M9BCF Příklady - normální formy

Lenka Přibylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

18. října 2020

Příklad

Najděte normální formu systému v $\mathbb{R}^2$ v okolí počátku, který je nehyperbolickou rovnováhou se dvěma nulovými vlastními čísly (Bogdanovova-Takensova bifurkace) a maticí linearizace tvaru
$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad

Najděte normální formu systému v $\mathbb{R}^2$ v okolí počátku, který je nehyperbolickou rovnováhou se dvěma nulovými vlastními čísly (Bogdanovova-Takensova bifurkace) a maticí linearizace tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analytickou transformací souřadnic chceme zjednodušit (eliminací kvadratických členů) dynamický systém tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Příklad

Najděte normální formu systému v $\mathbb{R}^2$ v okolí počátku, který je nehyperbolickou rovnováhou se dvěma nulovými vlastními čísly (Bogdanovova-Takensova bifurkace) a maticí linearizace tvaru $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analytickou transformací souřadnic chceme zjednodušit (eliminací kvadratických členů) dynamický systém tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

$$V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Spočteme $L_{\boldsymbol{J}}^2(V_2)$, což můžeme udělat tak, že spočteme akci $L_{\boldsymbol{J}}^2(\cdot)$ na jednotlivých bazických vektorech.

Spočteme $L_{\boldsymbol{J}}^2(V_2)$, což můžeme udělat tak, že spočteme akci $L_{\boldsymbol{J}}^2(\cdot)$ na jednotlivých bazických vektorech.

$$\begin{aligned}
L_{\boldsymbol{J}}^2\begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} y_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
L_{\boldsymbol{J}}^2\begin{pmatrix} y_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
L_{\boldsymbol{J}}^2\begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_J^2\begin{pmatrix}0\\ y_1^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y_1^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2y_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1^2\\ 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\ y_1y_2\end{pmatrix}\\
L_J^2\begin{pmatrix}0\\ y_1y_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y_1y_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ y_2 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1y_2\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ y_2^2\end{pmatrix}\\
L_J^2\begin{pmatrix}0\\ y_2^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y_2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2^2\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\boldsymbol{J}}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} \\
L_{\boldsymbol{J}}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \\
L_{\boldsymbol{J}}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
L_{\boldsymbol{J}}^2(V_2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 \\ -2y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ -y_2^2 \end{pmatrix} \right\}
$$

Matici zobrazení $L_J^2(\cdot)$ můžeme v naší bázi zapsat jako

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

přičemž hledáme 2 nezávislé vektory kolmé k $L_J^2(V_2)$, tedy vektory z jádra matice A^T (jejich skalární součin s libovolným vektorem z $L_J^2(V_2)$ je 0). Vzhledem k počtu nul v matici A není těžké vidět, že to jsou např. vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme tak bázi vektorového podprostoru W_2 tvaru $\left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ \frac{1}{2} y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} \right\}$ a normální formu dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

tvaru

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + a y_1^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3), \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{2} a y_1 y_2 + b y_1^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3). \end{aligned}$$

Dostáváme tak bázi vektorového podprostoru W_2 tvaru $\left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ \frac{1}{2}y_1y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} \right\}$ a normální formu dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

tvaru

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + ay_1^2 + O(\|\mathbf{y}\|^3), \\ \dot{y}_2 &= \tfrac{1}{2}ay_1y_2 + by_1^2 + O(\|\mathbf{y}\|^3). \end{aligned}$$

Volbou báze $\left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} \right\}$ bychom dostali normální formu studovanou v roce 1974 poprvé Florisem Takensem a volbou báze $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} \right\}$ pak normální formu studovanou v roce 1975 Rifkatem Bogdanovem, kterou dnes nejčastěji najdeme v literatuře.

Příklad

Najděte normální formu parametrického dynamického systému $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$, *kde* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *má v počátku pro* $\mu = 0$ *nehyperbolickou rovnováhu se dvěma ryze imaginárními vlastními čísly. V okolí počátku najděte transformaci, která eliminuje nerezonanční kvadratické členy.*

Příklad

Najděte normální formu parametrického dynamického systému $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu se dvěma ryze imaginárními vlastními čísly. V okolí počátku najděte transformaci, která eliminuje nerezonanční kvadratické členy.

