0$  je tedy bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci typu fold (ohyb). Bod  $(x_0, \varepsilon_0) = (0, 0)$  je tzv. limitním bodem. Všimněte si, že vlastní hodnota  $\lambda = Df(0, 0) = 1$ .

## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

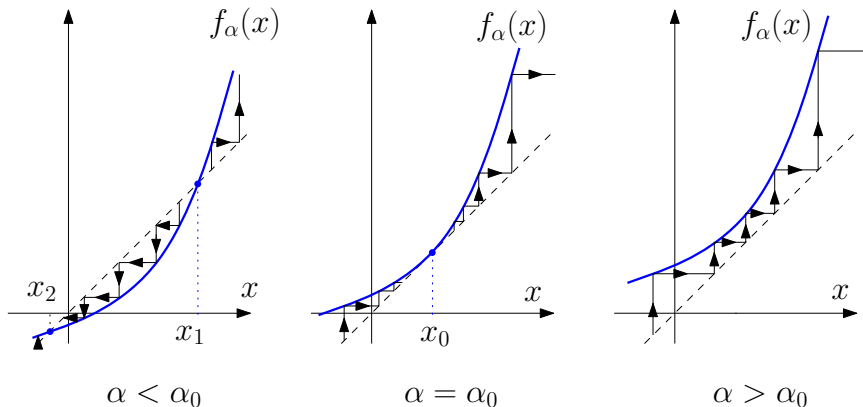
$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

kde  $f$  je hladká funkce, má pro  $\alpha = \alpha_0$  pevný bod  $x = x_0$  a  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 1$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_{\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka transverzality.} \end{array}$$

Pak je (25) v okolí pevného bodu lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě

$$y(n+1) = \varepsilon + y(n) \pm y(n)^2$$



Ve vícerozměrném případě k této bifurkaci dochází v případě, že Jacobiho matice  $J$  má právě jednu vlastní hodnotu  $\lambda = 1$ .

## Fold bifurkace cyklu – LPC

Při ohybu variety pevného bodu Poincarého zobrazení tedy dochází v původním spojitém systému vzniku respektive zániku dvou cyklů, které se navzájem dotknou. Jde o generický, typický jev, ke kterému dochází při generické fold bifurkaci Poincarého zobrazení (tedy vždy, když jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transverzality).

## Fold bifurkace cyklu – LPC

Při ohybu variety pevného bodu Poincarého zobrazení tedy dochází v původním spojitém systému vzniku respektive zániku dvou cyklů, které se navzájem dotknou. Jde o generický, typický jev, ke kterému dochází při generické fold bifurkaci Poincarého zobrazení (tedy vždy, když jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transversality).

Stejně jako v případě ohybu variety rovnováh, i zde může tento jev vést k nenadálému zániku (vzniku) stabilního atraktoru (cyklu) při malé změně parametru. Typickým příkladem takového jevu je vznik periodických vzruchů v neuronu, prudké **rozkmitání křídél letadla** (proto se testují ve **větrném tunelu**) nebo **mostu** při silném (bočním) větru, nebo rozkmitání turbíny při jejím zastavování (test s **vrtačkou**).

## Fold bifurkace cyklu – LPC

Při ohybu variety pevného bodu Poincarého zobrazení tedy dochází v původním spojitém systému vzniku respektive zániku dvou cyklů, které se navzájem dotknou. Jde o generický, typický jev, ke kterému dochází při generické fold bifurkaci Poincarého zobrazení (tedy vždy, když jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transversality).

Stejně jako v případě ohybu variety rovnováh, i zde může tento jev vést k nenadálému zániku (vzniku) stabilního atraktoru (cyklu) při malé změně parametru. Typickým příkladem takového jevu je vznik periodických vzruchů v neuronu, prudké **rozkmitání křídel letadla** (proto se testují ve **větrném tunelu**) nebo **mostu** při silném (bočním) větru, nebo rozkmitání turbíny při jejím zastavování (test s **vrtačkou**). Je to taky jeden z důvodů, proč mají větrné elektrárny 3 lopatky. Přijdete na to proč?

V roce 1948 provedl Alan Lloyd Hodgkin pokusy, při kterých zaváděl stejnosměrný proud různých velikostí do axonů nervových buněk a sledoval, že některé hodnoty proudu vyvolaly série impulzů o různých frekvencích, jiné vyvolávaly jen jeden impulz nebo byly bez odezvy. V roce 1952 pak A. L. Hodgkin a Andrew Fielding Huxley publikovali sérii článků, ve kterých popsali toky elektrických proudů povrchovou membránou nervového vlákna matematickým modelem, který je dnes známý jako Hodgkin-Huxleyho model. Sestává ze soustavy 4 nelineárních diferenciálních rovnic, které velmi dobře popisují chování neuronu.



**FitzHughův–Nagumův model neuronu** V roce 1961 Richard FitzHugh publikoval zjednodušený model, který vykazuje obdobné chování, protože je zjednodušením projekce 4-rozměrného Hodgkin-Huxleyho modelu na dvojrozměrnou varietu.

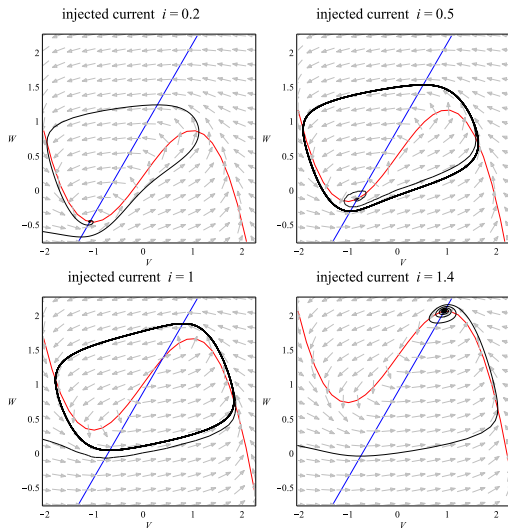
$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - w + i \\ \dot{W} &= a(bV - cW + d)\end{aligned}$$

- $V$  membránový potenciál
- $W$  proměnná související s návratem
- $i$  dodávaný proud
- $a, b, c, d$  parametry

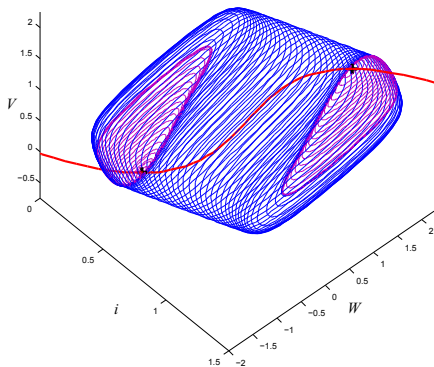
V základním modelu excitace neuronu jsme si představili jen první rovnici pro membránové napětí  $V$ , bez proměnné  $W$ , která byla navíc posunutá:

$$\dot{x} = kx(a - x)(x - 1) + i$$

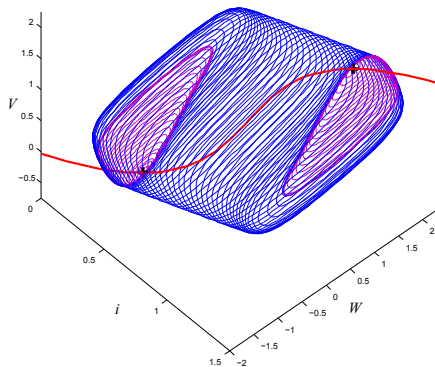
Nyní prahový parametr chybí. Ostatní parametry i stavová proměnná  $W$  vycházejí z popisu kinetiky chemických reakcí na membráně axonu (přenos signálu je zprostředkován změnami koncentrací iontů  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Cl^-$  a anionty bílkovin),  $a, b, c > 0$ . Druhá rovnice je obnovovací, má pomalejší odezvu (proto je zde ponechán parametr  $a$ ) a umožňuje vznik impulzu, který následně ukončí.



Fázové portréty pro  $a = 0.2, b = 1, c = 0.8, d = 0.7$ . Vyzkoušejte si je nakreslit v XPPAUTu.



Neuron odpovídá vysláním oscilujícího signálu jen pro určité hodnoty dodávaného proudu  $i$ , k vzniku a zániku oscilací dochází fold bifurkací limitního cyklu. Dokud se nezvýší proud do dostatečné hodnoty, neuron nereaguje, pokud je proud příliš velký, také ne.

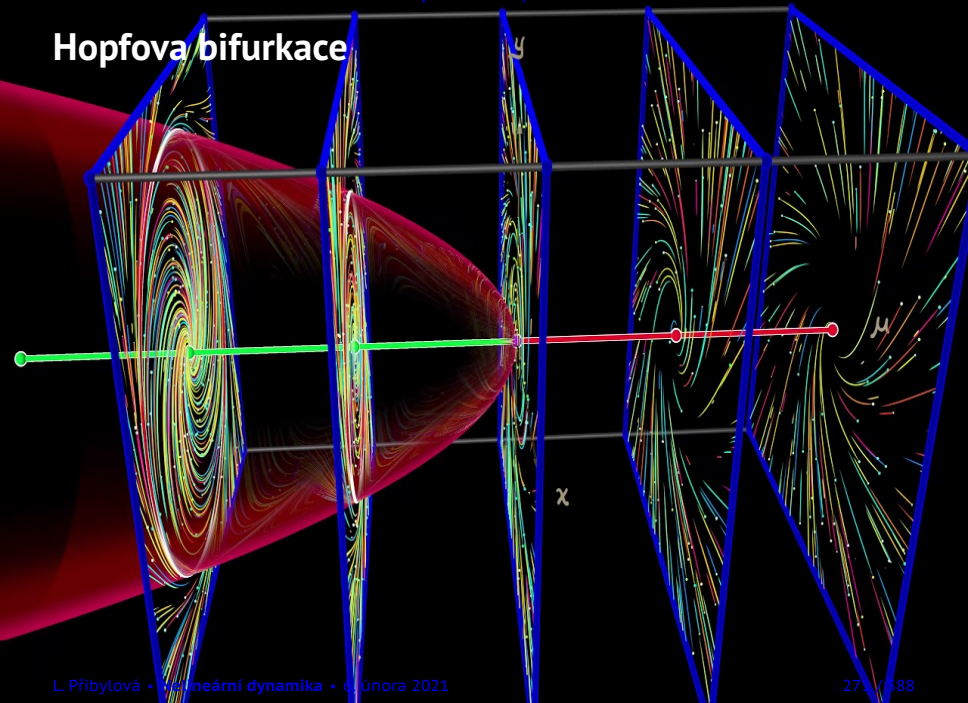


V programu MATCONT zjistěte prahové hodnoty proudu.

Parametry:  $a = 0.2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.8$ ,  $d = 0.7$ .

V MATCONTu je možné kontinuovat cyklus, ale je třeba jej nejprve načíst. Návod najdete [zde](#).

# Hopfova bifurkace



## Co se naučíme:

- pochopit vznik limitního cyklu z ohniska Hopfovou bifurkací

## Co se naučíme:

- pochopit vznik limitního cyklu z ohniska Hopfovou bifurkací
- rozlišit superkritickou a subkritickou Hopfovou bifurkaci



## Co se naučíme:

- pochopit vznik limitního cyklu z ohniska Hopfovou bifurkací
- rozlišit superkritickou a subkritickou Hopfovou bifurkaci
- vypočítat první Lyapunovův koeficient

## Co se naučíme:

- pochopit vznik limitního cyklu z ohniska Hopfovou bifurkací
- rozlišit superkritickou a subkritickou Hopfovou bifurkaci
- vypočítat první Lyapunovův koeficient
- numericky kontinuovat cyklus z kritického bodu Hopfovy bifurkace v programech MATCONT a XPPAUT

## Co se naučíme:

- pochopit vznik limitního cyklu z ohniska Hopfovou bifurkací
- rozlišit superkritickou a subkritickou Hopfovou bifurkaci
- vypočítat první Lyapunovův koeficient
- numericky kontinuovat cyklus z kritického bodu Hopfovy bifurkace v programech MATCONT a XPPAUT
- použít metodu Gröbnerových bazí

## Hopfova–Andronovova bifurkace vzniku limitního cyklu.

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s parametrem tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kde  $x, y \in \mathbb{R}$  a  $\mu \in \mathbb{R}$  je parametr. Rovnovážným bodem systému je počátek a Jacobiho matice systému v něm má tvar  $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ . Vlastní hodnoty jsou tedy  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . Pro  $\mu < 0$  je tedy počátek stabilním ohniskem, pro  $\mu > 0$  je nestabilním ohniskem. Kritická hodnota parametru  $\mu = 0$  je bifurkační hodnotou Hopfovy bifurkace, při jejím přechodu se mění kvalitativní vlastnost - stabilita - rovnovážného bodu.

Zavedme komplexní proměnnou  $z = x + iy$ . Pak

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \mu(x + iy) + i(x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2),$$

tj.

$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2.$$

Eulerův tvar komplexního čísla  $z = \rho e^{i\varphi}$  pak dává polární tvar

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}\tag{26}$$

Zavedme komplexní proměnnou  $z = x + iy$ . Pak

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \mu(x + iy) + i(x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2),$$

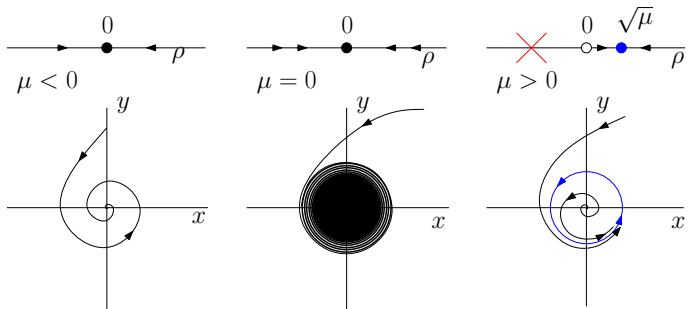
tj.

