Toky v sítích

$G=(V,E)$ orientovaný graf

- $r :=$ zdroj (source)

  $s :=$ cíl (sink) síť

$w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ kapacity hran

- Tok v síti je $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

  t. ž. $\forall v \in V$, $v \neq s$, $v \neq r$ splňuje

$$\sum_{e=(v',v)} f(e) = \sum_{e=(v,v')} f(e)$$

<u>Velikost toku</u> je

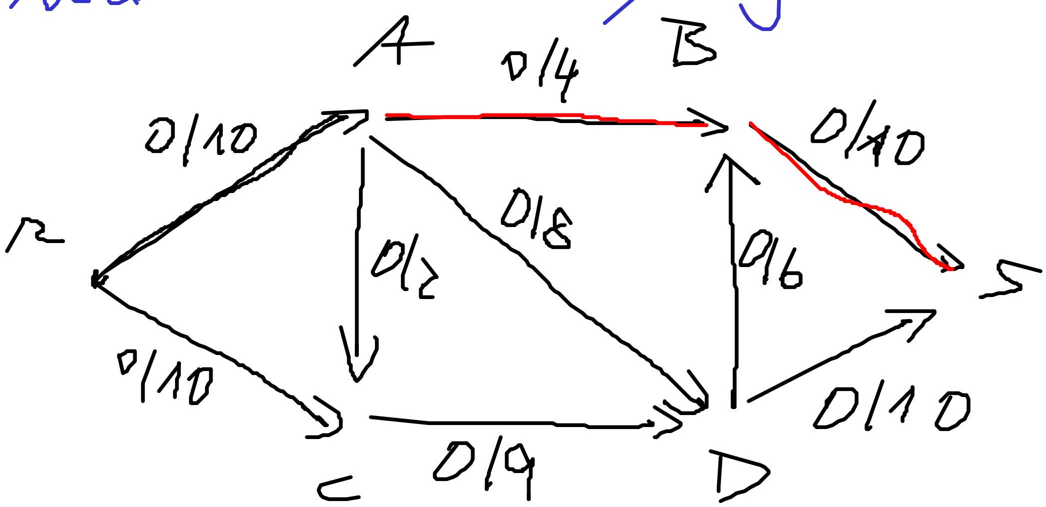
$$|f| = \sum_{e=(r,v')} f(e)$$

<u>Řez v síti</u> je $C \subseteq E$ t. ž. v $(V, E \setminus C)$ neexistuje cesta $r \rightsquigarrow s$

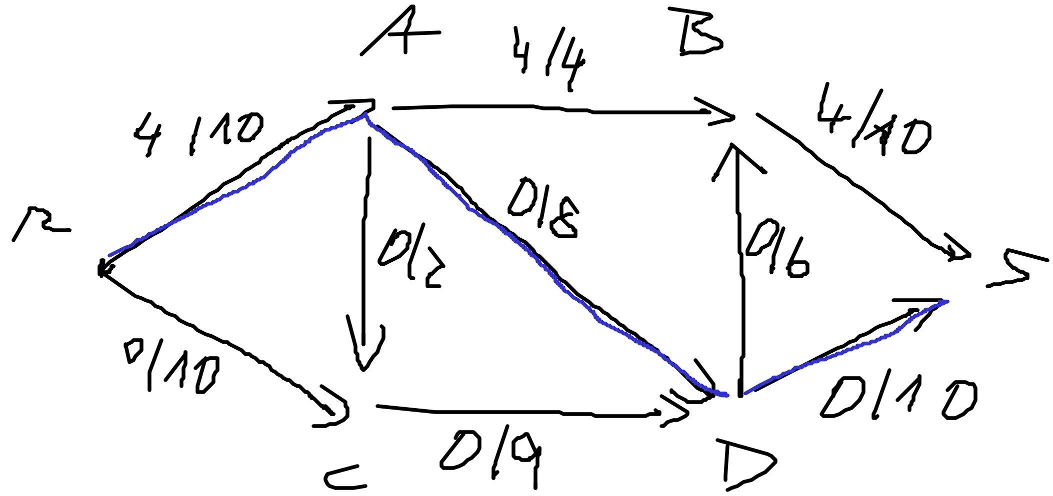
Thm: velikost maximálního toku je rovna velikosti minimálního řezu.