Matice linearizace je tvaru $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda(\mu) & -\mathrm{Im}\,\lambda(\mu) \\ \mathrm{Im}\,\lambda(\mu) & \mathrm{Re}\,\lambda(\mu) \end{pmatrix}$, kde $\mathrm{Re}\,\lambda(0) = 0$.

Příklad

Najděte normální formu parametrického dynamického systému $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu se dvěma ryze imaginárními vlastními čísly. V okolí počátku najděte transformaci, která eliminuje nerezonanční kvadratické členy.

Matice linearizace je tvaru $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda(\mu) & -\mathrm{Im}\,\lambda(\mu) \\ \mathrm{Im}\,\lambda(\mu) & \mathrm{Re}\,\lambda(\mu) \end{pmatrix}$, kde $\mathrm{Re}\,\lambda(0) = 0$. Přechodem ke komplexním číslům $z = x_1 + ix_2$ dostaneme zadaný systém ve tvaru

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + F(z, \bar{z}, \mu).$$

Funkci F umíme rozložit do Taylorova rozvoje s proměnnými z a $\bar{z}$ s koeficienty, které závisejí na μ. Pro jednodušší zápis budeme μ v dalším vynechávat. Transformaci do normální formy provedeme v okolí $z = 0$ a $\mu = 0$.

Hledáme tedy vhodnou kvadratickou h_2 tak, aby $z = w + h_2(w, \overline{w})$ eliminovala kvadratické členy. Vzhledem k tomu, že je matice rotace regulární ($\lambda(0) \neq 0$), povede se nám to ZCELA a normální tvar je

$$\dot{w} = \lambda(\mu)w + O(\|w\|^3)$$

tedy

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ \lambda(\mu) & -\mathrm{Im}\ \lambda(\mu) \\ \mathrm{Im}\ \lambda(\mu) & \mathrm{Re}\ \lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|\boldsymbol{x}\|^3).$$

Spočteme h_2, abychom viděli, jak tato transformace vypadá a navíc si ukážeme výpočet Lieovy derivace vzhledem ke komplexnímu lineárnímu vektorovému poli definovanému zobrazením $z \mapsto \lambda z$.

Spočteme h_2, abychom viděli, jak tato transformace vypadá a navíc si ukážeme výpočet Lieovy derivace vzhledem ke komplexnímu lineárnímu vektorovému poli definovanému zobrazením $z \mapsto \lambda z$. Komplexní kvadratické homogenní polynomy jsou prvky

$$V_2 = \mathrm{span}\{w^2, w\overline{w}, \overline{w}^2\}.$$

Chceme spočítat $L^2_\lambda(V_2)$, což můžeme udělat tak, že spočteme akci $L^2_\lambda(\cdot)$ na jednotlivých bazických vektorech (lineární vektorové pole, které měníme transformací souřadnic, je nyní λ násobek, proto zjednodušeně označujeme Lieovu derivaci L_λ místo $L_{\mathbf{J}}$).

Spočteme h_2, abychom viděli, jak tato transformace vypadá a navíc si ukážeme výpočet Lieovy derivace vzhledem ke komplexnímu lineárnímu vektorovému poli definovanému zobrazením $z \mapsto \lambda z$. Komplexní kvadratické homogenní polynomy jsou prvky

$$V_2 = \mathrm{span}\{w^2, w\overline{w}, \overline{w}^2\}.$$

Chceme spočítat $L_\lambda^2(V_2)$, což můžeme udělat tak, že spočteme akci $L_\lambda^2(\cdot)$ na jednotlivých bazických vektorech (lineární vektorové pole, které měníme transformací souřadnic, je nyní λ násobek, proto zjednodušeně označujeme Lieovu derivaci L_λ místo $L_{\boldsymbol{J}}$).