$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2.$$

Eulerův tvar komplexního čísla  $z = \rho e^{i\varphi}$  pak dává polární tvar

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}\tag{26}$$

Rovnice (26) je normálním tvarem vidličkové bifurkace. Pro  $\mu \leq 0$  je tedy počátek jedinou stabilní rovnováhou. Pro  $\mu > 0$  vzniká další rovnovážný bod  $\rho = \sqrt{\mu}$  (zápornou hodnotu můžeme vynechat, nemá v této reprezentaci smysl, jde o vzdálenost). Počátek je v tomto případě  $\mu > 0$  nestabilní, rovnováha  $\rho = \sqrt{\mu}$  je stabilní. Tento bod odpovídá stabilnímu limitnímu cyklu v okolí počátku.



video prof. Ghrista - fázový portrét  
 video prof. Ghrista -  $\mu \times x \times y$

## Věta

Předpokládejme, že dvoudimenzionální jednoparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha),$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  hladká funkce, má pro  $\alpha$  z okolí 0 rovnováhu  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  a  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  má vlastní hodnoty  $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ , kde  $\mu(\alpha_0) = 0$  a  $\omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} l_1(\alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ \mu_\alpha(\alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka transverzality.} \end{array}$$

Pak je (13) v okolí rovnovážného bodu lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Hopfovy bifurkace**

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \pm \varepsilon u - v \pm u(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= u + \pm \varepsilon v \pm v(u^2 + v^2). \end{aligned}$$



## Poznámka

Číslo  $l_1(\alpha_0)$  se nazývá první Ljapunovův koeficient nebo první Ljapunovovo číslo. Jeho znaménko určuje znaménko u nelineárních členů v normálním tvaru. V případě, že  $l_1(\alpha_0) < 0$ , je systém ekvivalentní námi dříve studovanému se stabilním limitním cyklem, mluvíme o **superkritické** Hopfově bifurkaci. V případě  $l_1(\alpha_0) > 0$  jde o **subkritickou** Hopfovou bifurkaci s nestabilním limitním cyklem. Výpočet Ljapunovova koeficientu je založen na transformaci původního systému do lokálně topologicky ekvivalentního systému v normální formě. My si uvedeme pouze "kuchařku" na jeho výpočet. Znaménko u  $\varepsilon$  určuje zase podmínka transversality.

Všimněte si, že Jacobiho matice  $J = Df(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  má **dvě ryze imaginární** komplexně sdružené vlastní hodnoty, tj. platí

$$\operatorname{tr} J = 0$$

za předpokladu  $\det J > 0$ .

Všimněte si, že Jacobiho matice  $J = Df(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  má **dvě ryze imaginární** komplexně sdružené vlastní hodnoty, tj. platí

$$\operatorname{tr} J = 0$$

za předpokladu  $\det J > 0$ .

Perioda cyklu vznikajícího v okolí počátku je  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , protože vznikající periodické řešení je blízké funkci  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ .

Všimněte si, že Jacobiho matice  $J = Df(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  má **dvě ryze imaginární** komplexně sdružené vlastní hodnoty, tj. platí

$$\operatorname{tr} J = 0$$

za předpokladu  $\det J > 0$ .

Perioda cyklu vznikajícího v okolí počátku je  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , protože vznikající periodické řešení je blízké funkci  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ .

Amplituda oscilací vznikajících Hopfovou bifurkací je úměrná změně parametru s jeho **druhou odmocninou**.

Matice  $J = Df(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  má podle předpokladů dvě ryze imaginární vlastní hodnoty  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Jim příslušné (komplexní) vlastní vektory  $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$  jsou také komplexně sdružené. Matice

$$T = (2\operatorname{Re}\mathbf{v}, 2\operatorname{Im}\mathbf{v})$$

převádí

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice  $J = Df(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  má podle předpokladů dvě ryze imaginární vlastní hodnoty  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Jim příslušné (komplexní) vlastní vektory  $\mathbf{v}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  jsou také komplexně sdružené. Matice

$$\mathbf{T} = (2\operatorname{Re}\mathbf{v}, 2\operatorname{Im}\mathbf{v})$$

převádí

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

a transformace

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

pak převádí systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_0),$$

na systém

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u}). \quad (27)$$

Právě nelineární část  $\begin{pmatrix} P(u_1, u_2) \\ Q(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u})$  je podstatná pro výpočet prvního Ljapunovova koeficientu  $l_1(\alpha_0)$  a určuje stabilitu nebo nestabilitu limitního cyklu vznikajícího v okolí kritické hodnoty Hopfovy bifurkace.

Právě nelineární část  $\begin{pmatrix} P(u_1, u_2) \\ Q(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u})$  je podstatná pro výpočet prvního Ljapunovova koeficientu  $l_1(\alpha_0)$  a určuje stabilitu nebo nestabilitu limitního cyklu vznikajícího v okolí kritické hodnoty Hopfovy bifurkace.

Označme  $P_{111}$  3. derivaci nelineární části prvního řádku podle první složky  $u_1$  vektoru  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  v nule, tj.

$$P_{111} = \left. \frac{\partial^3 P(u_1, u_2)}{\partial u_1^3} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$

Podobně např.  $Q_{12}$  bude značit 2. derivaci nelineární části druhého řádku podle první a druhé složky vektoru  $\mathbf{u}$  v nule, tj.

$$Q_{12} = \left. \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$



První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

Je super, že máme kontinuační numerické programy jako MATCONT a XPPAUT a nemusíme to vždy dělat...

Konkrétně normální forma Hopfovy bifurkace

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kteřou jsme prostudovali pomocí převodu do polárního tvaru, je již převedena do počátku a

$$\begin{aligned}l_1(0) &= \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ &\quad + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}] \\ &= \frac{1}{16}(-6 - 2 - 2 - 6) = -1 < 0\end{aligned}$$

a jde tedy o superkritickou bifurkaci. Podmínka transversality

$$\left. \frac{d\operatorname{Re}\lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = 1 \neq 0 \text{ je také splněna.}$$

## Kontinuace limitního cyklu z bodu HB

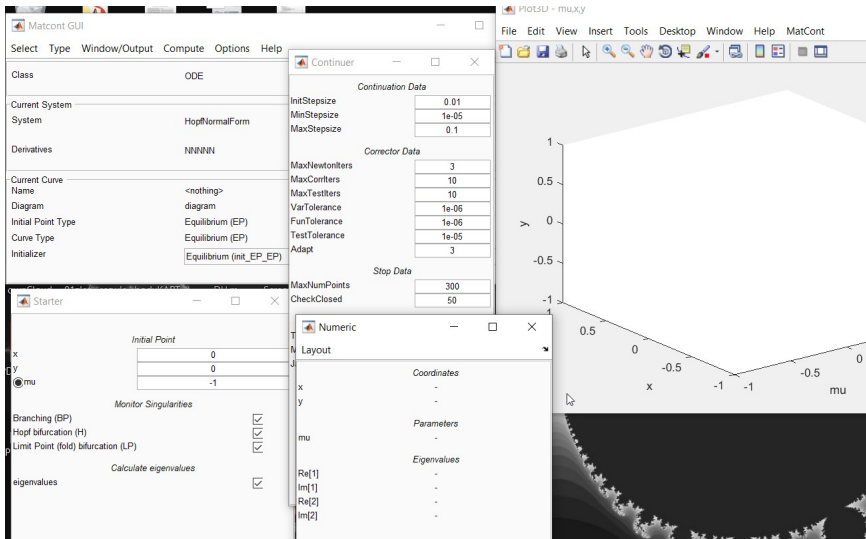
V kontinuačním softwaru MATCONT lze detekovat na křivce rovnováh bod Hopfovy bifurkace, přičemž program spočítá první Ljapunovův koeficient. Ukážeme si to přímo na normální formě Hopfovy bifurkace.

## Kontinuace limitního cyklu z bodu HB

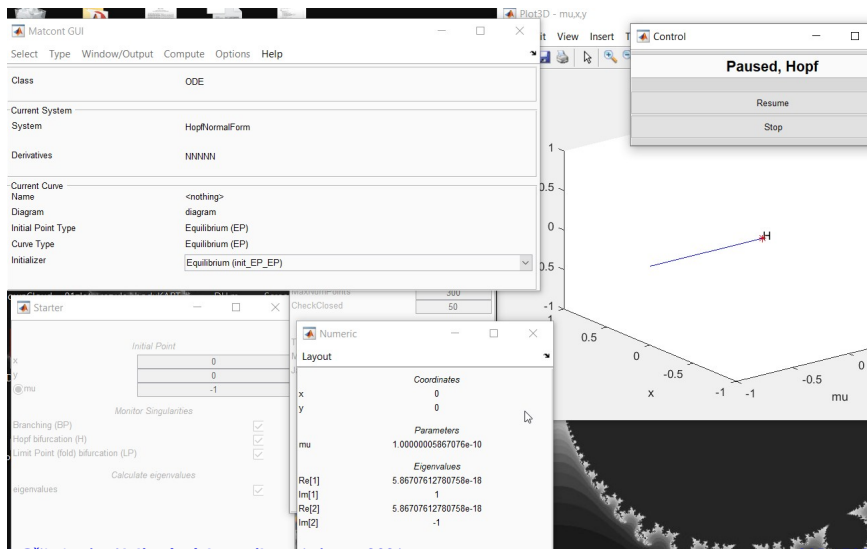
V kontinuačním softwaru MATCONT lze detekovat na křivce rovnováh bod Hopfovy bifurkace, přičemž program spočítá první Ljapunovův koeficient. Ukážeme si to přímo na normální formě Hopfovy bifurkace.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

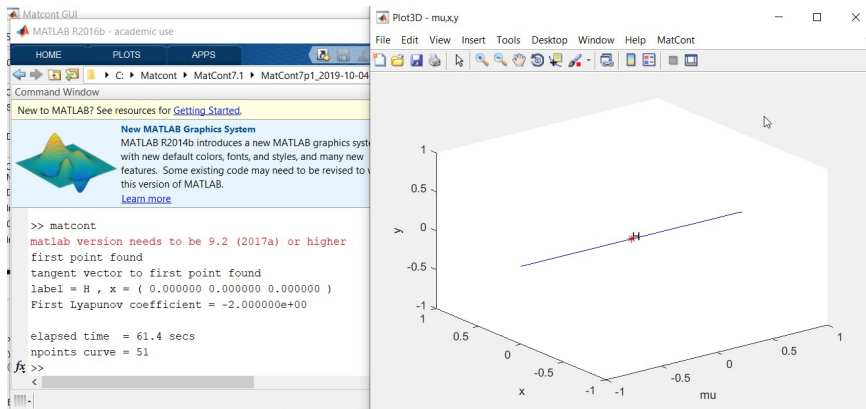
Nejprve nastavíme rovnováhu  $[0, 0]$  a parametr  $\mu = -1$  a vzhledem k tomuto parametru kontinuujeme křivku rovnováh při zakliknuté detekci Hopfovy bifurkace.



V grafickém okně zobrazíme prostor  $\mu \times x \times y$ , v numerickém okně je dobré sledovat vlastní čísla a kontinuujeme křivku rovnováh, která se pozastaví v bodě Hopfovy bifurkace.

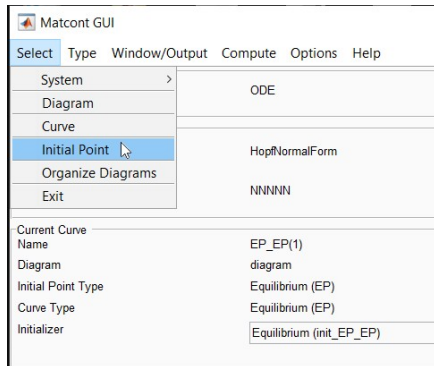


V hlavním okně Matlabu se zobrazí detekovaný bod Hopfovy bifurkace a spočtená hodnota Ljapunovova prvního koeficientu.

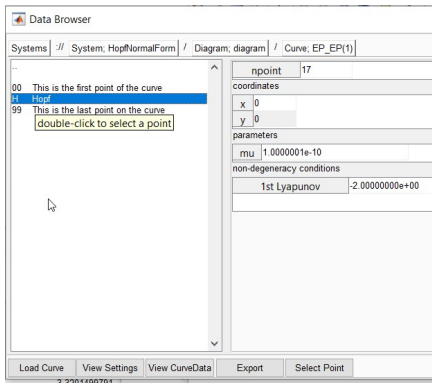




Z bodu HB je možné kontinuovat limitní cyklus. Nejprve je ale potřeba jej načíst.



To musíme udělat dvojitým kliknutím na detekovaný bod Hopfovy bifurkace.



Systém se načtením bodu sám přenastaví do detekce limitního cyklu z bodu HB. Všimněte si, že pro kontinuaci musí být zakliknuty jak parametr, tak perioda cyklu, protože se obě hodnoty mění.