Kapacita řezu C je
$$|C| = \sum_{e \in C} w(e)$$

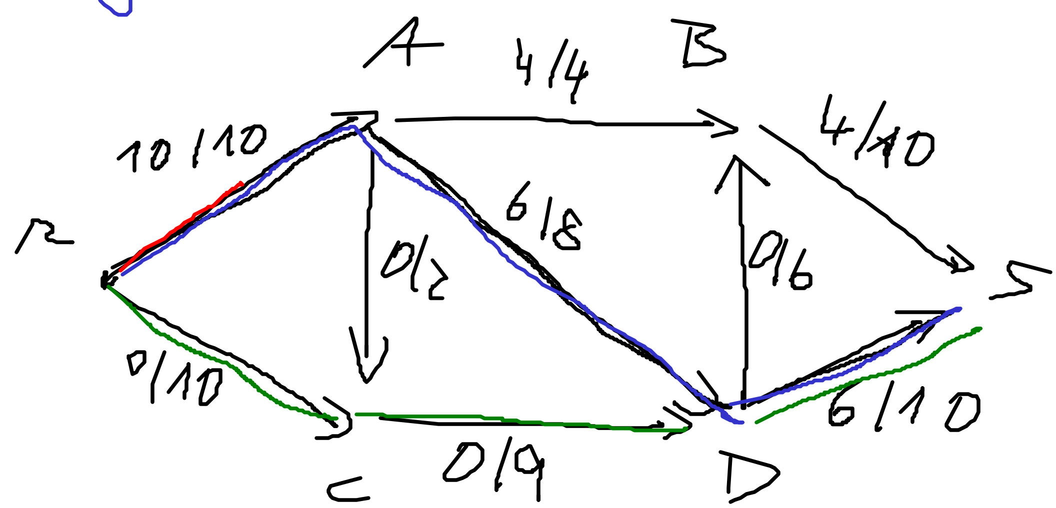
Př: Ford-Fulkerson alg.
na hledání největšího toku



