DRUHY KONSTRUKČNÍCH ÚLOH A ETAPY JEJICH ŘEŠENÍ

Obsah školní geometrie se nevyčerpává jejími definicemi a poučkami. V hodinách geometrie se musí řešit dostatek úloh, nejen těch *početních*, ale i úloh *konstrukčních.*

Konstrukční úlohy jsou pro zvládnutí geometrie velmi cenné, protože žáci při jejich řešení spojují názorné geometrické obrázky, které sami črtají nebo rýsují, s nehotovými logickými úvahami (často žel chybnými), o které sami usilují. Tímto způsobem žáci sami objevují nejjednodušší aplikace probraných poznatků v konkrétních geometrických situacích.

Konstrukční úlohy můžeme podle jejich zadání rozdělit na dva druhy, totiž na úlohy *polohové* a úlohy *nepolohové.*

Polohová úloha. V zadání takové úlohy jsou některé body či útvary (přímky, kružnice, trojúhelníky apod.) v rovině předem dány (umístěny), úkolem je pak k těmto daným objektům dorýsovat další objekt předepsaných vlastností. Tento neznámý objekt, který hledáme, tedy má mít požadovanou *polohu* vzhledem k daným objektům. Hledaných útvarů (řešení) může být více, i když některé z nich mohou být geometricky shodné (tj. dají se přemístit tak, aby splynuly). Přesto takové shodné útvary považujeme za *různá* řešení dané úlohy, protože mají různá umístění. Za stejná řešení tedy považujeme jen útvary totožné (tvořené touž množinou bodů). Navíc je přijata zásada, že pokud hledaný objekt má v zadání úlohy pojmenované vrcholy, například jde o trojúhelník ABC, pak dvě řešení $\triangle A_1B_1C$ a $\triangle A_2B_2C$ považujeme v případě $A_1 = B_2$ a $A_2 = B_1$ za různá řešení, i když jde o dva splývající trojúhelníky, lišící se pouze označením hledaných vrcholů A a B.

Nepolohová úloha. Úkolem je sestrojit útvar požadovaných vlastností (snad nejčastěji trojúhelník ze tří daných prvků), přitom na jeho umístění v rovině nezáleží (výsledek konstrukce může ležet „kdekoliv“ v nárysně). Konstrukci pak začínáme tak, že některé význačné prvky hledaných objektů libovolně umístíme (například stranu AB zadané délky c hledaného trojúhelníku ABC). Tím původní nepolohovou úlohu převedeme na úlohu polohovou.

Za *stejná řešení* nepolohové úlohy považujeme právě takové vyhovující útvary, které jsou (geometricky) *shodné*, tj. které lze přemístit tak, aby splynuly. Toto pravidlo je však třeba upřesnit: má-li hledaný útvar v zadání úlohy pojmenované vrcholy, považujeme za totéž řešení jen takové dva vyhovující útvary, které lze přemístit tak, aby se kryly nejen jako množiny bodů, ale aby přitom splývaly i všechny jejich dvojice stejně pojmenovaných vrcholů. Uveďme k tomu příklad dvou nepolohových úloh, které musíme z hlediska počtu řešení rozlišit:

1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 5\,\mathrm{cm}$, $v_a = 3\,\mathrm{cm}$ a $t_a = 4\,\mathrm{cm}$.

2. Sestrojte trojúhelník, jehož jedna strana měří 5 cm, k ní příslušná výška 3 cm a příslušná těžnice 4 cm.

Úloha 1 má dvě řešení, úloha 2 pouze jedno řešení. Dvě řešení úlohy 1 se liší pouze výměnou označení vrcholů B a C. V úloze 2 pojmenování vrcholů nehraje roli.

Kritika jednoho popisu. V současné gymnaziální učebnici autorky Pomykalové je pro určování počtu řešení popsáno pravidlo: Počet řešení dané nepolohové úlohy je rovno počtu řešení polohové úlohy, na kterou ji převedeme. Je to míněno dobře, ale není to korektní, protože záleží na tom, jaký převod na polohovou úlohu zvolíme! Uvažme například úlohu na konstrukci $\triangle ABC$ ze tří prvků, mezi nimiž je délka c strany AB. Jak jsme již zmínili výše, tuto úlohu můžeme začít řešit tak, že umístíme úsečku AB délky c a pak řešíme polohovou úlohu na konstrukci třetího vrcholu C. Pokud však tuto polohovou úlohu ještě neupřesníme tím, že navíc zadáme jednu z polorovin s hraniční přímkou AB, ve které budeme vrchol C hledat, bude mít neupřesněná polohová úloha obecně více řešení nežli původní nepolohová úloha. Důvod je zřejmý: je-li jejím řešením $\triangle ABC$, je jiným jejím řešením $\triangle ABC'$, kde C' je bod souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB. Přitom však platí $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$, takže jde o jedno řešení původní nepolohové úlohy.

Při výuce konstrukčních úloh je třeba věnovat pozornost, alespoň po jistou počáteční dobu, všem jejím etapám (fázím). Nejen žáci, ale i posluchači na fakultě často chybují (zejména u polohových úloh) tím, že si nejdříve narýsují zadání a pak bez jasného důvodu přikreslují další přímky a kružnice, až získají vizuální dojem, že hledaný útvar sestrojili.