The screenshot displays the Matcont GUI interface. The main window shows the following configuration:

- Class:** ODE
- Current System:** HopfNormalForm
- System:** HopfNormalForm
- Derivatives:** NNNNN
- Current Curve Name:** <nothing>
- Diagram:** diagram
- Initial Point Type:** Hopf (H)
- Curve Type:** Limit cycle (LC)
- Initializer:** Limit cycle (init\_H\_LC)

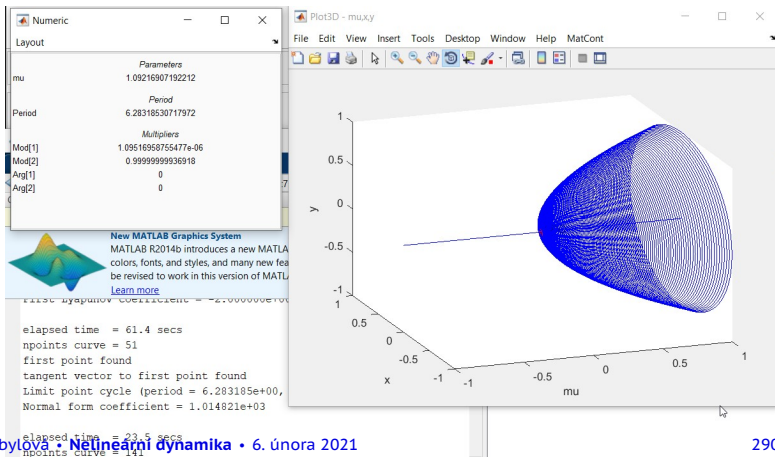
The 'Starter' window is open, showing the following configuration:

- Initial Point:**
  - x: 0
  - y: 0
  - $\mu$ : 1.00000005867076e-10
- Discretization Data:**
  - ntst: 40
  - ncol: 4
- Switch Data:**
  - amplitude: 1e-06
- Monitor Singularities:**
  - Branch Point of Cycles (BPC):
  - Period Doubling (flip) bifurcation (PD):
  - Limit Point bifurcation of cycles (LPC):
  - Neimark-Sacker (torus) bifurcation (NS):
- Calculate multipliers:**
- Phase Response Curve:** 1
- Input PRC:** Open PRC Plot

The 'Numeric' window is also open, showing the layout with parameters:

- mu:** -
- Period:** -

Při kontinuaci je výhodné sledovat v numerickém okně multiplikátory. Jeden multiplikátor má stále hodnotu kolem 1, ten odpovídá směru tečnému k cyklu, druhý je stále menší než 1, to je naše vlastní číslo Poincarého zobrazení, jde tedy o stabilní cyklus. Systém chybně detekuje ohyb cyklu v počátku s obrovským koeficientem v normální formě a správně periodu  $2\pi$ .



## Věta

Pro spojitý systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  v rovině závislý na parametru (případně více parametry) s Jacobiho maticí  $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  jsou podmínky

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\text{tr} \mathbf{J} = 0 \quad (29)$$

nutné pro vznik Hopfovy bifurkace. Pokud  $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$  splňuje rovnice (28) a (29), postačujícími podmínkami jsou

$$\det \mathbf{J}|_{(\mathbf{x}, \alpha) = (\mathbf{x}_0, \alpha_0)} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{d \text{tr} \mathbf{J}}{d\alpha} |_{(\mathbf{x}, \alpha) = (\mathbf{x}_0, \alpha_0)} \neq 0,$$

## Použití Gröbnerovy báze

Pokud je pravá strana systému  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  polynomiální nebo racionální lomená funkce, lze systém (28), (29) řešit pomocí metody nalezení Gröbnerovy báze, tj. vyloučit stavové proměnné a nalézt varietu příslušnou Hopfově bifurkaci.

Konkrétně pro normální formu Hopfovy bifurkace dostáváme systém

$$\begin{aligned}\mu x - y - x(x^2 + y^2) &= 0, \\ x + \mu y - y(x^2 + y^2) &= 0, \\ 2\mu &= 0.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že poslední rovnice je již ve tvaru, kde jsou stavové proměnné eliminované, je  $\mu = 0$  jediným možným bodem algebraické variety příslušné Hopfově bifurkaci, příslušnou rovnováhou je  $(0, 0)$ .

# Příklady Hopfovy bifurkace – jevy





## Co se naučíme:

- použít znalosti o superkritické a subkritické HB na praktických úlohách

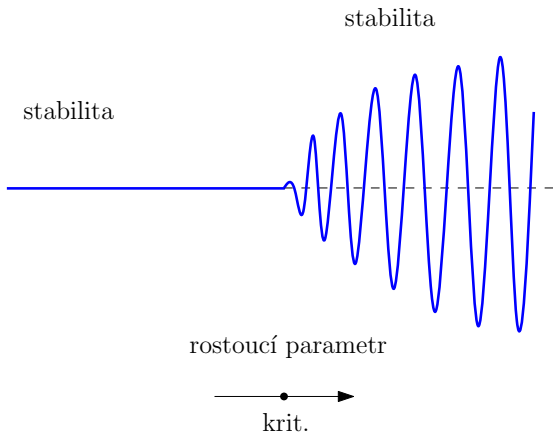
## Co se naučíme:

- použít znalosti o superkritické a subkritické HB na praktických úlohách
- analyzovat model Bruselátoru a Selkovův model

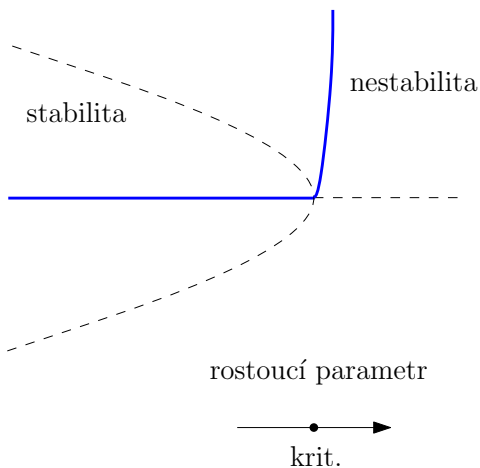
## Co se naučíme:

- použít znalosti o superkritické a subkritické HB na praktických úlohách
- analyzovat model Bruselátoru a Selkovův model
- analyzovat HB ve FitzHughově-Nagumově modelu

Superkritická bifurkace dává vzniknout stabilnímu limitnímu cyklu ze stabilního ohniska. Při změně parametru jsou vznikající oscilace zprvu malé - amplituda odpovídá odmocnině vzdálenosti parametru od kritické hodnoty parametru. V praktických aplikacích jde proto k jevu málo patrnému a svým způsobem neškodnému.



Oproti tomu subkritická bifurkace je v praktických situacích mnohem více patrná a někdy i vyloženě nežádoucí. Jde totiž o okamžitou ztrátu stability:



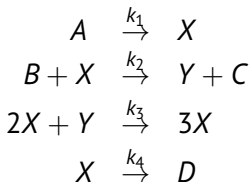
Typickým příkladem superkritické Hopfovy bifurkace jsou oscilace v systémech dravec–kořist nebo v biochemických systémech. Možná jste sami zažili tento jev již na vlastní kůži, ale neuvědomili jste si to. Mohlo jít o rozvibrování vrtačky při přílišném zvýšení tlaku na podložku, rozpískání konvice na čaj, vznik tiků ve svalu nebo rozhoupání stromů v lese. Souvisí s ní i vznik vzorů na kůži zvířat nebo dokonce vizuální halucinace.

Typickým příkladem superkritické Hopfovy bifurkace jsou oscilace v systémech dravec–kořist nebo v biochemických systémech. Možná jste sami zažili tento jev již na vlastní kůži, ale neuvědomili jste si to. Mohlo jít o rozvibrování vrtačky při přílišném zvýšení tlaku na podložku, rozpískání konvice na čaj, vznik tiků ve svalu nebo rozhoupání stromů v lese. Souvisí s ní i vznik vzorů na kůži zvířat nebo dokonce vizuální halucinace.

Typickým příkladem subkritické Hopfovy bifurkace je u LPC bifurkace zmiňovaný aeroelastický jev při prudkém rozkmitání křídel letadla nebo mostu při silném větru, řízení vysílání vzruchů neuronem nebo kvílení brzd ([video](#)). Typicky v těchto jevech dochází k bistabilitě a hysterezi, stabilní atraktory nejsou dvě stabilní rovnováhy, ale stabilní rovnováha a stabilní cyklus. V knize prof. Izhikeviče **Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting** je spousta aplikací v neurovědě.

## Chemický model Bruselátor

Uvažujme chemické reakce



za předpokladu, že  $C$  a  $D$  dále do reakcí nevstupují a koncentrace  $[A]$  a  $[B]$  se udržují konstantní, kinetické rovnice reakce popisuje systém

$$\begin{aligned}
 \frac{d[X]}{dt} &= k_1[A] - k_2[B][X] + k_3[X]^2[Y] - k_4[X], \\
 \frac{d[Y]}{dt} &= k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y].
 \end{aligned}$$



Označme  $x = [X]\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$ ,  $y = [Y]\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$ ,  $a = [A]\frac{k_1}{k_4}\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$ ,  $b = [B]\frac{k_2}{k_4}$ ,  $\tau = k_4 t$ ,  
pak lze systém zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b + 1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y.\end{aligned}\tag{30}$$

## Úkol:



Pomocí metody nalezení Gröbnerovy báze najděte bifurkační varietu Hopfovy bifurkace  $b = 1 + a^2$  a v programu Matcont najděte první Ljapunovův koeficient pro parametry  $a = 1$  a  $b = 2$ . Rozhodněte, zda dochází k superkritické nebo subkritické bifurkaci. V programu Maple si projděte **obecný výpočet**.

## Selkovův model glykolýzy

Prostudujte dynamiku modelu glykolýzy, který má (po zmenšení počtu parametrů) tvar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + x^2y, \\ \dot{y} &= b - ay - x^2y.\end{aligned}\tag{31}$$

Analyzujte pomocí XPPAUTu nebo MATCONTu.

**Původní Selkovův článek.**

**Animace.**

## Modely neuronu – FitzHughův-Nagumův model

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - W + i, \\ \dot{W} &= a(bV - cW + d),\end{aligned}\tag{32}$$

kde  $a, b, c > 0$  a  $i$  je proud.

## Modely neuronu – FitzHughův-Nagumův model

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - W + i, \\ \dot{W} &= a(bV - cW + d),\end{aligned}\tag{32}$$

kde  $a, b, c > 0$  a  $i$  je proud.

Nutné podmínky pro vznik Hopfovy bifurkace jsou

$$\begin{aligned}V - \frac{1}{3}V^3 - w + i &= 0, \\ bV - cW + d &= 0, \\ -V^2 - ac + 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V - \frac{1}{3}V^3 - w + i &= 0, \\bV - cW + d &= 0, \\-V^2 - ac + 1 &= 0\end{aligned}$$

Pokud tedy bude  $ac > 1$ , nemůže k Hopfově bifurkaci dojít. Navíc vidíme, že v bodě  $\text{tr } \mathbf{J} = 0$  nutně platí

$$\det \mathbf{J} = a(V^2c + b - c) = a(ac^2 + b) > 0.$$

$$\begin{aligned} V - \frac{1}{3}V^3 - w + i &= 0, \\ bV - cW + d &= 0, \\ -V^2 - ac + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Pokud tedy bude  $ac > 1$ , nemůže k Hopfově bifurkaci dojít. Navíc vidíme, že v bodě  $\text{tr } \mathbf{J} = 0$  nutně platí

$$\det \mathbf{J} = a(V^2c + b - c) = a(ac^2 + b) > 0.$$

Vhodnými parametry pro vznik HB a kontinuaci limitního cyklu jsou  $a$  a  $c$ , přičemž pro oba je splněna podmínka transversality

$$\frac{d \text{tr } \mathbf{J}}{da} = -c \neq 0 \text{ resp. } \frac{d \text{tr } \mathbf{J}}{dc} = -a \neq 0$$

## Úkol:



S využitím programu Maple pomocí metody nalezení Gröbnerovy báze najděte bifurkační varietu Hopfovy bifurkace. Nejprve zkuste program vytvořit sami, pokud se vám to nepodaří, je [zde](#).



## Úkol:

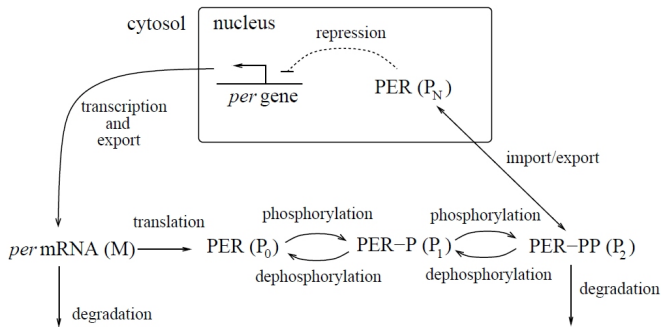


Pro parametry  $b = 1$ ,  $c = 0.8$ ,  $d = 0.7$  a  $i = 0.5$  najděte bod HB a kritickou hodnotu parametru  $a$ . S využitím programu Matcont v jeho okolí kontinuujte křivku rovnováh a limitní cyklus. Určete typ bifurkace rozhodněte o stabilitě cyklu.

