1. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2020 – 28. 1. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujeme rovinu σ zadanou rovnicí (tj. implicitně) $x+2y-2z=6$. Určete:

a) parametrický popis roviny σ,

b) vzdálenost roviny σ od bodu $[0,0,0]$,

c) průsečík roviny σ s přímkou p, která prochází bodem $[0,0,0]$ a má směrový vektor $(1,1,0)$,

d) úhel, který svírá rovina σ s přímkou p,

e) rovnici roviny ρ, která je rovnoběžná s rovinou σ a jejíž vzdálenost od roviny σ je rovna 1.

Napište vždy všechna řešení, je-li jich více. Jestliže některá z částí a) – e) nemá řešení, zdůvodněte, proč tomu tak je.

2. (4 body) V prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány přímky p, q a bod C takto:

$$p : [1,3,0] + r(-1,1,2), \quad q : [-1,2,2] + s(2,1,0), \quad C = [0,4,3].$$

Určete bod $A \in p$ a bod $B \in q$ tak, že přímka procházející body A a B prochází i bodem C.

3. (4 body) Nechť φ je shodné zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe a to symetrie podle přímky zadané parametricky $[0,0,0] + r(1,1,0)$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

4. (3 body) Velká firma poskytuje všem svým 220 zaměstnancům služební notebook. Díky exkluzivní smlouvě se značkovým dodavatelem se notebooky vždy o prázdninách zkontrolují a notebooky s vážnější závadou nahrazují novými notebooky. Statisticky bylo zjištěno, že z notebooků, které jsou v provozu jeden rok, je závadných 20% a z notebooků, které jsou v provozu dva roky, je závadných 50%.

Firma se nejprve rozhodla, že bude používat každý notebook nejvýše tři roky, tj. po třech letech vyřadí všechny notebooky. Dodavatelská firma tedy nahradí závadné notebooky po jednom a dvou letech a všechny notebooky po třech letech. Určete, jak vypadá věková struktura notebooků ve firmě po dlouhodobém vývoji. Dále určete, kolik lze očekávat, že se notebooků o letošních prázdninách vymění za nové.

Příklad řešte jako úlohu na Leslieho populační model pro populaci notebooků, přičemž dokažte primitivnost použité matice. (Ale poznamenejme, že příklad lze řešit i jako Markovův proces.)

Řešení a bodování:

1. **[5 bodů]** Označme $n = (1, 2, -2)$ normálový vektor roviny σ a $v = (1, 1, 0)$ směrový vektor přímky p.

a) **[1b]** K určení parametrického popisu potřebujeme nějaký bod v rovině σ (např. $[6, 0, 0]$) a dva vektory kolmé na n (např. $(2, -1, 0)$ a $(0, 1, 1)$). Odpovídající parametrický popis je

$$[6, 0, 0] + r(2, -1, 0) + s(0, 1, 1).$$

b) **[1b]** Kolmá projekce bodu $P = [0, 0, 0]$ do roviny σ je bod $A = [0, 0, 0] + t(1, 2, -2)$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$. Podmínka $A \in \sigma$ znamená, že $t + 2(2t) - 2(-2t) = 6$, tj. $t = \frac{2}{3}$ a tedy $A = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}]$. Hledaná vzdálenost je rovna $|PA| = 2$.

c) **[1b]** Každý bod $B \in p$ je tvaru $B = [0, 0, 0] + s(1, 1, 0)$. Jestliže také $B \in \sigma$, pak $s + 2s = 6$, tj. $s = 2$. Tedy $B = [2, 2, 0]$ je hledaný průsečík.

d) **[1b]** Nejprve určíme úhel α, který svírá přímka p s normálovým směrem roviny σ, tj. úhel, který svírají vektory n a v. Platí $\cos\alpha = \frac{|\langle n,v\rangle|}{||n||\cdot||v||} = \frac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\alpha = 45°$. Tedy úhel, který svírá přímka p s rovinou σ, je $90° - 45° = 45°$.

