3. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2020 – 18. 2. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána přímka p parametricky a rovina ρ obecnou rovnicí:

$$p : [1, 1, 0] + r(2, 2, -1), \qquad \rho : x_1 - x_3 = 8\,.$$

Dále je dán bod $X = [1, -2, 3]$. Určete

a) vzdálenost bodu X od roviny ρ,

b) odchylku přímky p a roviny ρ,

c) parametrické vyjádření roviny ρ,

d) obecnou rovnici roviny σ, která obsahuje přímku p a je kolmá na rovinu ρ,

e) vzdálenost bodu X od přímky p.

2. (5 bodů) Uvažme matici A a vektor w,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 10 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad w = (-7, 5, 1),$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Dále uvažme bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že A je matice přechodu z báze α do standardní báze ϵ, tj. $(id)_{\epsilon,\alpha} = A$. Určete hodnotu tohoto parametru tak, aby

a) determinant matice A byl roven 0,

b) matice A měla vlastní číslo 1,

c) vektor w byl vlastním vektorem matice A,

d) báze α byla ortogonální,

e) objem čtyřstěnu $PABC$, kde $P = [0, 0, 0]$, $A = P + v_1$, $B = P + v_2$ a $C = P + v_3$, byl roven 1.

3. (5 bodů) Nechť φ je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny σ zadané implicitně rovnicí $x - y + 2z = 0$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

a) **[1b]** Sestrojíme projekci bodu X do roviny ρ. Uvažujeme tedy přímku q, která je kolmá k rovině ρ a prochází bodem X. Normálový vektor roviny ρ je $(1, 0, -1)$. Přímka q má tedy parametrické vyjádření $[1, -2, 3] + t(1, 0, -1)$. Uvažme průnik q a ρ dosazením parametrického vyjádření q do obecné rovnice ρ: $-2 + 2t = 8$. Odtud $t = 5$ a kolmý průmět je $Y = [6, -2, -2]$. Vzdálenost je tedy velikost vektoru $\overrightarrow{XY} = 5 \cdot (1, 0, -1)$, která je $5\sqrt{2}$.

b) **[1b]** Nejprve spočítáme odchylku přímky p a normálového vektoru $(1, 0, -1)$ roviny ρ (hledaná odchylka přímky a roviny je pak doplněk tohoto úhlu do 90 stupňů). Tj. zajímá nás odchylka α vektorů $(2, 2, -1)$ a $(1, 0, -1)$,

$$\cos\alpha = \frac{|\big((2,2,-1),(1,0,-1)\big)|}{||(2,2,-1)|| \cdot ||(1,0,-1)||}, = \frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tj. $\alpha = 45°$. Tedy odchylka přímky p a roviny ρ je $45°$.

c) **[1b]** Jedná se o řešení systému o jedné rovnici $x_1 - x_3 = 8$. Zvolíme $x_2 = s$ a $x_3 = t$ jako volné parametry a dostaneme $x_1 = 8 + t$. Rovina ρ má tedy parametrické vyjádření $[8, 0, 0] + s(0, 1, 0) + t(1, 0, 1)$.

d) **[1b]** Parametrické vyjádření roviny σ vznikne „přidáním“ normálového vektoru $(1, 0, -1)$ k přímce p, tj.

$$\sigma : [1, 1, 0] + r(2, 2, -1) + s(1, 0, -1).$$

Tedy normálový vektor roviny σ je $n = (2, -1, 2)$ (neboť je kolmý na vektory $(2, 2, -1)$ a $(1, 0, -1)$). Jelikož dále $[1, 1, 0] \in \sigma$, dostaneme obecnou rovnici $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$.

e) **[1b]** Hledáme t takové, že pro bod $Z = [1, 1, 0] + t(2, 2, -1)$ platí $\overrightarrow{XZ} \perp p$. Tzn. vektor $\overrightarrow{XZ} = Z - X = (0, 3, -3) + t(2, 2, -1)$ je kolmý k vektoru $(2, 2, -1)$. Proto $2\cdot(0+2t) + 2\cdot(3+2t) - (-3-t) = 9t + 9 = 0$, tj. $t = -1$. Tedy $\overrightarrow{XZ} = (0, 3, -3) - (2, 2, -1) = (-2, 1, -2)$. Vzdálenost bodu X a přímky p je proto $||\overrightarrow{XZ}|| = ||(-2, 1, -2)|| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

2. [5 bodů]

a) Determinant matice A s parametrem $a \in \mathbb{R}$ spočítáme např. Laplaceovým rozvojem podél prvního sloupce,

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 10 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + a\det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = 24a + 12.$$

Tedy $\det A = 0$ pro $a = -\frac{1}{2}$.

b) Má platit $\det(A - E) = 0$, tj.

$$\det(A - E) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix} = 20a.$$

Tedy $a = 0$.

c) Má platit $Aw = \lambda w$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Spočítáme

$$Aw = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 10 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 7a + 7 \end{pmatrix}.$$

Tedy $(-7, 5, 7a+7) = \lambda(7, -5, 1)$, kde z prvních dvou složek vidíme, že $\lambda = -1$. Tedy poslední složka musí splňovat $7a + 7 = -1$, tj. $a = -\frac{8}{7}$.

d) Vztah $(id)_{\epsilon,\alpha} = A$ znamená, že sloupce matice A jsou vektory báze α, tj.

$$v_1 = (1, 0, a), \quad v_2 = (2, 1, -1) \quad \text{a} \quad v_3 = (-4, 10, 2).$$

Ortogonalita báze α znamená, že má platit $(v_1, v_2) = (v_1, v_3) = (v_2, v_3) = 0$. Přímým výpočtem se ověří, že $(v_2, v_3) = 0$ skutečně platí. Dále má platit

$$(v_1, v_2) = 2 - a = 0 \quad \text{a} \quad (v_1, v_3) = -4 + 2a = 0.$$

Tedy $a = 2$.

e) Objem čtyřstěnu $PABC$ je roven

$$\frac{1}{6}|\det A| = \frac{1}{6}|24a + 12|$$

použitím části a). Tedy $\frac{1}{6}|24a + 12| = 1$, tj. $|24a + 12| = 6$, což má dvě řešení $a \in \{-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$, [1b za alespoň jedno řešení.]

3. [5 bodů] Označme $v_1 = (1, -1, 2)$ normálový vektor roviny σ a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1: např. $v_2 = (1, 1, 0)$ a $v_3 = (0, 2, 1)$. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$, kde pro matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice $(id)_{\alpha,\epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$, tj.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \left((id)_{\epsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$