## Cirkadiální rytmy

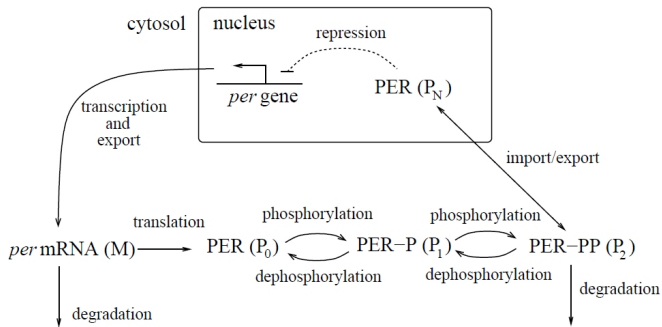
Už v roce 1965 ukázal Brian Goodwin, že autoinhibiční gen může generovat trvalé oscilace. V roce 1971 Ronald Konopka a Seymour Benzer publikovali studii, ve které identifikovali octomilky (*Drosophila melanogaster*) s mutacemi, které způsobily změny v délce cirkadiálního rytmu. Tyto mutace se objevily v genu, který byl nazván PER gen. Na rozdíl od nezmutované mouchy s aktivitou 24 hodinového cyklu, měly zmutované mouchy arytmičnou aktivitu, periodu asi 19 hodin a 28 hodin. Následně se zjistilo, že hladina PER proteinů, mRNA a fosforylovaného PER proteinu oscilují u normální mouchy se stejnou 24-hodinovou periodou a pokud je blokován vstup PER proteinu do jádra, oscilace nenastanou.

Prvním matematickým modelem cirkadiálních rytmů byl v roce 1996 model Alberta Goldbetera:



PER gen kóduje produkt, který po zpoždění potlačuje svou vlastní expresi. V tomto případě zpoždění je způsobeno transportem přes jadernou membránu a dvoufázovým aktivačním procesem (pomocí fosforylace).

Prvním matematickým modelem cirkadiálních rytmů byl v roce 1996 model Alberta Goldbetera:



Zpětná vazba začíná produkcí *per* mRNA (M), která je exportována z jádra do cytosolu. V cytosolu je mRNA převedena na PER protein ( $P_0$ ), který je neaktivní. Podstupuje dvě kola fosforylace aby se stal aktivním PER ( $P_2$ ), který je reverzibilně transportován přes jadernou membránu a v jádře pak PER potlačuje transkripci svého genu.

Takový zjednodušený popis biochemického systému:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= \frac{v_s}{1 + (p_N(t)/K_I)^n} - \frac{v_m m(t)}{K_{m1} + m(t)} \\ \frac{d}{dt}p_0(t) &= k_s m(t) - \frac{V_1 p_0(t)}{K_1 + p_0(t)} + \frac{V_2 p_1(t)}{K_2 + p_1(t)} \\ \frac{d}{dt}p_1(t) &= \frac{V_1 p_0(t)}{K_1 + p_0(t)} - \frac{V_2 p_1(t)}{K_2 + p_1(t)} - \frac{V_3 p_1(t)}{K_3 + p_1(t)} + \frac{V_4 p_2(t)}{K_4 + p_2(t)} \\ \frac{d}{dt}p_2(t) &= \frac{V_3 p_1(t)}{K_3 + p_1(t)} - \frac{V_4 p_2(t)}{K_4 + p_2(t)} - k_1 p_2(t) + k_2 p_N(t) - \frac{v_d p_2(t)}{K_d + p_2(t)} \\ \frac{d}{dt}p_N(t) &= k_1 p_2(t) - k_2 p_N(t). \end{aligned}$$

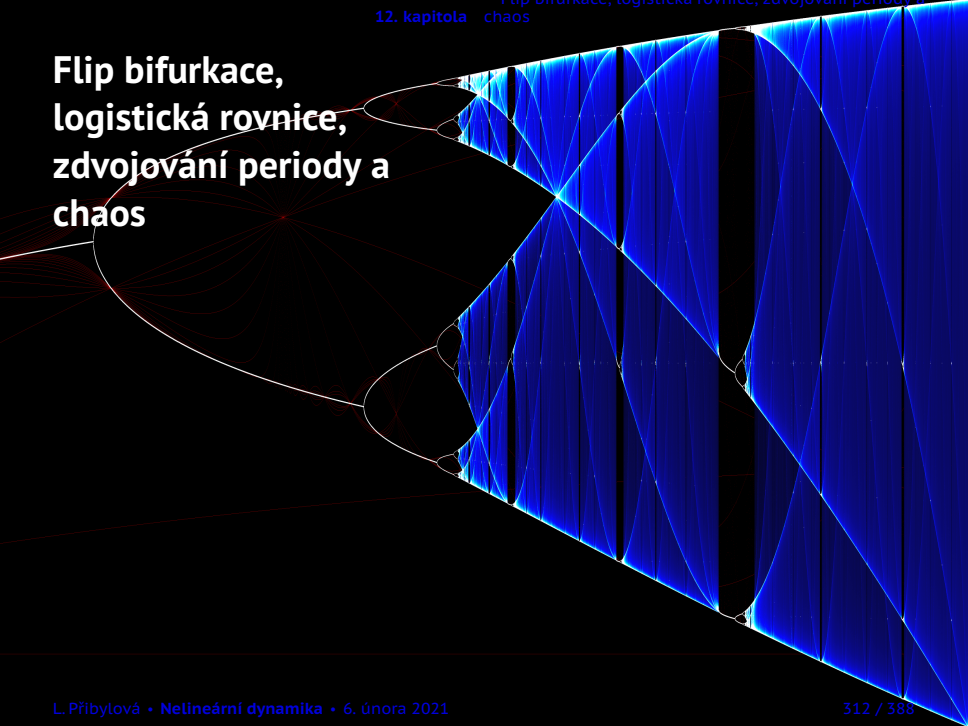
Jako **úkol** si zkuste simulovat v MATCONTu koncentrace mRNA ( $m$ ), celkového PER proteinu ( $p_T = p_0 + p_1 + p_2 + p_N$ ) a jaderného PER proteinu ( $p_N$ ). Hodnoty parametrů jsou  $v_s = 0.76 \mu\text{M/h}$ ,  $v_m = 0.65 \mu\text{M/h}$ ,  $v_d = 0.95 \mu\text{M/h}$ ,  $k_s = 0.38 \text{ 1/h}$ ,  $k_1 = 1.9 \text{ 1/h}$ ,  $k_2 = 1.3 \text{ 1/h}$ ,  $V_1 = 3.2 \mu\text{M/h}$ ,  $V_2 = 1.58 \mu\text{M/h}$ ,  $V_3 = 5 \mu\text{M/h}$ ,  $V_4 = 2.5 \mu\text{M/h}$ ,  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1 \mu\text{M}$ ,  $K_I = 1 \mu\text{M}$ ,  $K_{m1} = 0.5 \mu\text{M}$ ,  $K_d = 0.2 \mu\text{M}$ ,  $n = 4$ . Načtěte cyklus a kontinuujte jej pro parametr  $v_d$ .

## Úkol:



Prostudujte **jednodušší model (5), (6)** z článku Johna Tysona.

**Flip bifurkace,  
logistická rovnice,  
zdvojení periody a  
chaos**



## Co se naučíme:

- popsat flip bifurkaci v diskretním systému



## Co se naučíme:

- popsat flip bifurkaci v diskretním systému
- porozumět dynamice logistického zobrazení

## Co se naučíme:

- popsat flip bifurkaci v diskrétním systému
- porozumět dynamice logistického zobrazení
- seznámit se s pojmem deterministický chaos

## Co se naučíme:

- popsat flip bifurkaci v diskrétním systému
- porozumět dynamice logistického zobrazení
- seznámit se s pojmem deterministický chaos
- pochopit základní vlastnosti chaosu na stanovém zobrazení

## Co se naučíme:

- popsat flip bifurkaci v diskrétním systému
- porozumět dynamice logistického zobrazení
- seznámit se s pojmem deterministický chaos
- pochopit základní vlastnosti chaosu na stanovém zobrazení
- spočítat Ljapunovův exponent a znát jeho význam

## Bifurkace typu flip

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = -(1 + \varepsilon)x(n) + x^3(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

## Bifurkace typu flip

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = -(1+\varepsilon)x(n) + x^3(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Rovnováhy (pevné body zobrazení) splňují

$$f(x, \varepsilon) := -(1+\varepsilon)x + x^3 = x,$$

tj. leží na křivkách  $x = 0$  a  $2 + \varepsilon = x^2$ .

## Bifurkace typu flip

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = -(1+\varepsilon)x(n) + x^3(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Rovnováhy (pevné body zobrazení) splňují

$$f(x, \varepsilon) := -(1+\varepsilon)x + x^3 = x,$$

tj. leží na křivkách  $x = 0$  a  $2 + \varepsilon = x^2$ .

Rovnice má vždy nulovou rovnováhu a protože

$Df(x, \varepsilon) = -1 - \varepsilon + 3x^2$ , je počátek stabilní pro  $\varepsilon < 0$  a pro  $\varepsilon > 0$  je nestabilní.

Parametr  $\varepsilon = 0$  je bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci, mění se stabilita počátku. Všimněte si, že vlastní hodnota  $\lambda = Df(0, 0) = -1$ .



Parametr  $\varepsilon = 0$  je bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci, mění se stabilita počátku. Všimněte si, že vlastní hodnota  $\lambda = Df(0, 0) = -1$ .

Rovnice pro rovnováhy

$$-(2 + \varepsilon)x + x^3 = 0$$

může mít ještě další dvě řešení  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$ , která neleží v okolí počátku pro  $\varepsilon = 0$ .

Co se děje s trajektoriemi začínajícími v okolí počátku pro malá kladná  $\varepsilon$ , když ani pevné body  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  pro malé  $\varepsilon$  nejsou stabilní, protože  $Df(x, \varepsilon) = -1 - \varepsilon + 3x^2$  je pro pevné body v  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  větší než 1?

Co se děje s trajektoriemi začínajícími v okolí počátku pro malá kladná  $\varepsilon$ , když ani pevné body  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  pro malé  $\varepsilon$  nejsou stabilní, protože  $Df(x, \varepsilon) = -1 - \varepsilon + 3x^2$  je pro pevné body v  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  větší než 1?

Podívejme se blíže na cykly délky 2. To jsou pevné body zobrazení  $f^{(2)}$ , tj. zobrazení

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(-(1 + \varepsilon)x + x^3) + (-(1 + \varepsilon)x + x^3)^3$$

Rovnici

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(-(1 + \varepsilon)x + x^3) + (-(1 + \varepsilon)x + x^3)^3 = x$$

lze upravit na tvar

$$x(x^4 - x^2 - x^2\varepsilon + 1)(-\varepsilon - 2 + x^2)(-\varepsilon + x^2) = 0.$$

Rovnici

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(-(1 + \varepsilon)x + x^3) + (-(1 + \varepsilon)x + x^3)^3 = x$$

lze upravit na tvar

$$x(x^4 - x^2 - x^2\varepsilon + 1)(-\varepsilon - 2 + x^2)(-\varepsilon + x^2) = 0.$$

Mezi pevnými body zobrazení  $f^{(2)}$  jsou samozřejmě i pevné body  $x = 0$  a  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  zobrazení  $f$ .

Rovnici

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(-(1 + \varepsilon)x + x^3) + (-(1 + \varepsilon)x + x^3)^3 = x$$

lze upravit na tvar

$$x(x^4 - x^2 - x^2\varepsilon + 1)(-\varepsilon - 2 + x^2)(-\varepsilon + x^2) = 0.$$

Mezi pevnými body zobrazení  $f^{(2)}$  jsou samozřejmě i pevné body  $x = 0$  a  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  zobrazení  $f$ .

Navíc jsou tu ale nové rovnováhy  $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ , které jsou v okolí počátku stabilní, protože  $Df^{(2)}(\pm\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = 1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 \in (0, 1)$  pro  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Rovnici

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1 + \varepsilon)(-(1 + \varepsilon)x + x^3) + (-(1 + \varepsilon)x + x^3)^3 = x$$

lze upravit na tvar

$$x(x^4 - x^2 - x^2\varepsilon + 1)(-\varepsilon - 2 + x^2)(-\varepsilon + x^2) = 0.$$

Mezi pevnými body zobrazení  $f^{(2)}$  jsou samozřejmě i pevné body  $x = 0$  a  $x = \pm\sqrt{2 + \varepsilon}$  zobrazení  $f$ .

Navíc jsou tu ale nové rovnováhy  $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ , které jsou v okolí počátku stabilní, protože  $Df^{(2)}(\pm\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = 1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 \in (0, 1)$  pro  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Vzhledem k vzniku těchto cyklů délky 2 v okolí počátku se tato bifurkace nazývá také bifurkace zdvojení periody (period doubling) PD.

## Věta

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnici, zobrazení)

$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

kde  $f$  je hladká funkce, má pro  $\alpha = \alpha_0$  pevný bod  $x = x_0$  a  $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = -1$ . Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, \alpha_0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(x_0, \alpha_0) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) &\neq 0 && \text{podmínka transverzality.} \end{aligned}$$

Pak je (33) v okolí pevného bodu ekvivalentní systému v normální formě

$$y(n+1) = -(1 + \varepsilon)y(n) \pm y^3(n).$$



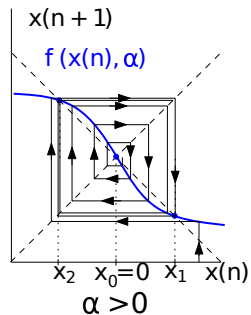
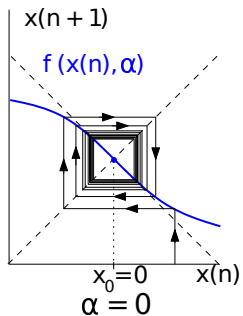
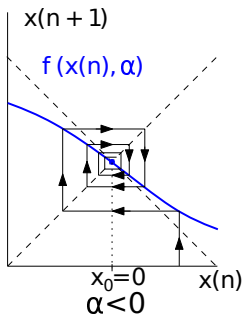
## Poznámka

Podmínka nedegenerovanosti je někdy zapsána jako nenulovost Schwarzovy derivace  $(Sf)(x_0, \alpha_0)$ . Schwarzova derivace je definována (původně v komplexním oboru) jako operátor

$$(Sf)(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Protože v bodě flip bifurkace platí  $f'(x_0, \alpha_0) = -1$ , je  $(Sf)(x_0, \alpha_0) \neq 0$  tatáž podmínka jako podmínka nedegenerovanosti v předchozí větě.