e) **[1b]** Rovina ρ je dána rovnicí $x + 2y - 2z = d$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$ a k určení d stačí najít libovolný bod $C \in \rho$. Povedeme-li kolmici k rovině σ například bodem $D = [6, 0, 0] \in \sigma$, pak bod C můžeme hledat na této kolmici, tj. $C = [6, 0, 0] + r(1, 2, -2)$, přičemž musí platit $||\overrightarrow{CD}|| = 1$. Jelikož $||\overrightarrow{CD}|| = ||r(1, 2, -2)||$, dostaneme $|r| = \frac{1}{3}$, tj. budou dvě řešení. Pro $r = \frac{1}{3}$ je $C = [\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ a $C \in \rho$ znamená $\frac{19}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} - 2(-\frac{2}{3}) = d$, tj. $d = 9$. Pro $r = -\frac{1}{3}$ je $C = [\frac{17}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $C \in \rho$ znamená $\frac{17}{3} + 2\cdot(-\frac{2}{3}) - 2\cdot\frac{2}{3} = d$, tj. $d = 3$. Tedy existují dvě možnosti pro rovinu ρ: $x + 2y - 2z = 9$ a $x + 2y - 2z = 3$.

2. **[4 body]** Bod a směrový vektor přímky p označíme $P = [1, 3, 0]$ a $v_1 = (-1, 1, 2)$ a bod a směrový vektor přímky q označíme $Q = [-1, 2, 2]$ a $v_2 = (2, 1, 0)$. Dále položíme $w := \overrightarrow{PC} = C - P = (-1, 1, 3)$. Pak bod B musí ležet v rovině $P + rv_1 + tw$, tedy $B = P + rv_1 + tw$. Jelikož také $B = Q + sv_2$, dostaneme $P + rv_1 + tw = Q + sv_2$, tj.

$$rv_1 + tw - sv_2 = Q - P,$$

kde $Q - P = (-2, -1, 2)$. Přepíšeme-li tento vztah do matice, dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

což má řešení $r = -2$, $t = 2$ a $s = 1$. Odtud hned dostáváme $B = Q + sv_2 = [-1, 2, 2] + (2, 1, 0) = [1, 3, 2]$. Bod A určíme jako průsečík přímky $B + a\overrightarrow{BC}$ a přímky $p : P + \tilde{r}v_1$. (Parametry r a $\tilde{r}$ mohou být rozdílné!) Tedy $A = P + \tilde{r}v_1 = B + a\overrightarrow{BC}$, kde $\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 1, 1)$. Tedy

$$\tilde{r}v_1 - a\overrightarrow{BC} = B - P,$$

kde $B - P = (0, 0, 2)$. Přepsáním do matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z čehož dopočítáme $\tilde{r} = 2$ a $a = 2$. Tedy $A = P + \tilde{r}v_1 = [1, 3, 0] + 2(-1, 1, 2) = [-1, 5, 4]$.

3. **[4 body]** Směrový vektor přímky je $u_1 = (1, 1, 0)$. Tento vektor doplníme na bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ tak, aby vektor u_1 byl kolmý na vektory u_2 a u_3, např. $u_2 = (1, -1, 0)$ a $u_3 = (0, 0, 1)$. V této bázi má zobrazení φ jednoduchý tvar

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dále použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (\mathrm{id})_{\alpha,\epsilon}$, kde

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\mathrm{id})_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek tedy je

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (\mathrm{id})_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. [**3 body**] Matice Leslieho modelu je v tomto případě

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

kde A^4 je pozitivní, tj. A je primitivní. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je $v = (5, 4, 2)$ a jelikož $5 + 4 + 2 = 11$, rozložení populace notebooků ve firmě s 220 zaměstnanci bude dáno vektorem $\frac{220}{11} v = (100, 80, 40)$. Nových notebooků tedy bude $100 \cdot \frac{1}{5} + 80 \cdot \frac{1}{2} + 40 = 100$.