8.2. komentář

$B = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ 4×4

vlastní čísla $\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 4$

$\lambda_3 = 5$

$\lambda_4 = 6$

vlastní vektory $v_1 = (1, 0, 1, 0)$

$v_2 = \ldots$

$v_3 = \ldots$

$v_4 = \ldots$

$B v_i = \lambda_i v_i$

Tedy $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$w \mapsto B \cdot w$

↳ sloupcový vektor

$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ báze

z vlastních vektorů

$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = B$ $\quad\varepsilon$ = standardní báze

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha, (\varphi(v_2))_\alpha, (\varphi(v_3))_\alpha, (\varphi(v_4))_\alpha \right)$$

$$(\varphi(v_1))_\alpha = (3v_1)_\alpha = 3(v_1)_\alpha = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9.1

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

Jaké lineární zobr. zadává tato matice?

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$w \mapsto C \cdot w$$

$\langle u_1, u_1 \rangle = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$

$\langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = 1$

$\langle u_1, u_2 \rangle = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 0$

$\langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$

C je ortogonální matice

- $C^T \cdot C = E$
- vektory sloupce (řádky) tvoří ortonormální bázi

Vlastní čísla matice C:

$$\det(C-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$$

$3(\frac{2}{3}-\lambda)$

(-2)

$$= -\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3\lambda^2-4\lambda+1 & -2(\frac{2}{3}-\lambda)-\frac{2}{3} \\ 0 & -2(\frac{2}{3}-\lambda)-\frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$3\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^2-\frac{1}{3} = 3\left(\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{3}$$

$$= 3\lambda^2-4\lambda+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 3\lambda^2-4\lambda+1 & 2\lambda-2 \\ 2\lambda-2 & -\lambda+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(\lambda-1)(3\lambda^2-4\lambda+1) - 4(\lambda-1)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{3}(\lambda-1)\left(3\lambda^2-4\lambda+1+4(\lambda-1)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(\lambda-1)(3\lambda^2-3) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow$ algebraická násobnost 2

$\lambda_2 = -1$

Platí: je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo ortogonální matice, pak $|\lambda| = 1$

Vlastní vektory pro $\lambda_1 = 1$

$$C - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ 2-dim. prostor vlastních vektorů

$x_2 := p$

$x_3 := q$

$x_1 = -p - 2q$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

s bází

$w_1 = (-1, 1, 0)$

$w_2 = (-2, 0, 1)$

NB: geometrická násobnost vl. čísla $\lambda_1 = 1$ je 2

$\lambda_2 = -1$

$$C + E = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 \quad & x_2 \quad & x_3 \end{array} \end{array}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + p - 2p = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_3 &= 2p \\ x_2 &= p \\ x_1 &= p \end{aligned}}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$ má vlastní vektor $v = (1, 1, 2)$

NB: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní OG-matice pak jejich vlastní vektory jsou na sebe kolmé

<u>Shrnutí</u>: $\lambda_1 = 1$ má 2-dim vl. podprostor generovaný
$w_1 = (-1, 1, 2)$
$w_2 = (-2, 0, 1)$

$\lambda_2 = -1$ má vl. vektor
$v = (1, 1, 2)$

<u>Závěr</u>: φ je symetrie podle roviny $P := \langle w_1, w_2 \rangle$

9.2

$$C = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

- C není ortogonální

<u>Vlastní čísla</u> ?? (spočítejte sami)

<u>$\lambda_1 = 1$</u>: $C - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2-dim prostor vl. vektorů generovaný $w_1 = (1,0,-1)$

$w_2 = (2,1,0)$

$\lambda_2 = 0$: $C - 0\cdot E = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$$

vlastní vektor $v = (1,2,1)$

Závěr: $\langle v, w_1\rangle = \langle v, w_2\rangle = 0$

$\Rightarrow$ kolmá projekce na rovinu $\sigma = \langle w_1, w_2\rangle$.

Dále určíme rovinu ρ: $x_1 - x_3 = 0$.

Určete obraz tětovaciny

při zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$w \mapsto C \cdot w.$

· ρ je generována vektory

$u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$

$$C \cdot u_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot u_2 = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Tedy obraz roviny ρ

je generovaný vektorem $(1, -1, 1)$

(tedy $\rho \perp \tau$). $\rho \cap \tau$