Souvislosti komplexních funkcí a Mandelbrotova fraktálu s flip bifurkací se věnuje část předmětu **PŘ:M9BCF Teorie bifurkací, chaos a fraktály**.



## Logistická rovnice

Dá se říct, že logistická rovnice

$$x(n + 1) = ax(n)(1 - x(n)), \quad (34)$$

s reálným parametrem  $a$  se stala prototypem komplexního chování dynamických nelineárních systémů a bifurkační diagram této rovnice se stal všeobecně známým.

## Úkol:



Najděte kritickou hodnotu flip bifurkace logistického zobrazení (34) s parametrem  $a$ . Proveďte analýzu stability cyklu délky 2. Kdy a jak dojde k destabilizaci?

## Úkol:



Prostudujte chování logistické rovnice v XPPAUTu. Pro inspiraci se podívejte na **video prof. Ghrista**. Spusťte postupně **logistic.ode** a **cobweb.ode**. Prostudujte, jak jsou soubory naprogramovány.

**Video prof. Ghrista** ukazuje, jak při různých hodnotách parametru logistická rovnice mění svou dynamiku. Vidíte tak dynamickou verzi slavného bifurkačního diagramu, který zobrazuje zdvojování periody. Cyklus délky 1 (pevný bod) flip bifurkací ztratí stabilitu a dochází ke vzniku cyklu délky 2, cyklus délky dva flip bifurkací ztratí stabilitu a vzniká cyklus délky 4, ... 8, ... 16 atd.

**Video prof. Ghrista** ukazuje, jak při různých hodnotách parametru logistická rovnice mění svou dynamiku. Vidíte tak dynamickou verzi slavného bifurkačního diagramu, který zobrazuje zdvojování periody. Cyklus délky 1 (pevný bod) flip bifurkací ztratí stabilitu a dochází ke vzniku cyklu délky 2, cyklus délky dva flip bifurkací ztratí stabilitu a vzniká cyklus délky 4, ... 8, ... 16 atd.

Dochází k tomu pro kritické hodnoty parametru  $a_2, a_4, a_8, \dots$ . Tato tzv. Feigenbaumova kaskáda zdvojování periody je obecný fenomén a číslo

$$\mu_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2^k} - a_{2^{k-1}}}{a_{2^{k+1}} - a_{2^k}} \doteq 4.6692$$

se nazývá Feigenbaumovo číslo. Nejpřekvapivější je, že tato konstanta je univerzální pro mnoho diferenčních systémů, ve kterých dochází ke kaskádové flip bifurkaci – **jevu zdvojování periody**.

V programu XPPAUT si bifurkační diagram zobrazíme s pomocí programu logbif.ode:



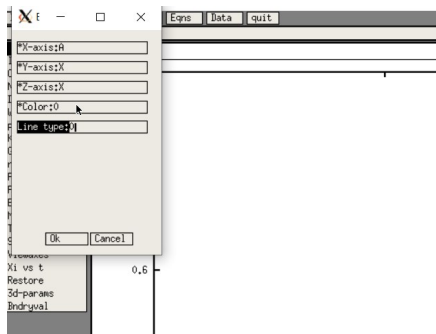
V programu XPPAUT si bifurkační diagram zobrazíme s pomocí programu logbif.ode:

```
# logbif.ode
# bifurkační diagram diskrétní logistické rovnice
# zvolte nejdříve nespojitě vykreslování dat - Graphic stuff, Edit
curve, edit 0, line type 0
# parametr a měňte v intervalu <2,4> - Initialconds, Range
 $x' = a * x * (1 - x)$ 
 $a' = a$ 
init x=.1
init a=2
@ maxstor=100000,total=500,trans=350,meth=discrete
@ xlo=2,xhi=4.001,ylo=0,yhi=1.001,xp=a,yp=x
done
```

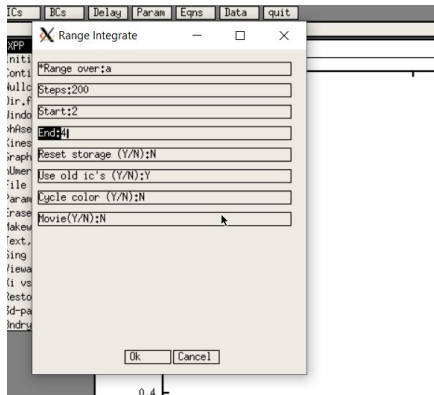
Všimněte si, že rovnice jsou v souboru popsány dvě – druhá rovnice je rovnicí pro parametr, přičemž `meth=discrete` určuje diskrétní krok. Bez ní by nebylo možné vykreslovat prostor „stavových proměnných“; `trans=350` přeskočí vykreslování prvních 350 iterací.

Všimněte si, že rovnice jsou v souboru popsány dvě – druhá rovnice je rovnicí pro parametr, přičemž meth=discrete určuje diskrétní krok. Bez ní by nebylo možné vykreslovat prostor „stavových proměnných“; trans=350 přeskočí vykreslování prvních 350 iterací.

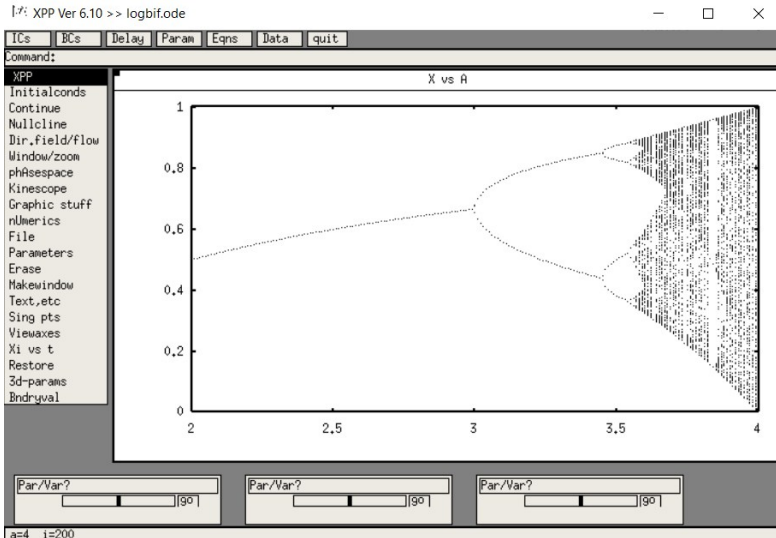
Pro grafické vykreslení dat zvolte Graphic stuff, Edit curve: edit 0, line type 0



Pro vykreslení bifurkačního diagramu je třeba spustit najednou více trajektorií volbou Initialconds, Range



Bifurkační diagram samozřejmě lze spustit hustěji – zde byl zvolen grid 200 a „parametr“  $a \in \langle 2, 4 \rangle$ .



## Úkol:



Prostudujte chování  
Rickerovy rovnice populační  
dynamiky

$$x(n + 1) = ax(n)e^{-x(n)}.$$

## Deterministický chaos

Co je to chaos? Slovo chaos se odvozuje z řeckého  $\chi\alpha\omicron\varsigma$  a znamená nepředvídatelnost. Deterministický chaos je neperiodické deterministické chování, které je

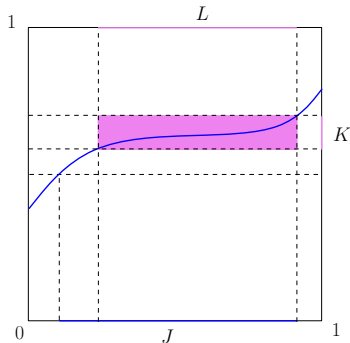
- velice citlivé na počáteční podmínky,
- topologicky transitivní - což znamená, že libovolný interval transformuje na libovolný další interval
- má husté periodické trajektorie

**DETERMINISTICKÝ NEZNAMENÁ PŘEDVÍDATELNÝ!!!**

Nechť  $f : I \rightarrow I$  je spojitě zobrazení na  $I = \langle 0, 1 \rangle$ . Uvažujme diskrétní dynamický systém  $\{\mathbb{N}, I, f^n\}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Nechť  $J, K \subset I$  jsou uzavřené intervaly.

## Definice

Řekneme, že  $J$  pokrývá  $K$  pod  $f$ , zapisujeme  $J \rightarrow K$ , jestliže existuje uzavřený interval  $L \subset J$  tak, že  $f(L) = K$ .



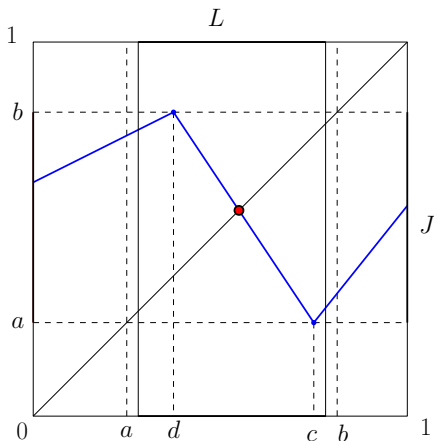


## Věta (O pevném bodě)

*Jestliže  $J \rightarrow J$  pod  $f$ , pak má  $f$  v  $J$  pevný bod.*

### Důkaz:

Nechť  $J = \langle a, b \rangle$ . Podle definice existuje uzavřený interval  $L \subset J$  takový, že  $f(L) = J$ , tedy existuje  $c, d \in L$  splňující  $f(c) = a \leq c$  a  $f(d) = b \geq d$ . Podle věty o střední hodnotě nabývá spojitá funkce  $g(x) = f(x) - x$  nulové hodnoty na  $L \subset J$ .



Uvědomme si nyní, že pokud  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$  pod  $f$ , pak existuje uzavřený interval  $J \subset I_0$  tak, že  $f^{(k)}(J) \subset I_k$  pro všechna  $k = 0, 1, \dots, n-1$  a  $f^{(n)}(J) = I_n$ . Volbou  $I_n = I_0$  dostáváme s použitím věty o pevném bodě následující tvrzení.

## Věta

*Jestliže  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$  pod  $f$ , pak má  $f^{(n)}$  v  $I_0$  pevný bod  $x$ , pro který platí  $f^{(i)}(x) \in I_i$  pro  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .*

## Věta

Jestliže  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$  pod  $f$ , pak má  $f^{(n)}$  v  $I_0$  pevný bod  $x$ , pro který platí  $f^{(i)}(x) \in I_i$  pro  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Slavná Li–Yorkeho věta „Perioda 3 implikuje chaos“ je důsledkem Šarkovského věty, kterou si uvedeme v předmětu **PřF:M9BCF Teorie bifurkací, chaos a fraktály**.

## Věta (Li-Yorke)

Uvažujme spojitě zobrazení  $f : I \rightarrow I$ , které má cyklus délky 3. Pak má  $f$  také cykly libovolné délky  $n \geq 1$ .

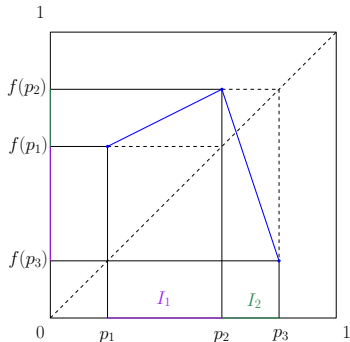
**Důkaz:**

Uvažujme cyklus délky 3  $\{p_1, p_2, p_3\}$ , tj.

$$p_2 = f(p_1), p_3 = f(p_2), p_1 = f(p_3)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $p_1 < p_2 < p_3$ .

Označme dva intervaly  $I_1 = \langle p_1, p_2 \rangle$  a  $I_2 = \langle p_2, p_3 \rangle$ . Pak  $I_1$  pokrývá  $I_2$  a  $I_2$  pokrývá  $I_1$  i  $I_2$ .



Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  má tedy  $f^{(n)}$  pevný bod, protože platí

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1,$$

kde  $I_2$  je zde obsaženo  $(n - 1)$ -krát. Tento pevný bod nemůže odpovídat cyklu délky  $k < n$  (kromě  $k = 3$ , který je předpokládán), protože pokud by platilo  $f^{(k)}(x) = x$  pro  $k < n$ , pak  $x \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ , což je jediný cyklus, námi předpokládaný délky 3.

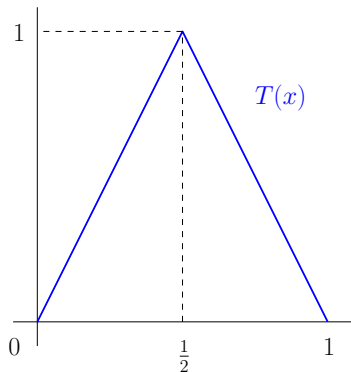
## Úkol:



Ukažte, že pro  $a_F = 1 + 2\sqrt{2}$  má logistická rovnice (34) cyklus délky 3, přičemž pro tuto kritickou hodnotu parametru dochází k bifurkaci typu fold, přičemž stabilní a nestabilní 3 cykly vznikají pro  $a > a_F$  a zaniknou na  $a = a_F$ .

**Tent map** je příkladem jednoduchého zobrazení  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ , které vykazuje chaotické chování.

