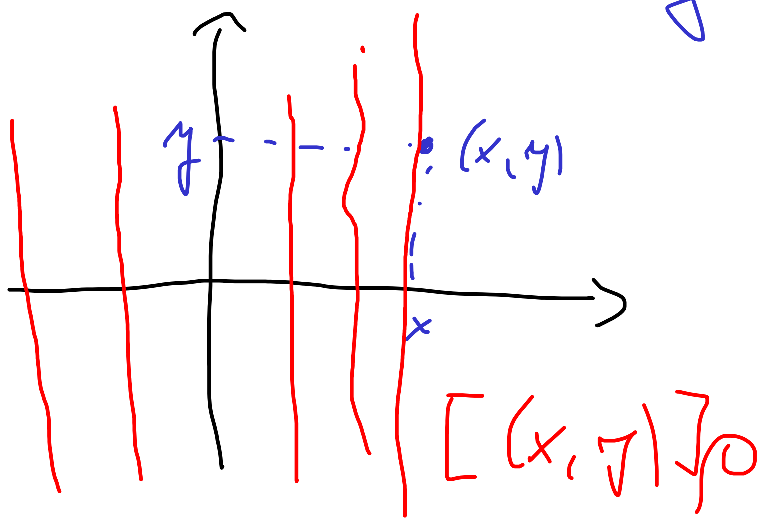
51 ρ je relace na množině $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2}_{\text{rovina}}$

(i) $(x,y)\,\rho\,(u,v) \iff x-u=0$

$x=u$ ekvivalence

Rozklad na třídy ekvivalence



$$[(x,y)]_\rho = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\,\rho\,(u,v)\}$$

$$\Downarrow$$

$$x=u$$

(ii) $(x,y)\,\rho\,(u,v) \iff x^2+y^2+x+y=u^2+v^2+u+v$

$c\geq -\frac{1}{2}$, $c\in\mathbb{R}$ t.ž. $x^2+y^2+x+y=c$

$$[(x,y)]_\rho = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \underline{u}^2+v^2+\underline{u}+v=c\}$$

$$\Downarrow$$

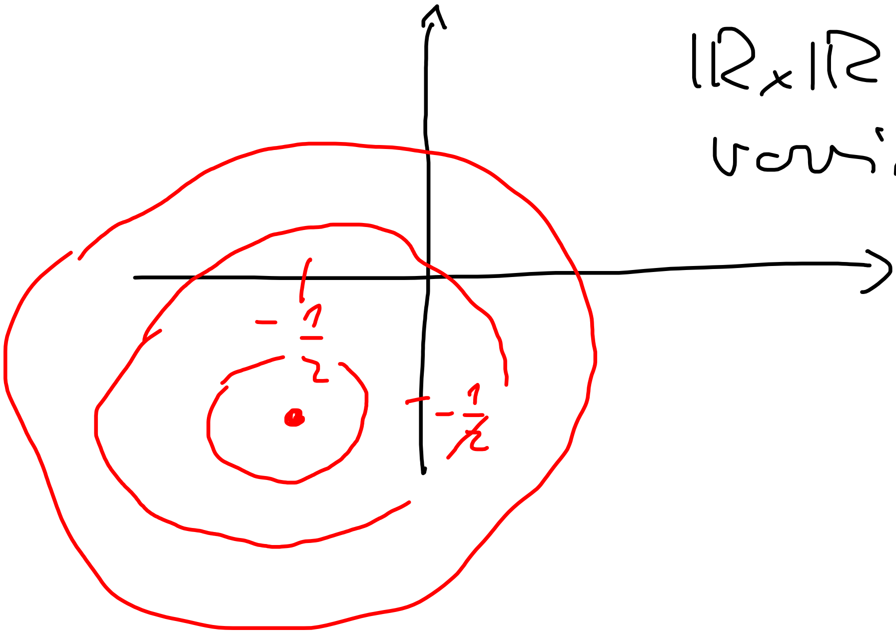
$$\left(u+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+\left(v+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}=c$$

$$\left(u+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(v+\tfrac{1}{2}\right)^2=c+\tfrac{1}{2}$$

$\hookrightarrow$ rovnice kružnice se středem $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$ a poloměrem $\sqrt{c+\frac{1}{2}}$

$(x,y)\,\rho\,(u,v)$ znamená, že $((x,y),(u,v))\in\rho$

$\rho\subseteq(\mathbb{R}^2)^2$



$\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\rho$ je rozklad roviny na kružnice

$a\rho b$ znamená $(a,b)\in\rho$ $\rho\subseteq A\times A$

ρ relace na množině A

– R, S, T

– ρ je antisymetrická, jestliže platí $a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a=b$

$a,b\in A$

• ρ se naz. uspořádání, jestliže ρ je R, AS, T

• ρ se naz. lineární uspořádání, je-li ρ uspořádání a $\forall a,b\in A: a\rho b \vee b\rho a$

5.2 $(\mathbb{N}, \preceq)$, kde $\preceq \subseteq \mathbb{N}^2$

(i) $x \preceq y \iff x = y$ $\qquad x \preceq y \quad (x,y) \in \preceq$

$$\preceq = \{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\} \subseteq \mathbb{N}^2$$

