

2. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2020 – 11. 2. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru \mathbb{R}^3 je dána rovina ρ a přímka π ,

$$\rho : [-2, -3, 0] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0), \quad \pi : [0, 1, 2] + t(1, 0, 1).$$

Dále je dán bod $B = [3, 4, 5]$ a počátek $O = [0, 0, 0]$.

- Najděte nějaký vektor n , který je kolmý na rovinu ρ .
 - Určete parametrický popis roviny σ , která je rovnoběžná s rovinou ρ , přičemž vzdálenost těchto dvou rovin je 6.
 - Rozhodněte, zda bod B leží v rovině ρ .
 - Určete průsečík roviny ρ s osou z .
 - Určete velikost úhlu α , který svírá rovina ρ a přímka π .
2. (2 body) Určete, pro která a má následující soustava nad \mathbb{R} právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, resp. žádné řešení:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + ax_3 &= 0. \end{aligned}$$

3. (4 body) Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A spolu s transformační maticí P , tj. $A = PJP^{-1}$.
 - Uvažme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $\varphi(v) = B \cdot v$, kde $v \in \mathbb{R}^3$ chápeme jako sloupcový vektor. Rozhodněte, zda existuje báze \mathbb{R}^3 , ve které má zobrazení φ matici A .
4. (4 body) Firma se rozhodla tajně sledovat čas příchodu svých zaměstnanců. Směna začíná v 6:00 a firemní statistik vždy ráno u každého zaměstnance eviduje, jestli přišel buď předčasně (tj. o více než 15 minut před 6:00) nebo včas (o maximálně 15 minut před 6:00) nebo s mírným zpožděním (o maximálně 15 minut po 6:00) nebo s velkým zpožděním (o více než 15 minut po 6:00). Statistik dlouhodobým sledováním zjistil následující údaje.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den předčasně, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/4$ opět předčasně, s pravděpodobností $1/2$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s mírným zpožděním.
 - Přišel-li některý zaměstnanec v daný den včas, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.

- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s mírným zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s velkým zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/4$ předčasně, s pravděpodobností $1/2$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s mírným zpožděním.

Jeden z řadových zaměstnanců se jmenuje Rudolf. Jednou večer po mnoha měsících sledování se majitel firmy naštvál na nedochvilné zaměstnance a rozhodl se je potrestat: kdo následující pracovní den dorazí s velkým zpožděním, ten bude za trest celý den umývat záchody, a kdo přijde s mírným zpožděním, bude celý den drhnout podlahu. S jakou pravděpodobností stráví Rudolf následující den čištěním záchodu a s jakou pravděpodobností bude drhnout podlahu? Úlohu řešte jako Markovův proces, přičemž dokažte primitivnost použité matice.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

- a) [1b] Vektor $n = (x, y, z)$ musí být kolmý k vektorům ze zaměření roviny ρ , a proto musí splňovat rovnice $x + y - 4z = 0$ a $x - y = 0$. Řešením této soustavy je (až na násobek) vektor $n = (2, 2, 1)$.
- b) [1b] Rovina σ má stejné zaměření jako rovina ρ , zbývá tedy najít nějaký bod $D \in \sigma$. „Posunutím“ bodu $[-2, -3, 0] \in \rho$ ve směru normálového vektoru dostaneme bod $D = [-2, -3, 0] + a(2, 2, 1)$; pak vzdálenost rovin ρ a σ (která má být 6) bude rovna velikosti vektoru $a(2, 2, 1)$, $a \in \mathbb{R}$. Jelikož $\|(2, 2, 1)\| = 3$, musíme tedy zvolit $a = 2$ nebo $a = -2$. Úloha má dvě řešení: pro $D_1 = [-2, -3, 0] + 2(2, 2, 1) = [2, 1, 2]$ a $D_2 = [-2, -3, 0] - 2(2, 2, 1) = [-6, -7, -2]$ dostáváme roviny

$$\sigma_1 : [2, 1, 2] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0) \quad \text{a} \quad \sigma_2 : [-6, -7, -2] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0).$$

