M9BCF Příklady - redukce na centrální varietu

Lenka Přibylová

pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

12. října 2020

Příklad

Redukujte systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - y^2 \end{aligned}$$

na jeho centrální varietu v okolí počátku a popište dynamiku systému v okolí počátku.

Příklad

Redukujte systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - y^2 \end{aligned}$$

na jeho centrální varietu v okolí počátku a popište dynamiku systému v okolí počátku.

Počátek $[0,0]$ je rovnováha. Jacobiho matice je
$D\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 2x & -1-2y \end{pmatrix}$, tj. $D\boldsymbol{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Vlastní hodnoty jsou tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Hledáme tedy centrální varietu jako graf funkce $y = \nu(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ v okolí počátku, která je řešením

$$-\nu(x) + x^2 - \nu^2(x) = \nu'(x)(-x\nu(x)).$$

Dosazením Taylorova rozvoje funkce $\nu(x)$ dostáváme

$$-\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + x^2 - \left(\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k\right)^2 = -x \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=2}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ a $a_4 = 1$, tj.

$$\nu(x) = x^2 + x^4 + O(x^5).$$

Dynamika na centrální varietě pak bude dána rovnicí

$$\dot{x} = -x\nu(x) = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{k+1} = -x^3 - x^5 + O(x^6).$$

Počátek je tedy asymptoticky stabilní.

Program XPPAUT, spusťte priklad2.ode

Příklad

Redukujte systém závislý na parametru ε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= -y + \varepsilon x^2 \end{aligned}$$

na jeho centrální varietu v okolí počátku a popište dynamiku systému v okolí počátku.

Příklad

Redukujte systém závislý na parametru ε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= -y + \varepsilon x^2 \end{aligned}$$

na jeho centrální varietu v okolí počátku a popište dynamiku systému v okolí počátku.

Počátek $[0,0]$ je rovnováha. Jacobiho matice je
$D\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2\varepsilon x & -1 \end{pmatrix}$, tj. $D\boldsymbol{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Vlastní hodnoty jsou tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Hledáme tedy centrální varietu jako graf funkce $y = \nu(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ v okolí počátku, která je řešením

$$-\nu(x) + \varepsilon x^2 = \nu'(x) x \nu(x).$$

Dosazením Taylorova rozvoje funkce $\nu(x)$ dostáváme

$$-\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + \varepsilon x^2 = x \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=2}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme $a_2 = \varepsilon$, $a_3 = 0$ a $a_4 = -2\varepsilon^2$, tj.

$$\nu(x) = \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^4 + O(x^5).$$

Dynamika na centrální varietě pak bude dána rovnicí

$$\dot{x} = x\nu(x) = \varepsilon x^3(1 - 2\varepsilon x^2) + O(x^6).$$

Pro $\varepsilon < 0$ je počátek lokálně asymptoticky stabilní, pro $\varepsilon > 0$ je počátek lokálně asymptoticky nestabilní. Pro $\varepsilon = 0$ je počátek stabilní a řešení lze nalézt explicitně. Nejde o generickou bifurkaci sedlo-uzel, protože není splněna podmínka nedegenerovanosti, avšak jde o topologicky ekvivalentní dynamiku.

Redukce na centrální varietu lze využít často právě k popisu změny dynamiky systému, který závisí na parametru. Lze totiž využít rozšíření systému o rovnici příslušnou parametru:

Příklad

Studujme systém závislý na parametru ε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

Počátek $[0, 0]$ je rovnováha a Jacobiho matice má tvar $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Redukce na centrální varietu lze využít často právě k popisu změny dynamiky systému, který závisí na parametru. Lze totiž využít rozšíření systému o rovnici příslušnou parametru:

Příklad

Studujme systém závislý na parametru ε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

Počátek $[0, 0]$ je rovnováha a Jacobiho matice má tvar $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Rozšíříme systém na

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - 2y^2 \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - xy\\ \dot{y} &= -y + x^2 - 2y^2\\ \dot{\varepsilon} &= 0\end{aligned}$$

Počátek $[0, 0, 0]$ je nehyperbolická rovnováha. Jacobiho matice je

$$D\boldsymbol{f}(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix}\varepsilon - y & -x & x\\ 2x & -1 - 4y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ tj. } D\boldsymbol{f}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \varepsilon x - xy \\
\dot{y} &= -y + x^2 - 2y^2 \\
\dot{\varepsilon} &= 0
\end{aligned}
$$

Počátek $[0,0,0]$ je nehyperbolická rovnováha. Jacobiho matice je
$$
D\boldsymbol{f}(x,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon - y & -x & x \\ 2x & -1-4y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. } D\boldsymbol{f}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Vlastní hodnoty jsou tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = 0$. Hledáme tedy centrální varietu jako graf funkce $y = \nu(x,\varepsilon) = \sum_{i+j\geq 2} a_{ij} x^i \varepsilon^j$. Platí $\dot{y} = \frac{\partial \nu}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \nu}{\partial x}\dot{x}$. V okolí počátku tedy platí

$$
-\nu(x,\varepsilon) + x^2 - 2\nu^2(x,\varepsilon) = \frac{\partial \nu}{\partial x}(x,\varepsilon)(\varepsilon x - x\nu(x,\varepsilon)).
$$

Dosazením Taylorova rozvoje funkce $\nu(x, \varepsilon)$ dostáváme porovnáním koeficientů

$$\begin{aligned} x^2 :& \quad -a_{20} + 1 &= 0 \\ x\varepsilon :& \quad -a_{11} &= 0 \\ \varepsilon^2 :& \quad -a_{02} &= 0 \\ x^3 :& \quad -a_{30} &= 0 \\ x^2\varepsilon :& \quad -a_{21} &= 2a_{20} \\ \dots \end{aligned}$$

$$\nu(x, \varepsilon) = x^2 - 2x^2\varepsilon + O(\|(x, \varepsilon)\|^4)$$

Dynamika na centrální varietě pak bude dána rovnicí

$$\dot{x} = x(\varepsilon - x^2(1 - 2\varepsilon)) + O(\|(x, \varepsilon)\|^5)$$

Pro $\varepsilon < 0$ je počátek lokálně asymptoticky stabilní, pro $\varepsilon > 0$ je počátek lokálně asymptoticky nestabilní (pro malá $\|\varepsilon\|$) a v jeho okolí existují dvě stabilní rovnováhy $x \sim \pm\sqrt{\varepsilon/(1 - 2\varepsilon)}$. Pro $\varepsilon = 0$ je počátek stabilní. Jde o generickou vidličkovou bifurkaci.