$$\begin{aligned}
L_\lambda^2 w^2 &= \lambda w^2 - (\lambda w \cdot \tfrac{\partial w^2}{\partial w} + \overline{\lambda}\overline{w} \cdot \tfrac{\partial w^2}{\partial \overline{w}}) = -\lambda w^2 \\
L_\lambda^2 w\overline{w} &= \lambda w\overline{w} - (\lambda w \cdot \tfrac{\partial w\overline{w}}{\partial w} + \overline{\lambda}\overline{w} \cdot \tfrac{\partial w\overline{w}}{\partial \overline{w}}) = -\overline{\lambda} w\overline{w} \\
L_\lambda^2 \overline{w}^2 &= \lambda \overline{w}^2 - (\lambda w \cdot \tfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial w} + \overline{\lambda}\overline{w} \cdot \tfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial \overline{w}}) = (\lambda - 2\overline{\lambda})\overline{w}^2
\end{aligned}$$

Matice zobrazení L_λ^2 je

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\mu) - 2\overline{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}$$

a existuje v okolí $\mu = 0$, kde jsou všechny diagonální členy nenulové, tedy

$$L_\lambda^2(V_2) = V_2.$$

Proto při eliminaci kvadratických členů jako hledání řešení lineární úlohy $F_2(w, \overline{w}, \mu) + L^2_{\lambda(\mu)}(h_2(w, \overline{w}, \mu)) = 0$ dostáváme jednoznačně řešitelnou úlohu tvaru $b + Ax = 0$ (tj. $x = -A^{-1}b$), kde b je vektor koeficientů kvadratických členů F_2 funkce F a x je vektor koeficientů hledané funkce h_2 v bázi $\{w^2, w\overline{w}, \overline{w}^2\}$.

Pokud jsou tedy nelineární kvadratické členy ve tvaru $F_2(z,\bar{z}) = f_{20}z^2 + f_{11}z\bar{z} + f_{02}\bar{z}^2$, pak z diagonálního tvaru matice vidíme přímo řešení

$$h_2(w,\overline{w},\mu) = \tfrac{f_{20}}{\lambda(\mu)}w^2 + \tfrac{f_{11}}{\overline{\lambda}(\mu)}w\overline{w} + \tfrac{f_{02}}{2\overline{\lambda}(\mu)-\lambda(\mu)}\overline{w}^2.$$

Pokud jsou tedy nelineární kvadratické členy ve tvaru $F_2(z,\bar{z}) = f_{20}z^2 + f_{11}z\bar{z} + f_{02}\bar{z}^2$, pak z diagonálního tvaru matice vidíme přímo řešení

$$h_2(w,\overline{w},\mu) = \frac{f_{20}}{\lambda(\mu)}w^2 + \frac{f_{11}}{\overline{\lambda}(\mu)}w\overline{w} + \frac{f_{02}}{2\overline{\lambda}(\mu)-\lambda(\mu)}\overline{w}^2.$$

Tato transformace $z = w + h_2(w,\overline{w},\mu)$ eliminuje kvadratické členy a systém transformuje na $\dot{w} = \lambda(\mu)w + O(\|w\|^3)$.

Příklad

Najděte normální formu Hopfovy bifurkace parametrického dynamického systému $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$, *kde* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *má v počátku pro* $\mu = 0$ *nehyperbolickou rovnováhu se dvěma ryze imaginárními vlastními čísly. V okolí počátku eliminujte nerezonanční kubické členy.*

Příklad

Najděte normální formu Hopfovy bifurkace parametrického dynamického systému $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu)$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu se dvěma ryze imaginárními vlastními čísly. V okolí počátku eliminujte nerezonanční kubické členy.

V předchozím příkladě jsme eliminovali kvadratické členy, a proto je systém (v komplexní proměnné) tvaru

$$\dot{z} = \lambda(\mu) z + F_3(z, \bar{z}, \mu) + O(\|z\|^4),$$

kde F_3 je kubická funkce z prostoru V_3 s bazí $\{z^3, z^2\bar{z}, z\bar{z}^2, \bar{z}^3\}$.

