MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, učitelské studium

vzorová písemka

I. část

1. Pomocí kvantifikátorů a nerovností (tedy aniž uvedete pojem okolí) zapište, co pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ znamená, že

$$\text{a)} \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = -\infty \quad \text{b)} \lim_{\substack{x\to-3\\ y\to-\infty}} f(x,y) = 7.$$

2. Podle definice vypočtěte $f'_y(3,2)$ pro funkci $f(x,y) = x^2y + \mathrm{e}^x$.
3. Zapište limitu, kterou je definována hodnota $f''_{yx}(4,-5)$. (Uvnitř limity smí být použita parciální derivace prvního řádu.)
4. Má zadaná funkce $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ v některém bodě diferenciál tvaru $-8\mathrm{d}x + 4\mathrm{d}y$?
5. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = \dfrac{x+2}{y+1}$ s bodem dotyku $[2,3,?]$.
6. Určete $\mathrm{d}^2 f$ pro funkci $f(x,y) = x^3 - x^2y - y^3$ v obecném bodě $[x_0,y_0]$ s obecnými přírustky $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$.
7. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - 4xy = 0$.
8. Kterou substitucí zahájíte řešení diferenciální rovnice

$$\text{a)}\ (x^2+y^2)y' = 4xy\ , \quad \text{b)}\ y' = \frac{6+x^2y^4}{y^3}\ ?$$

   V obou případech pak pro novou neznámou funkci najděte diferenciální rovnici, kterou splňuje – neřešte ji, jen zapište, jakého je druhu.
9. Sestavte diferenciální rovnici 2. řádu s obecným řešením $y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}$.
10. V jakém tvaru budete hledat řešení rovnice $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$? (Neznámé koeficienty nepočítejte.)

II. část

1. U funkce $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^3 - 9y + \pi$ najděte všechny body lokálních maxim a minim a funkční hodnoty v nich.
2. Najděte to řešení diferenciální rovnice $y' \cdot \sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{y}$, pro které $y(0) = -2$.

   (Varianta: počáteční úloha $y' = 2x\big(\mathrm{e}^{-x^2} - y\big)$, $y(0) = 1$.)
3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $4y'' + 12y' + 9y = 9x^2 + 24x + 8$.

Výsledky příkladů II. části

1. Lokální maxium neexistuje, lokální minimum v jediném bodě $[x,y] = [3,3]$ a má hodnotu $f(3,3) = \pi - 27$. (Lokální extrém nenastává v jediném dalším stacionárním bodě $[x,y] = [-1,-1]$.)

2. $y = -\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$ (Varianta: $y = (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$).

3. $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + x^2$.