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 2 - 2x & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$





Co víc, dynamický systém příslušný logistickému zobrazení

$$x \mapsto 4x(1 - x)$$

na  $\langle 0, 1 \rangle$  je topologicky ekvivalentní systému  $\{\mathbb{N}, \langle 0, 1 \rangle, T^n\}$ , a proto vykazuje také chaos. Totéž platí pro jakékoliv jiné zobrazení  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ , které má jedno maximum.

Co víc, dynamický systém příslušný logistickému zobrazení

$$x \mapsto 4x(1 - x)$$

na  $\langle 0, 1 \rangle$  je topologicky ekvivalentní systému  $\{\mathbb{N}, \langle 0, 1 \rangle, T^n\}$ , a proto vykazuje také chaos. Totéž platí pro jakékoliv jiné zobrazení  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ , které má jedno maximum.

Na jednoduchém stanovém zobrazení si ukážeme základním mechanismem vzniku chaotických trajektorií – je "stretch and fold", natažení a ohyb.

Číslo  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  má binární zápis

$$x = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \cdots = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots,$$

kde  $\omega_k$  jsou cifry 0 nebo 1. Pokud  $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ , pak

$$T(x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) = 0.\omega_2\omega_3 \dots$$

Pokud  $x \in (\frac{1}{2}, 1 \rangle$ , pak  $1 - x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$  splňuje

$$T(1 - x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) = 0.\omega_2\omega_3 \dots$$

Přitom ale protože

$$1 - x = \frac{1}{2} - \frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{\omega_1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\omega_2}{2^3} + \dots,$$

je binární zápis  $x$  a  $1 - x$  komplementární (na místě nuly stojí jednička a naopak). Označíme-li komplementy  $\omega_k$  a  $\bar{\omega}_k$ , platí

$$T(x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3\dots) = \begin{cases} 0.\omega_2\omega_3\dots & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 0.\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\dots & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Trajektorii  $x$ ,  $T(x)$ ,  $T^{(2)}(x)$ , ... stanového zobrazení si proto můžeme představit jako posun (případně komplement posunu) v binárním zápise počáteční hodnoty  $x$ . Ještě si uvědomme, že metrika

$$d(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k}$$

vytváří na  $\langle 0, 1 \rangle$  úplný metrický prostor (je analogická běžné metrice decimální). Dostáváme takto následující vlastnosti.

- Citlivost na počáteční podmínky – předpokládejme, že známe počáteční podmínku  $x_0$  až do  $N$ -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny  $2^{-N}$  a jejich trajektorie. Po  $N$  iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.

- Citlivost na počáteční podmínky – předpokládejme, že známe počáteční podmínku  $x_0$  až do  $N$ -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny  $2^{-N}$  a jejich trajektorie. Po  $N$  iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.
- Topologická transitivnost (mixování) – uvažujme interval počátečních hodnot, které se liší poprvé na  $N$ -tém binárním místě. Po  $N$  iteracích dojde k posunu o těchto  $N$  míst a interval se rozprostře na celý  $\langle 0, 1 \rangle$ .

- Citlivost na počáteční podmínky – předpokládejme, že známe počáteční podmínku  $x_0$  až do  $N$ -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny  $2^{-N}$  a jejich trajektorie. Po  $N$  iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.
- Topologická transitivnost (mixování) – uvažujme interval počátečních hodnot, které se liší poprvé na  $N$ -tém binárním místě. Po  $N$  iteracích dojde k posunu o těchto  $N$  míst a interval se rozprostře na celý  $\langle 0, 1 \rangle$ .
- Má husté periodické trajektorie – binární zápis každého racionálního čísla je zakončen opakující se skupinou cifer, a proto generuje periodické trajektorie (včetně pevných bodů). Iracionální čísla mají binární zápis, který se neopakuje. Proto jsou periodické trajektorie husté (jsou libovolně blízko jiné dané trajektorii) v množině chaotických trajektorií.



## Úkol:



Ukažte, že  $h : x \mapsto \sin^2 \frac{\pi x}{2}$  je homeomorfismus na  $\langle 0, 1 \rangle$  a platí  $f(h(x)) = h(T(x))$  pro logistické zobrazení  $f(x) = 4x(1 - x)$ ; zobrazení jsou tedy topologicky konjugovaná.

## Jak měřit chaos?

Uvažujme trajektorii  $x(n)$  splňující počáteční úlohu

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x_0 = x,$$

přičemž  $f$  je skoro všude hladká. Pro tuto trajektorii definujme číslo

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \ln |f'(x(\nu))|$$

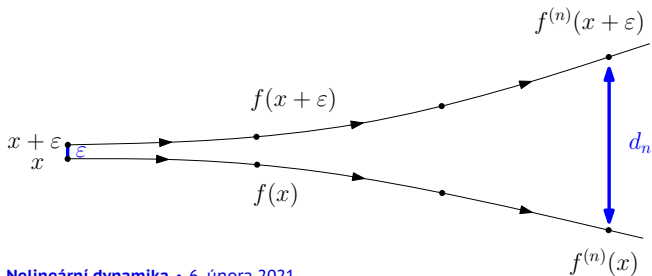
Toto číslo představuje **míru separace infinitesimálně blízkých trajektorií** od této trajektorie:

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x + \varepsilon) - f^{(n)}(x)|}{\varepsilon} = e^{\lambda n}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Pokud existuje  $f'(x(\nu))$ ,  $\nu \in \{1, \dots, n\}$ , v každém bodě trajektorie z  $x = x(1)$ , pak v daném bodě  $x$  platí

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f^{(n)}(x + \varepsilon) - f^{(n)}(x)|}{\varepsilon} &= |(f^{(n)}(x))'| = \\ &= |f'(f^{(n-1)}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x)| = |f'(x(\nu))| \cdot \dots \cdot |f'(x(1))|, \text{ tj.} \\ &\quad \sum_{\nu=1}^n \ln |f'(x(\nu))| \end{aligned}$$

je logaritmus tohoto poměru, tedy míra růstu této vzdálenosti. Tato míra popisuje, jak moc se původně blízké trajektorie od sebe vzdalují.



## Definice

Číslo  $\lambda(x)$  (pokud limita existuje) označujeme jako Ljapunovův exponent trajektorie. Pokud je  $x$  atrahujícím stabilním pevným bodem zobrazení  $f$ , definujeme  $\lambda(x) = -\infty$ .

## Definice

Číslo  $\lambda(x)$  (pokud limita existuje) označujeme jako Ljapunovův exponent trajektorie. Pokud je  $x$  atrahujícím stabilním pevným bodem zobrazení  $f$ , definujeme  $\lambda(x) = -\infty$ .

Pokud podél trajektorie  $x(n)$  dochází ke kontrakci, je  $\lambda(x) < 0$ , v případě asymptotické expanze je  $\lambda(x) > 0$ .

## Definice

Číslo  $\lambda(x)$  (pokud limita existuje) označujeme jako Ljapunovův exponent trajektorie. Pokud je  $x$  atrahujícím stabilním pevným bodem zobrazení  $f$ , definujeme  $\lambda(x) = -\infty$ .

Pokud podél trajektorie  $x(n)$  dochází ke kontrakci, je  $\lambda(x) < 0$ , v případě asymptotické expanze je  $\lambda(x) > 0$ .

Platí, že pokud je trajektorie omezená a její Ljapunovův exponent je kladný, je trajektorie nutně chaotická.

## Úkol:



Ukažte, že Ljapunovův exponent stanového zobrazení je  $\ln 2$ .

## Úkol:



Pro která  $p$  jsou trajektorie  
 $x(n+1) = T_p(x(n))$   
chaotické?

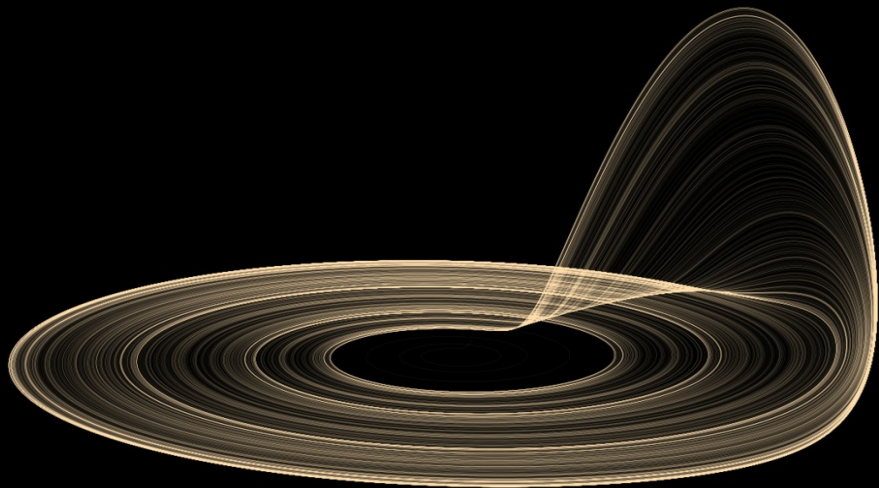
$$T_p(x) = \begin{cases} px & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ p(1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



Ve více dimenzích závisí míra separace blízkých trajektorií na počátečním směru separace, proto se definuje Ljapunovovo spektrum ( $n$  hodnot v bazických směrech, řazené dle velikosti) a maximální Ljapunovův exponent. Program XPPAUT umí maximální Ljapunovův exponent trajektorie numericky vypočítat. Samozřejmě ale nepočítá limitu, ale pouze přibližnou konečnou sumu.

Hodnoty Ljapunovových exponentů jsou invariantní vzhledem k širokému spektru transformací souřadnic (ergodická teorie, Oseledecova věta) a limity existují pro skoro všechna  $x$  a na  $x$  nezávisí. Je to tedy rozumná volba míry chaosu.

# Chaos ve spojitých systémech



## Co se naučíme:

- popsat a porozumět základní dynamice Rosslerova systému s využitím Poincarého řezu (zdvojování periody)

## Co se naučíme:

- popsat a porozumět základní dynamice Rosslerova systému s využitím Poincarého řezu (zdvojování periody)
- vidět chaos kolem nás

## Co se naučíme:

- popsat a porozumět základní dynamice Rosslerova systému s využitím Poincarého řezu (zdvojování periody)
- vidět chaos kolem nás
- popsat Lorenzův systém

## Co se naučíme:

- popsat a porozumět základní dynamice Rosslerova systému s využitím Poincarého řezu (zdvojování periody)
- vidět chaos kolem nás
- popsat Lorenzův systém
- provést základní analýzu Lorenzova systému (subkritická Hopfova bifurkace)

## Rösslerův systém

## Rösslerův systém

Kapitola o chaosu ve spojitých systémech se většinou zabývá Lorenzovým systémem. Možná jste i v úvodním obrázku očekávali Lorenzův atraktor. Ano, dostaneme se k němu – později. Symetrický Lorenzův systém jsme si již představili a než se budeme zabývat tímto modelem proudění, představíme si model, který je jednodušší. V roce 1976 **jej publikoval Otto Rössler** právě proto, aby na nejjednodušším možném modelu ukázal základní vlastnost trajektorií chaotického atraktoru. Vynechal symetrii a ponechal jediný důležitý princip:



## Rösslerův systém

Kapitola o chaosu ve spojitých systémech se většinou zabývá Lorenzovým systémem. Možná jste i v úvodním obrázku očekávali Lorenzův atraktor. Ano, dostaneme se k němu – později. Symetrický Lorenzův systém jsme si již představili a než se budeme zabývat tímto modelem proudění, představíme si model, který je jednodušší. V roce 1976 **jej publikoval Otto Rössler** právě proto, aby na nejjednodušším možném modelu ukázal základní vlastnost trajektorií chaotického atraktoru. Vynechal symetrii a ponechal jediný důležitý princip:

### NATAŽENÍ a OHYB

Ač je sám biochemik, teorií chaosu byl od počátku fascinován a Lorenzův model i Li-Yorkeho věta jej zavedla mezi matematiky. Topologický princip natažení a ohybu si prý uvědomil při pozorování **stroje na bonbóny**. Tento princip vede k mísení, které má přesně vlastnosti chaosu – citlivost na počáteční podmínky, transitivitu i hustotu trajektorií. Jen si představte, že byste do stroje dali žlutou a modrou sladkou hmotu...

Ač je sám biochemik, teorií chaosu byl od počátku fascinován a Lorenzův model i Li-Yorkeho věta jej zavedla mezi matematiky. Topologický princip natažení a ohybu si prý uvědomil při pozorování **stroje na bonbóny**. Tento princip vede k mísení, které má přesně vlastnosti chaosu – citlivost na počáteční podmínky, transitivitu i hustotu trajektorií. Jen si představte, že byste do stroje dali žlutou a modrou sladkou hmotu...

**Bonbóny by byly krásně zelené.**

## Rösslerův systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

nejprve prostudujeme pro parametr  $b = 0$  a dost velké  $c > 0$ . V tom případě je rovina  $z = 0$  invariantní a dynamika na ní je dána lineárním systémem s Jacobiho maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Počátek je tedy na této rovině střed.

