11.3. Dítě staví věž z kostek → Markovův proces

$$\begin{array}{c|cccc} & 1k & 2k & 3k & 4k \\ \hline 1k & \\ 2k & \\ 3k & \\ 4k & \end{array}\left(\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) = A$$

stochastická matice

má vždy vlastní číslo 1
→ jeho vlastní vektor v popisuje dlouhodobý vývoj procesu.

Přesněji, tohle platí, je-li A primitivní

$$A^2 = \begin{pmatrix} >0 & >0 & >0 & >0 \\ >0 & >0 & >0 & >0 \\ >0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & >0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ >0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$ ∃ kladné hodnoty

A^8 pozitivní matice

$$A - E = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$h(A-E) \leq 3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$x_4 = p$

$x_3 = 2p$

$x_2 = 2x_3 = 4p$

$x_1 = 2x_2 = 8p$

vlastní vektor je $v = (8, 4, 2, 1)$

$8 + 4 + 2 + 1 = 15$

$w = \frac{1}{15}(8, 4, 2, 1) = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$

↳ pravděpodobnostní vlastní vektor

pnst stavu 1k

pnst stavu 2k

pnst 3k

pnst 4k

<u>11.4</u>: Roztržitý profesor

- zapomíná deštník s pnstí 1/2

$$\begin{array}{c|ccc} & D & P & R \\ \hline D & 11/16 & 3/8 & 1/4 \\ P & 3/16 & 3/8 & 1/4 \\ R & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$

$$D \rightsquigarrow D: \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+2+1}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

$$D \rightsquigarrow P: \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$D \rightsquigarrow R: \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Vl. čislo 1 má vl. vektor
$(1/2, 1/4, 1/4)$

12.1 $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $h(B) \leq 2$

chceme $B = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon, \alpha}} J \underbrace{T^{-1}}_{(id)_{\alpha, \varepsilon}}$

α - báze nejlépe z vlastních vektorů

Hledáme vl. čísla:

$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-\lambda - 2)^3 + 1 + 1 - \left[(-2-\lambda) + (-2-\lambda) + (-2-\lambda)\right]$

$= -(\lambda^3 + 3\lambda^2 \cdot 2 + 3\lambda \cdot 2^2 + 2^3) + 2 + 3(\lambda + 2)$

$= -(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda) =$

$= -\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -\lambda(\lambda + 3)^2$

vlastní čísla $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -3$ ← dvojnásobné

$\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow v_1 = (1, 1, 1)$

$\lambda_2 = -3 \rightsquigarrow$ vlastní vektor(y)

$$B - (-3E) = B + 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

$x_3 = p$

$x_2 = q$

$x_1 = -p - q$

$v_2 = (-1, 0, 1)$

$v_3 = (-1, 1, 0)$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$B = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon,\alpha}} \; J \; \underbrace{T^{-1}}_{(id)_{\alpha,\varepsilon}}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow$ dvojnásobné

$\lambda_3 = 2 \rightarrow C - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$v_3 = (2, 1, 1)$$

$$C - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow$ geometrická nás. 1

alg. násobnost 2

Máme vlastní vektory $v_3 = (2, 1, 1)$ a $v_1 = (1, 0, 0)$.

$\rightarrow$ neexistuje báze z vl. vektorů

$$0 \xleftarrow{C-E} v_1 \xleftarrow{C-E} v_2$$

$$0 \xleftarrow{C-2E} v_3$$

$$\alpha = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Najdeme vektor v_2:

$(C-E)v_2 = v_1 \Rightarrow v_2$ je řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\right)$$

$x_3 = 0$ $\quad v_2 = (0, 1, 0)$

$x_2 = 1$

$x_1 = 0$

↳ lib.

<u>Závěr:</u>

$$C = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon,\alpha}} J \underbrace{T^{-1}}_{(id)_{\alpha,\varepsilon}}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vl. čísla $\det(D - \lambda E)$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(\lambda+2) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda+2) \left[\underbrace{\lambda(\lambda+4) + 4}_{\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2} \right]$$

$$= -(\lambda+2)^3 \qquad \lambda = -2$$ trojnásobné vl. čísl.

<u>Vl. vektory:</u>

$$D + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

$x_2 = p$

$x_3 = q$

$x_1 = 2p$

vlastní vektory

$v_1 = (2, 1, 0)$

$v_2 = (0, 0, 1)$

nebo jejich lin kombin.

$a, b \in \mathbb{R}$

$0 \xleftarrow{D+2E} v_1 \xleftarrow{D+2E\,?} v_3$

$0 \xleftarrow{D+2E} v_2 \xleftarrow{D+2E\,?} v_3$

Lépe $0 \xleftarrow{D+2E} a v_1 + b v_2 \xleftarrow{D+2E} v_3$

$$(D+2E)\, v_3 = a v_1 + b v_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{2} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{2a} \\ 1 & -2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right)$$

hledáme a, b tž tato soustava má řešení

$\Rightarrow a = b = 1$

$\Leftrightarrow$ zvolili jsme

$(1 \quad -2 \quad 0 \mid 1)$

$\rightsquigarrow$ wektor $(1, 0, 0) = v_3$

$$0 \xleftarrow{D+2E} v_1 + v_2 \xleftarrow{D+2E} v_3$$

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{w = (2,1,1)}$$

baza $\alpha = (v_1, w, v_3)$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \underbrace{T}_{(id)_{\varepsilon,\alpha}} \; J \; \underbrace{T^{-1}}_{(id)_{\alpha,\varepsilon}}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$