Ověřte si sami, že matice zobrazení L^3_λ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda(\mu)+\overline{\lambda}(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\overline{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\mu)-3\overline{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že pro $\mu = 0$ je matice A singulární a prostor $W_3 = \operatorname{span}\{z^2\overline{z}\}$ a má dimenzi 1. Podaří se nám proto eliminovat všechny kubické členy, až na tento rezonanční člen.

Ověřte si sami, že matice zobrazení L^3_λ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda(\mu) + \overline{\lambda}(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\overline{\lambda}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\mu) - 3\overline{\lambda}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že pro $\mu = 0$ je matice A singulární a prostor $W_3 = \mathrm{span}\{z^2\overline{z}\}$ a má dimenzi 1. Podaří se nám proto eliminovat všechny kubické členy, až na tento rezonanční člen.

Normální tvar Hopfovy bifurkace je proto

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\overline{z} + O(\|z\|^4).$$

V polárních souřadnicích pak

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mathrm{Re}\ \lambda(\mu)\rho + \mathrm{Re}\ c(\mu)\rho^3 + \dots, \\ \dot{\varphi} &= \mathrm{Im}\ \lambda(\mu) + \mathrm{Im}\ c(\mu)\rho^2 + \dots. \end{aligned}$$

Příklad

Proveďte nalezenou transformaci souřadnic pro rovnici $\dot{z} = \lambda(\mu)z + F_2(z, \bar{z}) + F_3(z, \bar{z}) + O(\|z\|^4)$ *a najděte koeficient u kubického členu příslušného* $w^2\overline{w}$.

Příklad

Proveďte nalezenou transformaci souřadnic pro rovnici $\dot{z} = \lambda(\mu)z + F_2(z,\bar{z}) + F_3(z,\bar{z}) + O(\|z\|^4)$ *a najděte koeficient u kubického členu příslušného* $w^2\overline{w}$.

Domácí úloha :-)

Příklad

Proveďte nalezenou transformaci souřadnic pro rovnici $\dot{z} = \lambda(\mu)z + F_2(z, \bar{z}) + F_3(z, \bar{z}) + O(\|z\|^4)$ *a najděte koeficient u kubického členu příslušného* $w^2\overline{w}$.

Domácí úloha :-)

Porovnejte koeficienty u $w^2\overline{w}$ u normální formy $\dot{w} = i\omega_0 w + c_1 w^2\overline{w} + O(\|w\|^4)$ (pro $\mu = 0$, tj. $\lambda(0) = i\omega_0$) po transformaci $z = w + h_2(w, \overline{w})$ s kvadratickými členy z předchozí úlohy.

Příklad

Proveďte nalezenou transformaci souřadnic pro rovnici $\dot{z} = \lambda(\mu)z + F_2(z,\bar{z}) + F_3(z,\bar{z}) + O(\|z\|^4)$ *a najděte koeficient u kubického členu příslušného* $w^2\overline{w}$.

Domácí úloha :-)

Porovnejte koeficienty u $w^2\overline{w}$ u normální formy $\dot{w} = i\omega_0 w + c_1 w^2\overline{w} + O(\|w\|^4)$ (pro $\mu = 0$, tj. $\lambda(0) = i\omega_0$) po transformaci $z = w + h_2(w,\overline{w})$ s kvadratickými členy z předchozí úlohy.

Zkontrolujte si výsledek

$$c_1 = i\frac{f_{20}f_{11}}{\omega_0} - i\frac{|f_{11}|^2}{\omega_0} - i\frac{2|f_{02}|^2}{3\omega_0} + f_{21},$$

kde $F_2(z,\bar{z}) = f_{20}z^2 + f_{11}z\bar{z} + f_{02}\bar{z}^2$ atd.

Příklad

V okolí počátku eliminujte nerezonanční kvadratické členy parametrického dynamického diskrétního systému $z_{n+1} = \lambda(\mu) z_n + F_2(z_n, \bar{z}_n, \mu) + O(\|z_n\|^3)$, kde F_2 je součtem homogenních kvadratických polynomů v $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ s koeficienty, které závisejí na μ, a systém má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu a $\lambda(0) = e^{2\pi i \theta(0)}$ (Neimarkova–Sackerova bifurkace).