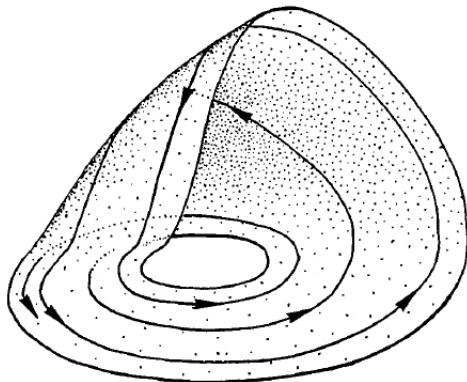
Navíc třetí rovnice systému je tvaru

$$\dot{z} = z(x - c)$$

a pro hodnoty  $x$  v okolí počátku budou trajektorie přitahovány po oscilující trajektorii směrem k této rovině. Při malé změně parametru  $b$  musí být díky větě o spojitě závislosti na parametrech v blízkosti roviny  $z = 0$  nějaká stabilní invariantní množina.

Pro pochopení topologie chaotického atraktoru, který vzniká pro nenulová  $b$ , jsem si půjčila krásné obrázky z knihy Ralpa Abrahama a Christophera Shawa s názvem Dynamics: The Geometry Of Behavior. Atraktor má asi takovýto tvar:

Pro pochopení topologie chaotického atraktoru, který vzniká pro nenulová  $b$ , jsem si půjčila krásné obrázky z knihy Ralpa Abrahama a Christophera Shawa s názvem Dynamics: The Geometry Of Behavior. Atraktor má asi takovýto tvar:

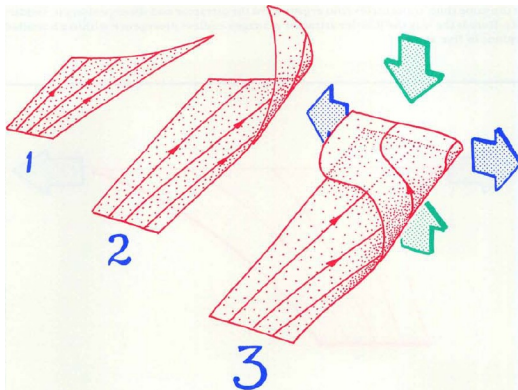


Abraham and Shaw (1983)

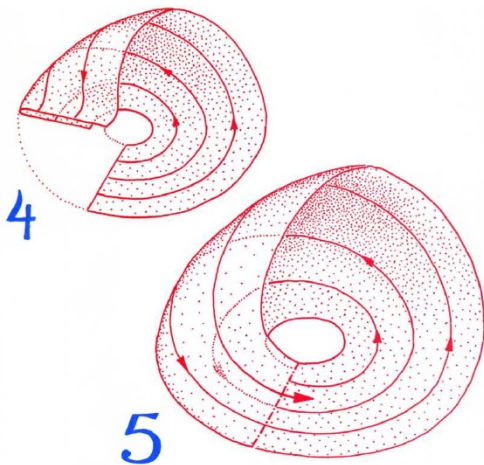




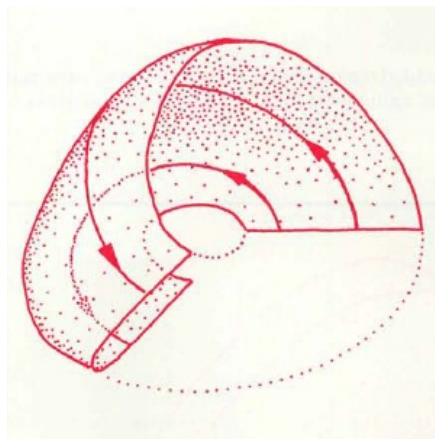
Pokud bychom sledovali, co se děje s blízkými trajektoriemi, zjistíme, že v jednom směru se od sebe vzdalují. Invariantní varieta se ale ohýbá.



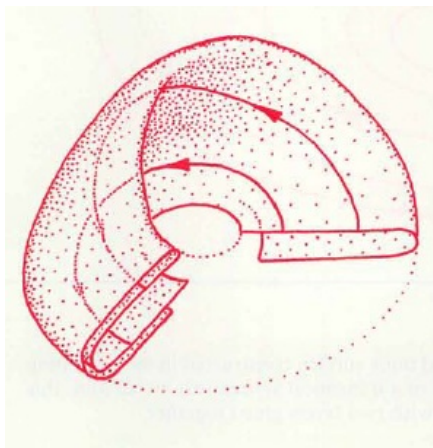
Invariantní varieta se ohne natolik, že ji druhý (přitahující) směr atrahuje do blízkosti sebe sama.



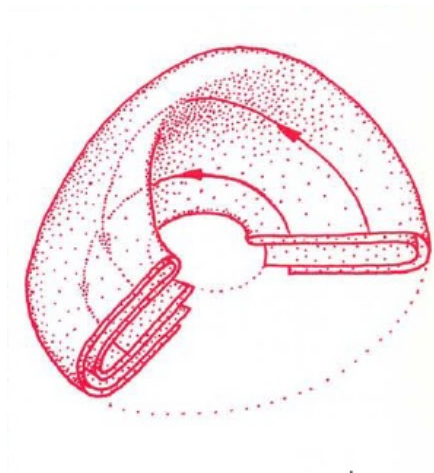
Co se stane, když stejný oběh provedeme ještě jednou?



A ještě jednou?



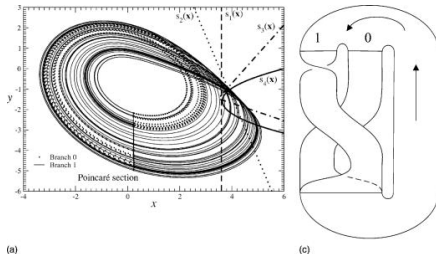
A ještě jednou?



To, co jsme sledovali, je Poincarého řez invariantní varietou. V řezu Poincarého řezu (jmenuje se Lorenzův řez) vzniká fraktál – Cantorova množina.

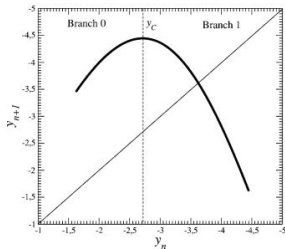


A teď se podívejte, jak vypadá to sledované Poincarého zobrazení (někdy se mu říká first return map). Nepřipomíná vám něco?



(a)

(c)



(b)

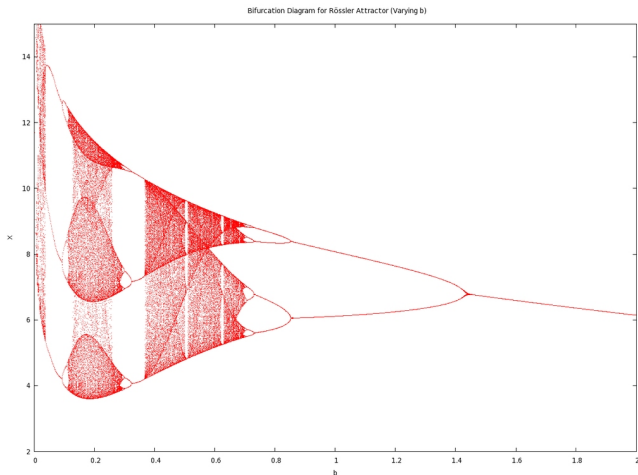
## Úkol:



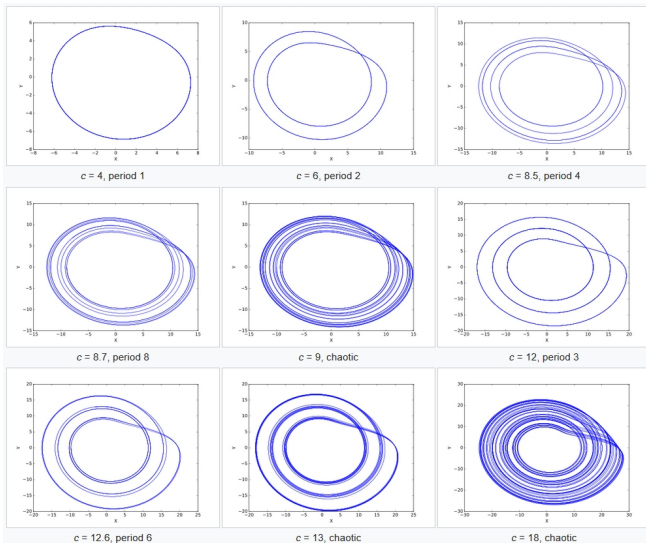
Nakreslete v programu XPPAUT Poincarého zobrazení (nUmeric, Poincaré map) jako Ruelle plot (nUmeric, rUelle plot)  $y(n) \times y(n + 1)$  pro Rösslerův systém.



Dokonce, pokud budeme měnit hodnotu parametru, dostaneme bifurkační diagram zdvojování periody (zde kontinua parametru  $b$ ,  $a = 0.2$ ,  $c = 5.7$ ).



Stabilní trajektorie (cykly a chaotické atraktory) na invariantní varietě pro různé hodnoty  $c$ ,  $a = b = 0.1$ :



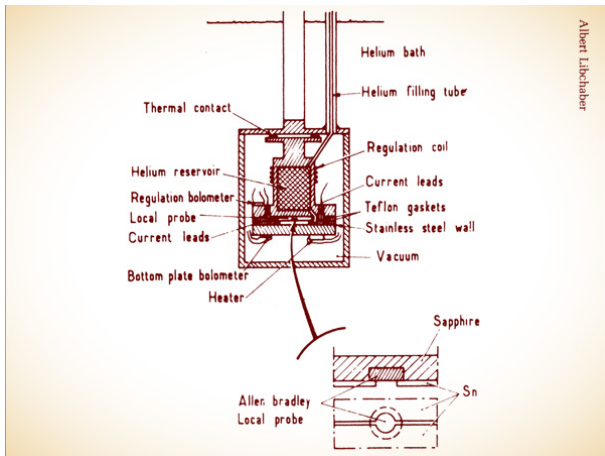
## Úkol:



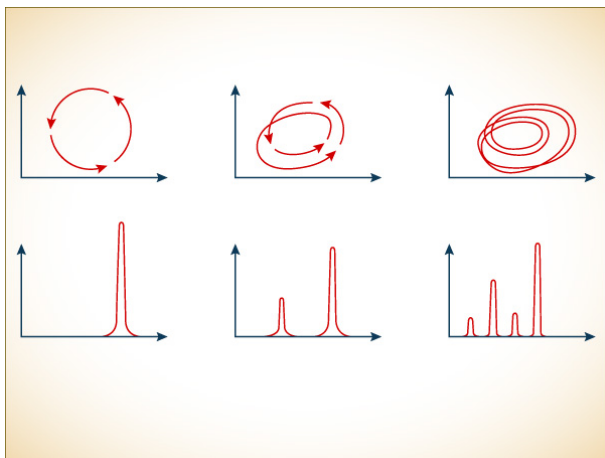
Nakreslete v programu XPPAUT bifurkační diagram Poincarého zobrazení pro Rösslerův systém (doplňte rovnici  $b' = 0$  nebo  $c' = 0$  podle toho, kterou kontinuaci chcete reprodukovat).

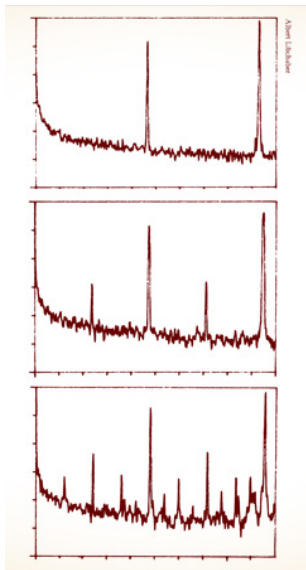
# Zdvojování periody a chaos kolem nás

Kromě Lorenzova modelu proudění, který je velmi zjednodušeným modelem počasí, si představíme historicky velmi důležitý pokus Alberta Libchabera. V roce 1977 vytvořil nerezový válec, do kterého vložil kapalné hélium a spodní plochu válce zahříval.



Experimentálně tak ověřil, že turbulentní proudění, které vzniká v kapalném heliu poté, co se rozpadne základní konvekční oscilace, vytváří kaskádu zdvojení periody.





V roce 1982 publikoval podobný **pokus s rtuťí**, kde dokonce změnil odhad Feigenbaumovy konstanty. V rotujících konvektivních proudech rtuťi se totiž indukuje stejnosměrné magnetické pole, které bylo měřitelné pomocí tlumení elektrických oscilátorů (princip frekvenční analýzy).

Dnes se tento fyzik, který spolu s Feigenbaumem za své objevy dostal Wolfovu cenu za fyziku, zabývá evolucí. Publikuje články na hranici fyziky, chemie a biochemie, které vysvětlují možný vznik aminokyselin, bílkovin, a složitých struktur.



Dnes se tento fyzik, který spolu s Feigenbaumem za své objevy dostal Wolfovu cenu za fyziku, zabývá evolucí. Publikuje články na hranici fyziky, chemie a biochemie, které vysvětlují možný vznik aminokyselin, bílkovin, a složitých struktur.

Video přednáška Alberta Libchabera  
**Origins of life**

Pokud si chcete doma pohrát, můžete si vyzkoušet pokus s vodovodním kohoutkem. Není to úplně jednoduché, nehodí se k tomu páková baterie, ale naopak starý dobrý (ideálně dokonce i kapající) kohoutek je dostačujícím laboratorním vybavením. Pokud je kohoutek zavřený, ale lehce nedovírá, voda kape. Kap, ticho, kap, ticho, kap, ticho. Dokáže to být docela rušivý periodický zvuk. Stále stejné kap a ticho. Kap a ... to je cyklus (délky 1). Pokud budete dostatečně obratní a kohoutek maličko povolíte, bude kapat jinak. Kap kap ticho kap kap ticho. Pak snad dokážete nastavit i cyklus čtyř kapek... Rychle totiž začne kapat aperiodicky. Právě vidíte a slyšíte **chaotický atraktor**.

