Definice 10.1. ***Arbitráž*** je portfolio, které "získává peníze z ničeho", tj. formálně buď

$$V_0(\Theta) \leq 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) > 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$, nebo

$$V_0(\Theta) < 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) \geq 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$.

Definice 10.2. Pravděpodobnostní míra $\pi_i = \pi(\omega_i)$ na množině Ω všech scénářů je ***rovnovážná pravděpodobnostní míra*** (neboli risk-neutrální míra),

– jestliže pro všechna A^j je hodnota podílu v čase $t = 0$ rovna diskontovanému očekávání vzhledem k pravděpodobnostní míře π hodnoty podílu v čase $t = 1$.

– Tedy

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 1, \ldots, K$, kde e^{-r} je diskontní faktor.

Věta 10.3. *(**Základní věta APT**): Rovnovážná pravěpodobnostní míra existuje právě tehdy, když neexistuje arbitráž.*

Důkaz:

Implikace $\Leftarrow$ je snadná. Jestliže existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra π a Θ je portfolio, jehož hodnota v čase $t = 1$ je ≥ 0 za všech scénářů, pak

$$V_0(\Theta) = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) V_1(\Theta, \omega_i) \geq 0,$$

odkud plyne že Θ není arbitráž (a arbitráž tedy neexistuje).

Nyní chceme dokázat opačnou implikaci: Neexistuje-li arbitráž, pak existuje rovnovážná pravděpodobnostní míra taková, že

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i).$$

Pro $j = 1$ platí tento vztah automaticky,

$$1 = S_0^1 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) e^r = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^1(\omega_i).$$

Uvažujme nyní $2 \leq j \leq K$. Označme ε množinu všech vektorů tvaru $y = (y_2, ..., y_K)$, kde

$$y_j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 2, 3, ..., K$, pro nějakou pravděpodobnostní míru π.

$\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{K-1}$ je uzavřený konvexní polyedr. Je konvexním obalem svých extrémních bodů, které odpovídají pravděpodobnostem $\pi(\omega_i) = 1$, $\pi(\omega_j) = 0$ pro $j \neq i$.

Chceme dokázat, že neexistuje-li arbitráž, pak

$$S = \left(S_0^2, \dots, S_0^K\right) \in \varepsilon.$$

Jinak řečeno, pokud $S \notin \varepsilon$, pak existuje arbitráž. Využijeme větu o oddělující nadrovině.

Věta 10.4. *(Věta o oddělující nadrovině:) Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina a $x \notin F$. Pak existuje $v \in \mathbb{R}^n$ tak, že $v \cdot x < v \cdot y$ pro všechna $y \in F$, kde $\cdot$ je skalární součin.*

Důkaz: Nechť a je nejbližší bod v F k bodu x, pak vektor $a - x$ má hledané vlastnosti.

Podle této věty máme

$$S \notin \varepsilon \Rightarrow \exists \Theta^\star = (\theta_2, \ldots, \theta_K) \neq 0$$

tak, že pro všechna $y \in \varepsilon$ platí:

$$y \cdot \Theta^\star > S \cdot \Theta^\star.$$

ε obsahuje extrémní body, tedy pro všechna i platí:

$$e^{-r}\sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_1^j(\omega_i) > \sum_{j=2}^{K}\theta_j \cdot S_0^j.$$

Levou stranu nerovnosti označme C_i, pravou stranu D.

Ukážeme, že existuje arbitráž.

Zvolme θ_1 tak aby $C_i > \theta_1 > D$ pro všechna i.

Pak portfolio $(-\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)$ je arbitráž.

Jeho hodnota v čase $t = 0$ je $-\theta_1 + D < 0$ a hodnota v čase $t = 1$

je $-\theta_1 + C_i > 0$ pro všechna ω_i.

Uvažujeme evropskou call opci, jejíž výplatní funkce je

$$V_1 = (S_1 - K)_+.$$

Dále $S_1(\omega_i) = d_i$ pro $i = 1, 2$ a $d_1 < d_2$.

Pokud neexistuje arbitráž, pak existuje π taková, že cena akcie v $t = 0$ je diskontované očekávání

$$S_0 = e^{-r} \cdot (\pi(\omega_1) \cdot d_1 + \pi(\omega_2) \cdot d_2),$$

a navíc víme, že $\pi(\omega_1) + \pi(\omega_2) = 1$.

Speciálně tedy platí $d_1 < S_0 e^r < d_2$ (v předchozím to byl předpoklad, teď to platí automaticky).

