

2. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2020 – 11. 2. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru \mathbb{R}^3 je dána rovina ρ a přímka π ,

$$\rho : [-2, -3, 0] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0), \quad \pi : [0, 1, 2] + t(1, 0, 1).$$

Dále je dán bod $B = [3, 4, 5]$ a počátek $O = [0, 0, 0]$.

- Najděte nějaký vektor n , který je kolmý na rovinu ρ .
 - Určete parametrický popis roviny σ , která je rovnoběžná s rovinou ρ , přičemž vzdálenost těchto dvou rovin je 6.
 - Rozhodněte, zda bod B leží v rovině ρ .
 - Určete průsečík roviny ρ s osou z .
 - Určete velikost úhlu α , který svírá rovina ρ a přímka π .
2. (2 body) Určete, pro která a má následující soustava nad \mathbb{R} právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, resp. žádné řešení:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + ax_3 &= 0. \end{aligned}$$

3. (4 body) Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A spolu s transformační maticí P , tj. $A = PJP^{-1}$.
 - Uvažme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $\varphi(v) = B \cdot v$, kde $v \in \mathbb{R}^3$ chápeme jako sloupcový vektor. Rozhodněte, zda existuje báze \mathbb{R}^3 , ve které má zobrazení φ matici A .
4. (4 body) Firma se rozhodla tajně sledovat čas příchodu svých zaměstnanců. Směna začíná v 6:00 a firemní statistik vždy ráno u každého zaměstnance eviduje, jestli přišel buď předčasně (tj. o více než 15 minut před 6:00) nebo včas (o maximálně 15 minut před 6:00) nebo s mírným zpožděním (o maximálně 15 minut po 6:00) nebo s velkým zpožděním (o více než 15 minut po 6:00). Statistik dlouhodobým sledováním zjistil následující údaje.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den předčasně, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/4$ opět předčasně, s pravděpodobností $1/2$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s mírným zpožděním.
 - Přišel-li některý zaměstnanec v daný den včas, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.

- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s mírným zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s velkým zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/4$ předčasně, s pravděpodobností $1/2$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s mírným zpožděním.

Jeden z řadových zaměstnanců se jmenuje Rudolf. Jednou večer po mnoha měsících sledování se majitel firmy naštvál na nedochvilné zaměstnance a rozhodl se je potrestat: kdo následující pracovní den dorazí s velkým zpožděním, ten bude za trest celý den umývat záchody, a kdo přijde s mírným zpožděním, bude celý den drhnout podlahu. S jakou pravděpodobností stráví Rudolf následující den čištěním záchodu a s jakou pravděpodobností bude drhnout podlahu? Úlohu řešte jako Markovův proces, přičemž dokažte primitivnost použité matice.