1) cesta rABs je nesaturovaná, zbytková kapacita 4

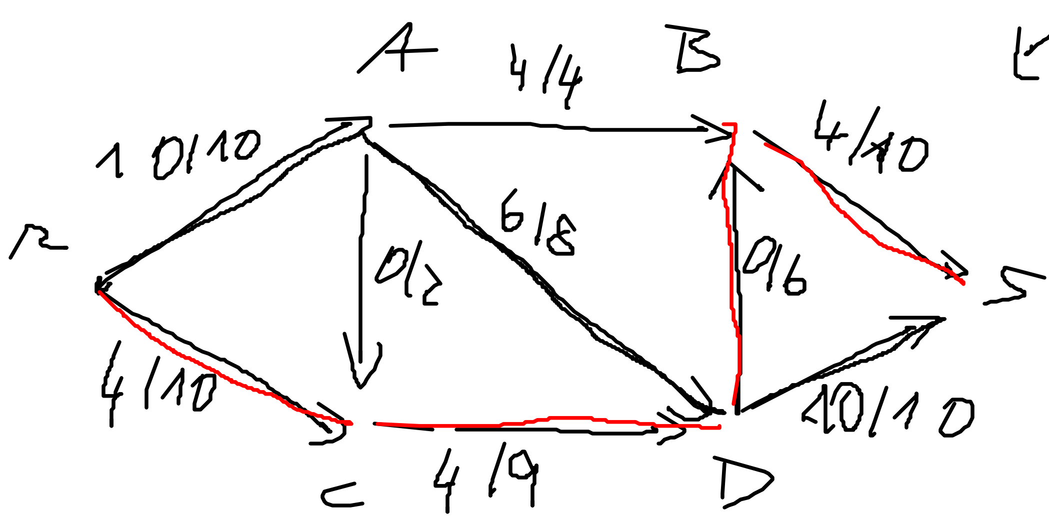


(2) cesta zADs má zbytkovou kapacitu 6

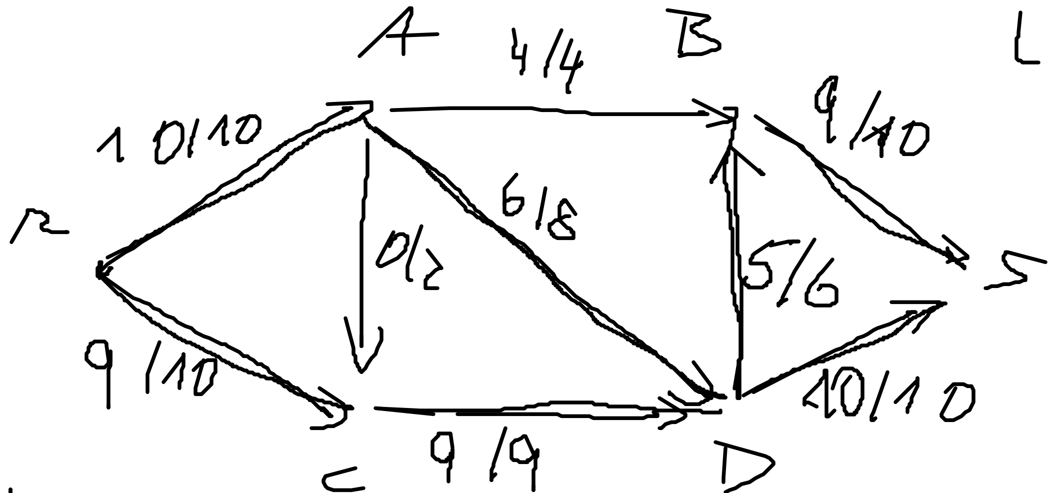


(3) cesta zCDs má zbytkovou kapacitu 4

tok velikosti 14

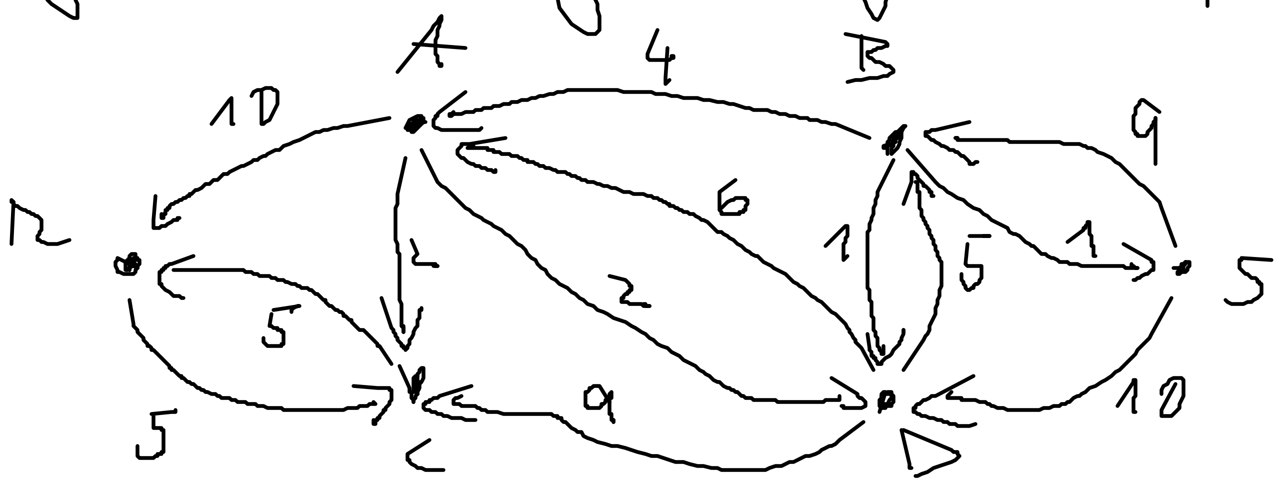


(4) cesta r C D B s má zbytkovú kapacitu 5



Nie ďalšího metot

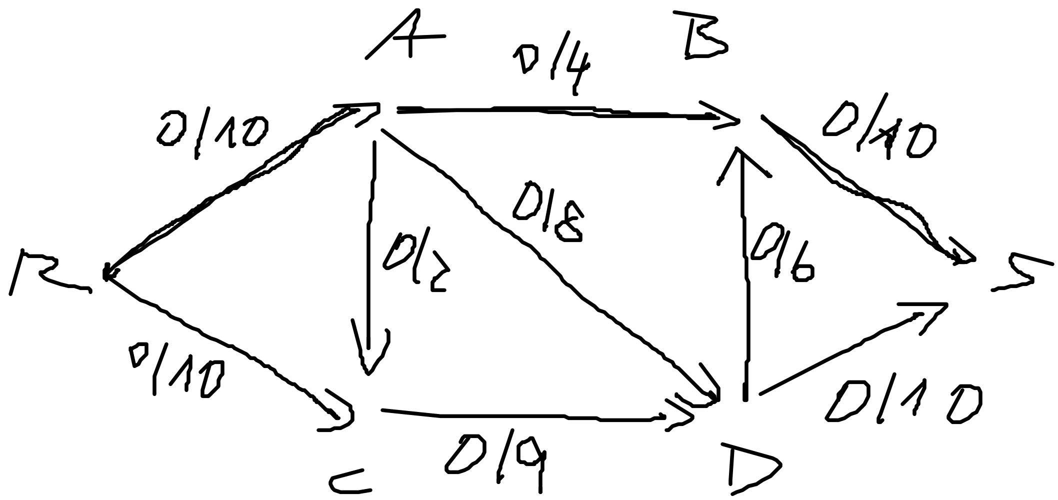
graf zbytkových kapacit



↳ rdo neexistuje cesta ze r do s.