Dostaneme

$$\pi(\omega_1) = \frac{d_2 - S_0 e^r}{d_2 - d_1}$$

a

$$\pi(\omega_2) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Je-li opce volně obchodovatelná, a má-li zůstat trh bez arbitráže, musí totéž platit i pro opci, tedy pro $r = 0$:

$$V_0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) + \pi(\omega_1)0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}(d_2 - K).$$

Jištění (Hedging)

Uvažujme aktiva A^1, A^2, ..., A^K, B. Nechť $S_t^j(\omega_i)$ a $S_t^B(\omega_i)$ jsou ceny A^j, resp. B, v čase t a scénáři ω_i, kde $t = 0, 1$.

Definice 10.5. Portfolio $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$ je ***replikující portfolio*** pro B, jestliže

$$S_1^B(\omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $i = 1, \ldots, N$.

Věta 10.6. *Nechť* $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$ *je replikující portfolio pro* B. *Neexistuje-li arbitráž, pak v čase* $t = 0$ *platí:*

$$S_0^B = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Důkaz: Nechť tvrzení neplatí. Je-li $S_0^B > \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$, pak portfolio $(-1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$ v aktivech $B, A^1, A^2, \ldots, A^K$ je arbitráž, protože

$$\sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j - S_0^B < 0$$

a

$$S_1^B(\omega_i) - \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i) = 0$$

pro všechna $\omega_i \in \Omega$.

Analogicky, pro

$$S_0^B < \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$$

vezmeme opačné portfolio.

Trh se dvěma periodami

Uvažujme jedno bezrizikové aktivum a 1 rizikovou akcii.

Tržní scénáře jsou nyní

$$\Omega = \{(++)\,, (+-)\,, (-+)\,, (--)\}\,.$$

Předpokládejme, že

$$S_1(+) = uS_0$$

$$S_1(-) = dS_0$$

$$S_2(++) = uS_1(+) = u^2 S_0$$

$$S_2(+-) = dS_1(+) = udS_0$$

$$S_2(-+) = uS_1(-) = duS_0$$

$$S_2(--) = dS_1(-) = d^2 S_0$$

(u ... up, d ... down)

Máme tři částečné trhy.

V každém uděláme stejný výpočet jako v jednokrokovém modelu.

Dostaneme rovnovážné pravděpodobnosti (pro jednoduchost předpokládejme, že $r = 0$)

$$p_u = \frac{1-d}{u-d}$$

(S_0 se vykrátí) a

$$p_d = \frac{u-1}{u-d}.$$

Celkem rovnovážná pravděpodobnostní míra bude:

$$P(++) = p_u^2, \quad P(--) = p_d^2, \quad P(+-) = P(-+) = p_u p_d.$$

Vícekrokový model s T kroky

Množina všech možných scénářů je v tomto případě

$$\Omega = \{(+, +, +, ..., +), (+, +, ..., +, -), ..., (-, -, ..., -)\}.$$

Má 2^T prvků, je tedy 2^T možných scénářů.

Pro scénář $\omega \in \Omega$ je jeho rovnovážná pravděpodobnost

$$P(\omega) = p_u^K p_d^{T-K},$$

kde K je počet $+$ ve scénáři ω.

Chceme-li ocenit opci, její cena bude diskontované očekávání její hodnoty v čase T

$$V_T = (S_T - K)_+$$

vůči rovnovážné pravděpodobnostní míře. Uvažujme $r = 0$.

Nechť m je nejmenší přirozené číslo takové, že $S_0 u^m d^{T-m} > K$.

Máme tedy

$$V_0 = \sum_{n=m}^{T} p_u^n p_d^{T-n} \binom{T}{n} \left(S_0 u^n d^{T-n} - K \right)$$

$$= \sum_{n=m}^{T} \frac{(1-d)^n (u-1)^{T-n}}{(u-d)^T} \binom{T}{n} \left(S_0 u^n d^{T-n} - K \right),$$

kde $\binom{T}{n}$ je počet trajektorií s celkem n plusy.

Poznámka. Položíme-li $d = \frac{1}{u}$, pak v limitě pro $T \to \infty$ a $u = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{T}}}$ dostaneme Black-Scholesův spojitý model pro oceňování opcí. σ je parametr nazývaný volatilita.

Model který jsme uvažovali se také často nazývá binomický. Jeho autory jsou Cox, Ross a Rubinstein.