Etapy řešení konstrukční úlohy

Úplné řešení každé konstrukční úlohy se skládá z těchto etap:

(1) Rozbor
(2) Popis konstrukce
(3) Provedení konstrukce (rýsováním)
(4) Důkaz správnosti (zkouška)
(5) Diskuse

A. Rozbor. Nejdůležitější část řešení, v níž přemýšlíme o způsobu, jak hledaný útvar sestrojit. Představíme si, že úloha je jich vyřešena a známé i neznámé objekty (body, trojúhelníky, kružnice, ...) nakreslíme do jednoho obrázku. Nad ním pak uvažujeme, které význačné body hledaného útvaru (např. střed kružnice) potřebujeme sestrojit a jak toho dosáhnout. K tomu si uvědomujeme, jaké významné vlastnosti útvary z obrázku mají. Zpravidla objevujeme nové důležité čáry (přímky nebo kružnice), na kterých hledané body leží a které dokážeme ze zadaných prvků sestrojit. Tyto čáry můžeme do obrázku přikreslit. Rozbor by však neměl být pouze obrázek: objevené poznatky je nutné zapsat, stejně jako z nich plynoucí závěry, na jakých čárách hledané body leží. Mělo by z nich jasně plynout, jak bude postup konstrukce vypadat. Tuto „výkladovou“ formu Rozboru je nutné prosazovat zejména v situacích, kdy z nedostatku časové dotace na výuku geometrie od většiny dalších, níže popsaných etap řešení upouštíme.

B. Popis konstrukce. Jakmile máme jasno, jak hledaný útvar ze zadání sestrojit, zapíšeme to úplným a jasně uspořádaným popisem jako posloupnost očíslovaných kroků tvořených vždy jednou základní konstrukcí. Například, chceme-li v kroku 2 sestrojit přímku p, která prochází daným bodem A a je rovnoběžná s danou přímkou a, zapíšeme:

2\. přímka p; $p \parallel a$ a $A \in p$

Trochu jinou podobu má krok:

3\. přímka o; o je osa úsečky AB

(konstrukci osy úsečky nerozepisujeme, považujeme ji za základní, podle vyspělosti třídy lze za základní považovat např. konstrukci trojúhelníku ze tří stran.)

Dané výchozí objekty nebo veličiny (délky, velikosti úhlů apod.) se často uvádějí jako nulový krok Popisu:

0. Dán bod A, přímka a a úhel velikosti α

Naopak jako poslední krok často uvádíme vykreslení hledaného objektu. Tak konstrukci $\triangle ABC$ po určení vrcholů A, B, C završíme krokem:

6. $\triangle ABC$

Znamená jen tolik, že trojúhelník ABC vymezíme narýsováním jeho stran.

Dodejme, že Popis musí být zapsán tak, aby podle něj sestrojil výsledný útvar i člověk, který vůbec nezná zadání úlohy (případně počítačový program). Zejména musí platit, že v každém kroku můžeme pracovat jen s objekty, které už jsou podle předchozích kroků určeny.

Při Rozboru a Popisu konstrukce zpravidla ještě neuvažujeme o počtu řešení; určujeme-li v některém kroku nový bod jako průsečík dvou čar (předem daných nebo dříve sestrojených), žádný z těchto průsečíků při provedení konstrukce nesmíme opomenout, všechny jsou *rovnocenné* — jinak hrozí, že nesestrojíme všechna různá řešení dané úlohy (viz Diskuse níže).

Někdy ovšem potřebujeme pracovat s více průsečíky i při konstrukci jednoho řešení. Například pro dříve určené kružnice k, l volíme následný krok

4. Bod X; $X \in k \cap l$,

méně častěji krok

4'. Body X, Y; $\{X, Y\} = k \cap l$.

C. Provedení konstrukce. Podle navrženého postupu řešení pečlivě a co nejpřesněji narýsujeme (tuto část řešení bychom neměli často vynechávat zejména na ZŠ, na SŠ studentům přesné rýsování většinou neukládáme.)

D. Důkaz správnosti. Sebelepší provedení konstrukce ještě nedává „matematickou jistotu“, že např. tři sestrojené přímky procházejí daným bodem, že sestrojené kružnice se navzájem dotýkají apod. Proto z postupu konstrukce teoreticky zdůvodňujeme, že sestrojený útvar má všechny požadované vlastnosti. (Tuto část řešení vypouštíme u většiny úloh na SŠ, na ZŠ prakticky vždy.)

Diskuse. Posuzujeme, zda požadovaný útvar vůbec existuje, v kladném případě, zda jich existuje více či dokonce nekonečně mnoho v závislosti na případných „parametrech“ zadání. I žáci ZŠ by při úlohách bez parametrů měli na základě výsledku svého rýsování zapsat slovně, kolik má úloha řešení.

Abychom správně provedli diskusi, měli bychom volit tento postup: pečlivě procházet jednotlivé kroky z popisu konstrukce a uvažovat o existenci a možném počtu každého nově sestrojovaného objektu (rovnocennost průsečíků čar, viz výše). Již při samotném popisu konstrukce je však nutné uvážit, zda jsme množiny bodů dané vlastnosti popsali úplně, kupř. zda stačí uvažovat pouze jednu z obou rovnoběžek, která má od dané přímky danou vzdálenost.

Pro určování počtu řešení zadané úlohy je zásadní otázka, zda jde o úlohu nepolohovou, nebo jde o úlohu polohovou. O tom, která její řešení podle toho počítáme za různá, jsme pojednali výše.

Konec dokumentu