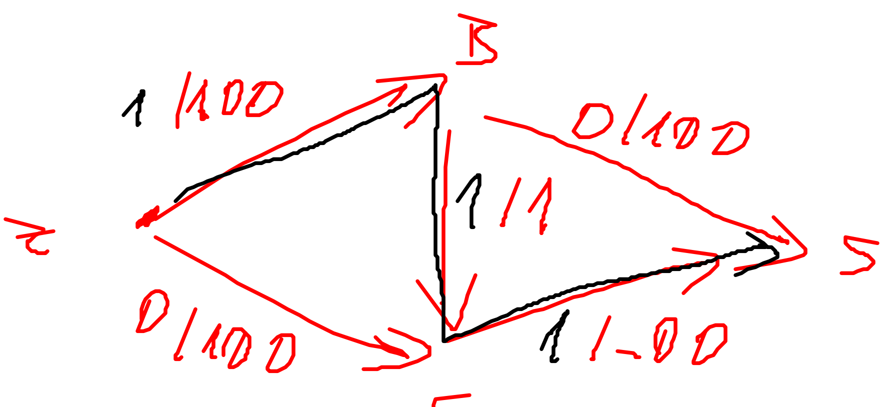
Výsledok: tok veľkosti 19

Minimální řez: (C, D), (R, A)



Pozn: algoritmus funguje pro celočíselné (racionální) kapacity

"Špatně" zvolený algoritmus



- R B C S
- Z C B S

Zbytkovanie je korektné

7.2 $y''+3y'+2y=e^{-x}$

$\rightsquigarrow$ z homogenizovanej rovnice je $y''+3y'+2y=0$

char. pol. $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

Korene $-1,-2$, obecné riešenie zhom. rovnice je

$$\boxed{y(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x},\quad A,B\in\mathbb{R}}$$

mn. všetkých riešení zhom. rce tvorí vektorový priestor.

Nájdeme partikulárne riešenie rce $y''+3y'+2y=e^{-x}$

$$\|$$

part. řešení hledáme ve tvaru

$$\underbrace{P(x)}_{=1} \cdot e^{-x}$$

polynom stupně 0

$$y(x) = x\,\underbrace{Q(x)}\,e^{-x}$$

stupně 0 → konst.

neboť -1 je kořenem char. pol.

$$y(x) = c\,x\,e^{-x}$$

$$\longrightarrow \quad y' = c\left[e^{-x} - x e^{-x}\right] = c(1-x)e^{-x}$$

$$y'' = c\left[-e^{-x} - (1-x)e^{-x}\right] = c(x-2)e^{-x}$$

dosadíme do $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

$$c(x-2)e^{-x} - 3c(x-1)e^{-x} + 2cxe^{-x} = e^{-x}$$

$$c\left[(x-2) - 3(x-1) + 2x\right] = 1$$

$$c = 1$$

Obecné řešení původní rovnice je

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + xe^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

Dále uvažme počáteční podmínky $y(0) = 0$

$y(1) = 1$

$$y(0) = A + B + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$y(1) = Ae^{-1} + Be^{-2} + e^{-1} = 1 \quad / e^2$$

$$Ae - A + e = e^2$$

$$A(e-1) = e^2 - e = e(e-1)$$

$$A = e = -B$$

<u>Výsledek</u>: $y(x) = e \cdot e^{-x} - ee^{-2x} + xe^{-x}$

$$= e^{-x+1} - e^{-2x+1} + xe^{-x}$$

8.2 $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}\cos x$

$\rightsquigarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$y(x) = A e^{(-1-i)x} + B e^{(-1+i)x}$$

- $e^{(-1-i)x} = e^{-x-ix} = e^{-x} e^{i(-x)} =$

$= e^{-x}\left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right) =$

$= e^{-x}(\cos x - i\sin x)$

- $e^{(-1+i)x} = e^{-x}(\cos x + i\sin x)$

součet $2\underbrace{e^{-x}\cos x}$

rozdíl $-2i\underbrace{e^{-x}\sin x}$

Reálná řešení z hom. rce
je tam

$$\boxed{y(x) = Ce^{-x}\cos x + De^{-x}\sin x \quad C, D \in \mathbb{R}}$$

Pravá strana $3e^{-x}\cos x$

$$\parallel$$

$$e^{-x}(\underbrace{3}_{\text{pol. stupně } 0}\cos x + 0\cdot\sin x)$$

$\alpha = -1$ $\qquad$ $\alpha + ib = -1 + i$

$\beta = 1$ $\qquad$ je kořenem ch. p.

Part. řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = xe^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

... dopočítat c_1, c_2