- c) [1b] Potřebujeme zjistit, zda existují parametry r a s takové že, jejich dosazením do parametrického popisu roviny ρ dostaneme bod B . Hledáme tedy $r, s \in \mathbb{R}$ takové, že $-2 + r + s = 3$, $-3 + r - s = 4$ a $-4r = 5$. Tato soustava nemá řešení, tedy bod B v rovině ρ neleží.
- d) [1b] Body na ose z mají souřadnice x a y nulové, tj. potřebujeme nalézt parametry r a s takové, že $-2 + r + s = 0$ a $-3 + r - s = 0$. Tato soustava rovnic má řešení $r = \frac{5}{2}$ a $s = -\frac{1}{2}$. Hledaný průsečík je tedy $[-2, -3, 0] + \frac{5}{2}(1, 1, -4) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = [0, 0, -10]$.
- e) [1b] Nejprve určíme úhel β , který svírá normála n roviny ρ s přímkou π . Dostaneme

$$\cos \beta = \frac{\langle (2, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle}{\|(2, 2, 1)\| \cdot \|(1, 0, 1)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj. $\beta = \frac{\pi}{4}$. Úhel α je doplněk tohoto úhlu do 90° , tj. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

2. [2 body] Eliminací rozšířené matice soustavy docílíme schodovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 3 & -2-a & a \\ 0 & 1 & 1-2a & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & 5a-5 & a \end{array} \right).$$

Nejdříve si rozmyslíme případ, kdy $5a - 5 = 0$, tj. $a = 1$. V tomto případě soustava nemá řešení (hodnost matice je 2 a hodnost rozšířené matice je 3). Pokud $a \neq 1$, tj. $5a - 5 \neq 0$, pak má soustava právě jedno řešení. (Tedy pro žádné $a \in \mathbb{R}$ nenastane možnost, že má soustava nekonečně mnoho řešení.)

3. [4 body]

- a) [3b] Spočteme $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$, tedy matice A má jediné vlastní číslo 1. Z matice

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vidíme, že prostor vlastních vektorů pro vlastní číslo 1 je generovaný vektory $v_1 = (0, 1, 0)$ a $v_2 = (1, 0, -1)$. Než z prostoru vlastních vektorů vybereme vhodou bázi, najdeme si vektor w splňující $(A - E)w = a_1 v_1 + a_2 v_2$ pro nějaké parametry $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ - vektor w spolu s vlastním vektorem $a_1 v_1 + a_2 v_2$ pak budou odpovídat Jordanově buňce 2×2 . Z matice

$$(A - E|a_1 v_1 + a_2 v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \end{array} \right)$$

vidíme, že nutně $a_2 = 0$ a dále můžeme zvolit např. $a_1 = 1$ a $w = (1, 0, 0)$, tj. $a_1 v_1 + a_2 v_2 = v_1$. Tedy v bázi $\alpha = (v_1, w, v_2)$ bude Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A = PJP^{-1}$ používá matice přechodu $P^{-1} = (\text{id})_{\alpha, \epsilon}$ a $P = (\text{id})_{\epsilon, \alpha}$, kde ϵ je standardní báze. Sloupce matice P jsou tedy bázové vektory báze α , tj.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) [1b] Matice B je v Jordanově kanonickém tvaru a tedy je to Jordanův tvar zobrazení φ ; ten je tvořen jedinou buňkou a tedy je dán jednoznačně. Matice tohoto zobrazení v libovolné bázi proto musí mít Jordanův tvar B . Jelikož má matice A má jiný Jordanův tvar, požadovaná báze neexistuje.

4. [4 body] Uvažujeme-li pořadí stavů (předčasně, včas, mírné zpoždění, velké zpoždění), jedná se o Markovův proces se (stochastickou) maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je třeba najít vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 1. Hledáme tedy řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$B - E_4 = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_4 je jednotková matice 4×4 . Její řešení je (až na násobek) vektor $v = (3, 3, 1, 1)$. My ale potřebujeme pravděpodobnostní vektor, což je $w = \frac{1}{3+3+1+1}v = \frac{1}{8}(3, 3, 1, 1) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. Rudolf tedy bude čistit záchod pravděpodobností $\frac{1}{8}$, a bude drhnout podlahu s pravděpodobností také $\frac{1}{8}$.