Příklad

V okolí počátku eliminujte nerezonanční kvadratické členy parametrického dynamického diskrétního systému $z_{n+1} = \lambda(\mu) z_n + F_2(z_n, \bar{z}_n, \mu) + O(\|z_n\|^3)$, kde F_2 je součtem homogenních kvadratických polynomů v $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ s koeficienty, které závisejí na μ, a systém má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu a $\lambda(0) = e^{2\pi i \theta(0)}$ (Neimarkova–Sackerova bifurkace).

Hledáme tedy vhodnou kvadratickou h_2 tak, aby $z = w + h_2(w, \overline{w})$ eliminovala kvadratické členy.

Příklad

V okolí počátku eliminujte nerezonanční kvadratické členy parametrického dynamického diskrétního systému $z_{n+1} = \lambda(\mu) z_n + F_2(z_n, \bar{z}_n, \mu) + O(\|z_n\|^3)$, kde F_2 je součtem homogenních kvadratických polynomů v $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ s koeficienty, které závisejí na μ, a systém má v počátku pro $\mu = 0$ nehyperbolickou rovnováhu a $\lambda(0) = e^{2\pi i\theta(0)}$ (Neimarkova–Sackerova bifurkace).

Hledáme tedy vhodnou kvadratickou h_2 tak, aby $z = w + h_2(w, \overline{w})$ eliminovala kvadratické členy.
Komplexní kvadratické homogenní polynomy jsou prvky

$$V_2 = \operatorname{span}\{w^2, w\overline{w}, \overline{w}^2\}.$$

Transformací souřadnic dostaneme

$$w_{n+1} + h_2(w_{n+1}, \overline{w}_{n+1}) = \lambda(w_n + h_2(w_n, \overline{w}_n)) + F_2(w_n, \overline{w}_n) + O(\|w_n\|^3),$$

kde

$$h_2(w_{n+1}, \overline{w}_{n+1}) = h_2(\lambda w_n + O(\|w_n\|^2), \overline{\lambda}\overline{w}_n + O(\|w_n\|^2)),$$

Transformací souřadnic dostaneme

$$w_{n+1}+h_2(w_{n+1},\overline{w}_{n+1}) = \lambda(w_n+h_2(w_n,\overline{w}_n))+F_2(w_n,\overline{w}_n)+O(\|w_n\|^3),$$

kde

$$h_2(w_{n+1},\overline{w}_{n+1}) = h_2(\lambda w_n + O(\|w_n\|^2), \overline{\lambda}\overline{w}_n + O(\|w_n\|^2)),$$

tedy

$$w_{n+1} = \lambda w_n + \lambda h_2(w_n,\overline{w}_n) - h_2(\lambda w_n, \overline{\lambda}\overline{w}_n) + F_2(w_n,\overline{w}_n) + O(\|w_n\|^3),$$

Transformací souřadnic dostaneme

$$w_{n+1} + h_2(w_{n+1}, \overline{w}_{n+1}) = \lambda(w_n + h_2(w_n, \overline{w}_n)) + F_2(w_n, \overline{w}_n) + O(\|w_n\|^3),$$

kde

$$h_2(w_{n+1}, \overline{w}_{n+1}) = h_2(\lambda w_n + O(\|w_n\|^2), \overline{\lambda}\overline{w}_n + O(\|w_n\|^2)),$$

tedy

$$w_{n+1} = \lambda w_n + \lambda h_2(w_n, \overline{w}_n) - h_2(\lambda w_n, \overline{\lambda}\overline{w}_n) + F_2(w_n, \overline{w}_n) + O(\|w_n\|^3),$$

Vidíme, že mechanismus eliminace vede k analogickému operátoru $L = \boldsymbol{J} \circ h_2 - h_2 \circ \boldsymbol{J}$.

$$\begin{aligned}
Lw^2 &= \lambda w^2 - (\lambda w)^2 = \lambda(1-\lambda)w^2 \\
Lw\overline{w} &= \lambda w\overline{w} - \lambda w\overline{\lambda}\overline{w} = \lambda(1-\overline{\lambda})w\overline{w} \\
L\overline{w}^2 &= \lambda\overline{w}^2 - (\overline{\lambda}\overline{w})^2 = (\lambda - \overline{\lambda}^2)\overline{w}^2
\end{aligned}$$