Za posledních 5 dekad došlo díky objevu všudypřítomnosti chaosu k novému pohledu na mnoho oblastí. Naleznete články

- o chaotické dynamice v neurovědě (zdá se, že v mozku je chaos žádaný (!), naopak stabilní periodická dynamika je nežádaný stav – epileptický záchvat, viz **Nature**; naopak excitabilní buňky v srdečním svalu pracují synchronně periodicky a chaotická dynamika vede k **fibrilaci srdce**)

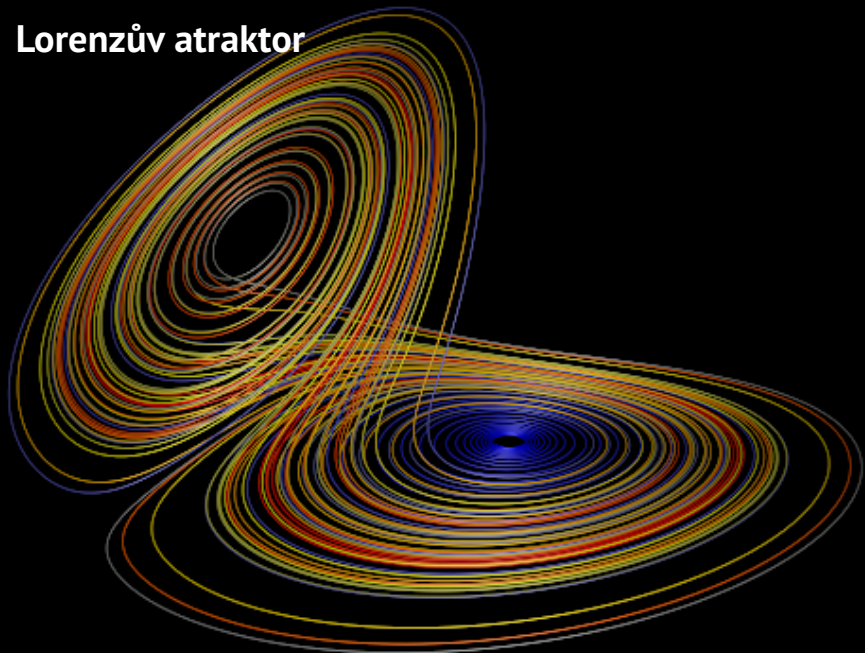
Za posledních 5 dekad došlo díky objevu všudypřítomnosti chaosu k novému pohledu na mnoho oblastí. Naleznete články

- o chaotické dynamice v neurovědě (zdá se, že v mozku je chaos žádaný (!), naopak stabilní periodická dynamika je nežádaný stav – epileptický záchvat, viz **Nature**; naopak excitabilní buňky v srdečním svalu pracují synchronně periodicky a chaotická dynamika vede k **fibrilaci srdce**)
- o chaotické dynamice ve Vesmíru a Sluneční soustavě (je popsána a vysvětlena chaotická rotace Saturnova měsíce Hyperionu a osy rotace Marsu, NASA pomocí znalosti chaotické dynamiky poslala sondu ISEE-3/ICE již v roce 1985 téměř bez paliva na cestu ke kometě, Saturnovy prstence se zkoumají pro jejich **fraktální strukturu** chaotického atraktoru, dokonce je spočten maximální Ljapunovův exponent pro **Sluneční soustavu**); na základě Ljapunovova exponentu pak lze odhadovat prediktabilitu systému: rotaci Hyperionu na 36 dní, vychýlení osy rotace Marsu a stabilitu Sluneční soustavy na 5 milionů let

- o chaotické dynamice v geofyzice a klimatologii (modely chaotického chování geomagnetického pole Země – např. **Rikitakeho model**, původní **klimatické geofyzikální modely** skupiny kolem **Michaela Ghila**, jehož monografie dnes pokrývají geofyzikální otázky klimatologie, oceánských proudů apod.

- o chaotické dynamice v geofyzice a klimatologii (modely chaotického chování geomagnetického pole Země – např. **Rikitakeho model**, původní **klimatické geofyzikální modely** skupiny kolem **Michaela Ghila**, jehož monografie dnes pokrývají geofyzikální otázky klimatologie, oceánských proudů apod.
- o chaotické dynamice v ekonomii a financích (makroekonomie i mikroekonomie, pohled na burzu, to vše se od dob, kdy ekonomové věřili v neviditelnou ruku trhu, tj. stabilní rovnováhu, velmi změnilo – nejprve ekonomové připustili, že mohou vznikat endogenní cykly v IS-LM modelu, Goodwinově modelu apod. a nyní se od konce 20. století vydávají **monografie**, které se věnují i chaotické dynamice)

# Lorenzův atraktor



# Lorenzův atraktor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$



## Lorenzův atraktor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

Připomeňme, že pro  $r > 1$  je počátek nestabilní a dva další symetrické body jsou stabilní.

## Lorenzův atraktor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

Připomeňme, že pro  $r > 1$  je počátek nestabilní a dva další symetrické body jsou stabilní. Charakteristický polynom příslušný těmto symetrickým bodům je

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1),$$

kde pro  $r > 1$  jsou všechny koeficienty kladné a tudíž má alespoň jeden záporný kořen. Další dva mohou být i komplexní.

Nalezneme kritickou hodnotu Hopfovy bifurkace. Komplexně sdružená vlastní čísla leží na imaginární ose, když pro charakteristický polynom a jeho vlastní čísla  $\lambda_1$  a  $\pm i\omega$  platí

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = 0,$$

tj.

$$\lambda^3 - \lambda_1\lambda^2 + \omega^2\lambda - \lambda_1\omega^2 = 0.$$

Nalezneme kritickou hodnotu Hopfovy bifurkace. Komplexně sdružená vlastní čísla leží na imaginární ose, když pro charakteristický polynom a jeho vlastní čísla  $\lambda_1$  a  $\pm i\omega$  platí

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = 0,$$

tj.

$$\lambda^3 - \lambda_1\lambda^2 + \omega^2\lambda - \lambda_1\omega^2 = 0.$$

Pro kritickou hodnotu Hopfovy bifurkace tedy platí nutná podmínka

$$(\sigma + b + 1)(r + \sigma)b = 2\sigma b(r - 1),$$

tj.

$$r_{HB} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Protože  $r > 1$ , musí být navíc  $\sigma > b + 1$ .

## Úkol:



Vhodně zvolte parametry a vykreslete fázové portréty v některém z vhodných softwarů tak, aby byl vidět jev Hopfovy bifurkace. V programu MATCONT nakreslete bifurkační diagram pro parametry blízké Hopfově bifurkaci. Všimněte si, že jde o subkritickou Hopfovou bifurkaci se vznikem nestabilního limitního cyklu. Volte parametr  $\sigma = 10$  a  $b = 8/3$ .

Schéma bifurkačního diagramu pro kladná  $r$ ,  $\sigma = 10$  a  $b = 8/3$  vypadá nějak takto:

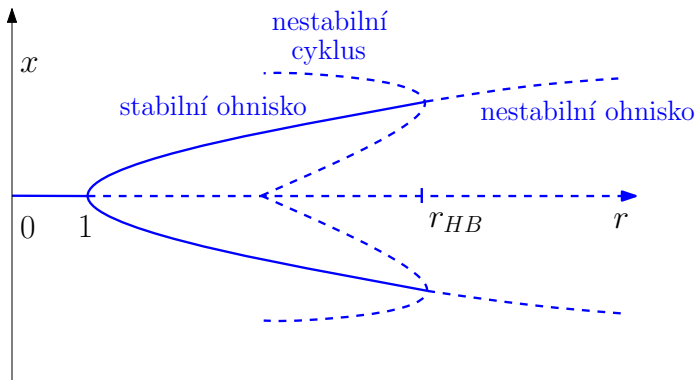
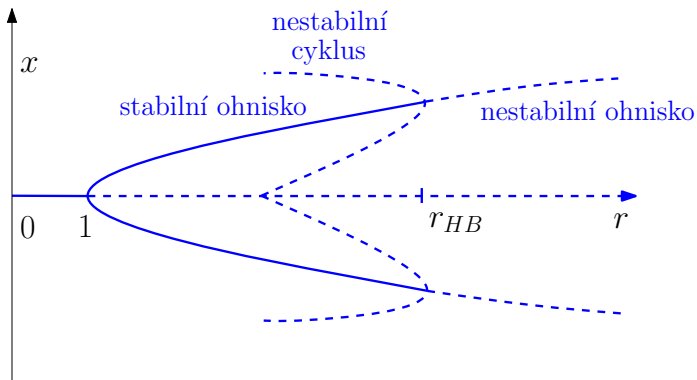


Schéma bifurkačního diagramu pro kladná  $r$ ,  $\sigma = 10$  a  $b = 8/3$  vypadá nějak takto:

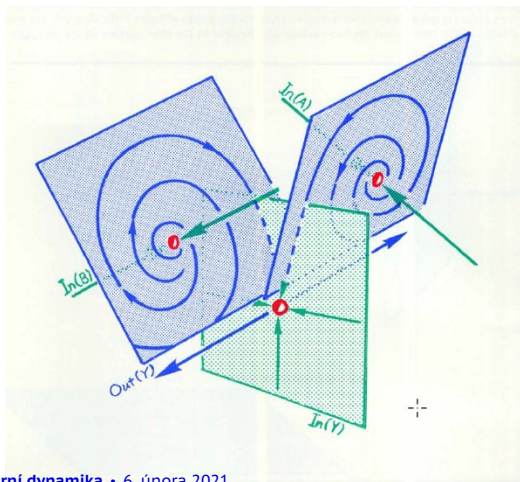


Co se děje pro  $r > r_{HB}$ , kdy zanikne stabilní ohnisko (připomeňme, že představuje stabilní konvekční proudění)?

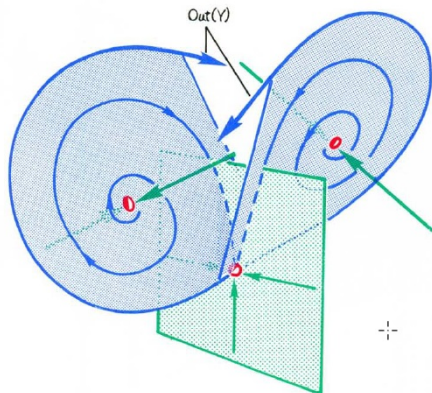
V navazujícím předmětu **PřF:M9BCF Teorie bifurkací, chaos a fraktály** si ukážeme, že dynamika Lorenzova systému je taková, že trajektorie nemohou opustit určitou množinu a dokonce každá podmnožina stavového prostoru exponenciálně zmenšuje svůj objem.



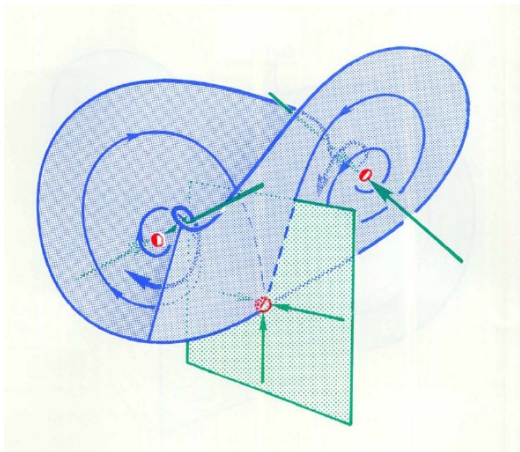
V navazujícím předmětu **PřF:M9BCF Teorie bifurkací, chaos a fraktály** si ukážeme, že dynamika Lorenzova systému je taková, že trajektorie nemohou opustit určitou množinu a dokonce každá podmnožina stavového prostoru exponenciálně zmenšuje svůj objem. Znovu si vypůjčuji obrázky z knihy Abrahama a Shawa:



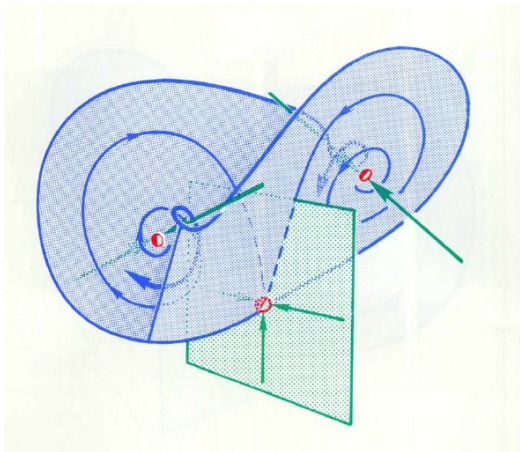
Jakmile trajektorie překročí separatrix sedla v počátku, začnou se navíjet do blízkosti variety, na které leží druhé ohnisko.



To je ale také nestabilní. Jde o analogickou situaci natažení a ohybu, jako jsme viděli u Rösslerova atraktoru. Zde je ale mnohem komplikovanější.



To je ale také nestabilní. Jde o analogickou situaci natažení a ohybu, jako jsme viděli u Rösslerova atraktoru. Zde je ale mnohem komplikovanější.



**Mnoho trajektorií na atraktoru  
Jedna chaotická trajektorie**

**Mnoho trajektorií na atraktoru**  
**Jedna chaotická trajektorie**

K chaosu nevede jediná cesta...

**Mnoho trajektorií na atraktoru  
Jedna chaotická trajektorie**

K chaosu nevede jediná cesta...

**3D atraktory**

Děkuji Vám za pozornost!