R, S, AS

$x \preceq x \quad \forall x \in A$

$x \preceq y \Rightarrow y \preceq x \quad \forall x, y \in A$

$x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A$

T

$x \preceq y \wedge y \preceq z \Rightarrow x \preceq z \quad \forall x, y, z \in A$

$\preceq$ je uspořádání

není lineární: $(1,2) \notin \preceq$

$(2,1) \notin \preceq$

Hasseovský graf: $\cdot_1 \quad \cdot_2 \quad \cdot_3 \quad \cdot_4 \quad \dots$

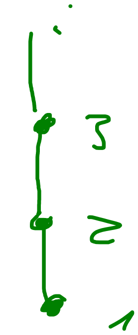
(ii) $x \preceq y \iff x \leq y$ $\qquad (1,2) \in \preceq$

$(2,1) \notin \preceq$

R, T, ~~S~~, AS

$\Rightarrow$ je lineární usp.

Hasseovský graf



(iii) $x \preceq y \iff x < y$

$\rightsquigarrow$ není R $\Rightarrow$ není US?

(iv) $x \preceq y \iff$ # cifer x je menší nebo rovno # cifer y

- je R, není S,

$$x \preceq y \not\Rightarrow y \preceq x$$

- ~~je~~ není AS

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \not\Rightarrow x = y$$

Není uspořádání

(iv + ½) $x \preceq y \iff y = 4$ nebo $x = y$

- je R, není S, je AS

$$1 \preceq 4 \qquad x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$$

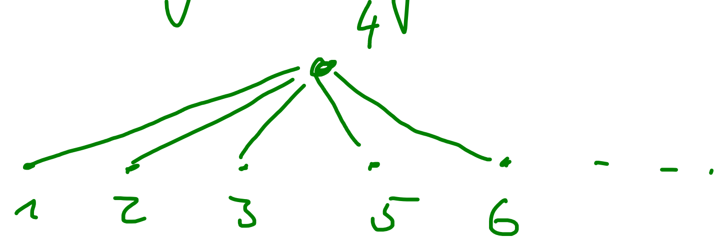
$$4 \not\preceq 1$$

$y = 4$ nebo $x = y$ $\qquad$ $x = 4$ neb $x = y$

- je T

$\preceq$ je uspořádání, není lineární

Hasseův diagram:



$x \preceq 4 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$1 \npreceq 2$

$2 \npreceq 1$

(vi) $x \preceq y \iff (x = y)$ nebo $(2 \nmid x \wedge 2 \mid y)$ nebo $(2 \mid x+y \wedge x < y)$

$\iff (x = y)$ nebo (x liché, y sudé) nebo (x, y stejná parita a $x < y$)

- R, není S, je AS

$x \preceq y \not\Rightarrow y \preceq x$ | $x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$ ✓

$x = y$ nebo x liché y sudé nebo x, y stejná parita a $x < y$ | $y = x$ nebo y liché x sudé nebo x, y st.p. a $y < x$

- je T

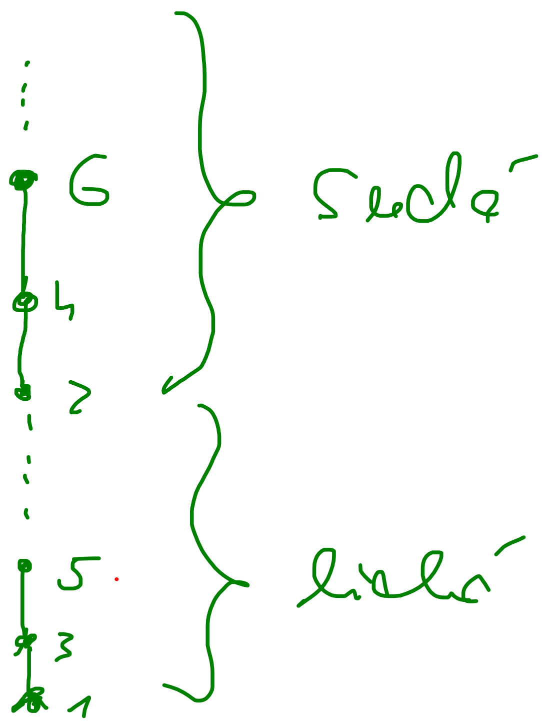
$x \preceq y \wedge y \preceq z$

$\Downarrow$

$x \preceq z$

$y = z$ nebo y liché, z sudé neb y, z st.p. a $y < z$

$\Rightarrow \leq$ je uSP., je lineární



5.3: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

-2

$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

schod. tvar

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \sim & \multicolumn{6}{c}{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array}$$

reduk. schod. tvar

$\boxed{x_2 = t}$ $\quad$ $\boxed{x_5 = s}$ $\quad$ $s, t \in \mathbb{R}$

$\boxed{x_4 = 0}$

$x_3 + x_5 = 1$ $\quad$ $\boxed{x_3 = -s + 1}$

$x_1 + x_2 + x_5 = 2$ $\quad$ $\boxed{x_1 = -t - s + 2}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s+2 \\ t \\ -s+1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$