Matice zobrazení L je

$$A = \begin{pmatrix} \lambda(\mu)(1-\lambda(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\mu)(1-\overline{\lambda}(\mu)) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\mu)-\overline{\lambda}(\mu)^2 \end{pmatrix}$$

a tato matice není regulární pro $\lambda(0) = 1$ nebo $\lambda(0) = \overline{\lambda}(0)^2$. Druhá rovnice

$$e^{2\pi i\theta(0)} = e^{-4\pi i\theta(0)}$$

tedy znamená, že $\lambda(0)^3 = 1$.

[1] Eliminace kubických členů pak ukáže rezonanci v -1, i a $-i$ (druhé a čtvrté odmocniny z 1).

Matice zobrazení L je

$$A = \begin{pmatrix} \lambda(\mu)(1-\lambda(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\mu)(1-\overline{\lambda}(\mu)) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\mu)-\overline{\lambda}(\mu)^2 \end{pmatrix}$$

a tato matice není regulární pro $\lambda(0) = 1$ nebo $\lambda(0) = \overline{\lambda}(0)^2$. Druhá rovnice

$$e^{2\pi i\theta(0)} = e^{-4\pi i\theta(0)}$$

tedy znamená, že $\lambda(0)^3 = 1$.

Kvadratické členy proto eliminujeme, pokud vlastní číslo neleží v rezonanční hodnotě 1, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nebo $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. [1]

[1] Eliminace kubických členů pak ukáže rezonanci v -1, i a $-i$ (druhé a čtvrté odmocniny z 1).

Příklad

Najděte normální formu parametrického dynamického diskrétního systému $z_{n+1} = \lambda(\mu) z_n + F_3(z_n, \bar{z}_n, \mu) + O(\|z_n\|^4)$*, kde* F_3 *jsou homogenní kubické polynomy v* $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ *s koeficienty, které závisejí na* μ*, a systém má v počátku pro* $\mu = 0$ *nehyperbolickou rovnováhu a* $\lambda(0) = e^{2\pi i \theta(0)}$*. V okolí počátku eliminujte nerezonanční kubické členy. (Neimarkova-Sackerova bifurkace)*

Příklad

Najděte normální formu parametrického dynamického diskrétního systému $z_{n+1} = \lambda(\mu) z_n + F_3(z_n, \bar{z}_n, \mu) + O(\|z_n\|^4)$*, kde* F_3 *jsou homogenní kubické polynomy v* $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ *s koeficienty, které závisejí na* μ*, a systém má v počátku pro* $\mu = 0$ *nehyperbolickou rovnováhu a* $\lambda(0) = e^{2\pi i \theta(0)}$*. V okolí počátku eliminujte nerezonanční kubické členy. (Neimarkova-Sackerova bifurkace)*

Stejný postup vede k matici A zobrazení $L = \boldsymbol{J} \circ h_3 - h_3 \circ \boldsymbol{J}$ ve V_3 s bazí $\{z^3, z^2\bar{z}, z\bar{z}^2, \bar{z}^3\}$ tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \lambda(\mu)(1-\lambda(\mu)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\mu)(1-\lambda(\mu)\overline{\lambda}(\mu)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\mu)(1-\overline{\lambda}(\mu)^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\mu)-\overline{\lambda}(\mu)^3 \end{pmatrix}$$

Kubické členy lze eliminovat mimo rezonance v -1, i a $-i$ (druhé a čtvrté odmocniny z 1), až na jediný $z^2\bar{z}$, protože pro vlastní číslo na jednotkovém kruhu vždy platí

$$\lambda(0)(1-\lambda(0)\overline{\lambda}(0))=0.$$

Normální formou Neimarkovy–Sackerovy bifurkace je proto

$$z_{n+1}=\lambda(\mu)z_n+c(\mu)z_n^2\bar{z}_n+O(\|z_n\|^4).$$