Netradiční varianty výrokové logiky

Trojhodnotová (Lukasziewiczova) logika

- Pravdivostní hodnoty T,F,N(nevíme)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	N	F	N	T	N
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T
F	N	T	F	N	T
N	T	N	N	T	T
N	F	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N

Mlhavá (fuzzy) logika

- Pravdivostní hodnota výroku je číslo z intervalu <0,1>.
- Výrokové spojky lze zavést anologicky k příslušným množinovým operacím.

  Vždy je: $p(\neg A) = 1 - p(A)$

  - **V standardní fuzzy logice:**
    - $p(A \wedge B) = \min(p(A), p(B))$
    - $p(A \vee B) = \max(p(A), p(B))$
  - **V součinové (pravděpodobnostní) fuzzy logice:**
    - $p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B))$
    - $p(A \vee B) = p(A) + p(B)) - p(A) \cdot p(B)$
  - **V Lukasiewiczově fuzzy logice:**
    - $p(A \wedge B) = \min(1, p(A) + p(B))$
    - $p(A \vee B) = \max(0, p(A) + p(B) – 1)$
- **Ostatní fuzzy logické spojky jsou definovány tak, aby platily příslušné tautologické formule, které je převádějí do Booleovy algebry.**

Příklad

- „Je-li řidič mladý a řídí rychlé auto, je riziko nehody velké“
- M: 19 let ≈ 0,9 25 let ≈ 0,5 40 let ≈ 0,1
- A: Mercedes ≈ 0,9 Oktávia ≈ 0,5 Punto≈ 0,1

M	A	Pravdivostní hodnota předpokladu $(M \wedge A)$		
		Standardní	Součinová	Lukasiewiczova
0,9	0,9	0,9	0,81	1
0.9	0,5	0,5	0,45	1
0,9	0,1	0,1	0,09	1
0,5	0,9	0,5	0,45	1
0,5	0,5	0,5	0,25	1
0,5	0,1	0,1	0,05	0,5
0,1	0,9	0,1	0,09	1
0,1	0,5	0,1	0,05	0,6
0,1	0,1	0,1	0,01	0,2

Intucionistické (konstruktivistické) logiky

- Pravdivé je jenom to, co lze efektivně zkonstruhovat
- Neuznávají platnost odvozovacího pravidla $\neg (\neg (A)) \rightarrow A$

Predikátová logika 1. řádu

Jednoduché úsudky, kde VL nestačí

- Všechny opice mají rády banány
- Judy je opice
- $\Rightarrow$ Judy má ráda banány

Z hlediska VL jsou to ***jednoduché výroky***

p, q, r a z p, q nevyplývá r

- Všichni studenti jsou chytří
- Karel není chytrý
- $\Rightarrow$ Karel není student

Jaké je zde platné úsudkové schéma?

Úsudkové schéma

Schéma připomíná platná schémata VL:

$p \rightarrow q, p \models q$ či $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$

Ale ve VL nemůžeme (roz)analyzovat tyto jednoduché výroky. Zkusme je přeformulovat:

- Každé individuum, je-li Opice, pak má rádo Banány
- Judy je individuum s vlastností být Opice
- $\Rightarrow$ Judy je individuum s vlastností mít rádo Banány
- $\forall x\, [O(x) \rightarrow B(x)], O(J) \models B(J)$, kde x je individuová proměnná, O, B predikátové symboly, J funkční symbol
- Jde opět o schéma: Za O, B, J můžeme dosadit jiné vlastnosti či jiné individuum, např. po řadě člověk, smrtelný, Karel. O, B, J jsou zde pouze ***symboly*** zastupující vlastnosti a individua

Formální jazyk PL1
Abeceda

- Logické symboly
  - individuové proměnné: *x, y, z, ...*
  - Symboly pro spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Symboly pro kvantifikátory: $\forall$, $\exists$
- Speciální symboly
  - Predikátové: P^n, Q^n, ... *n* – arita = počet argumentů
  - Funkční: f^n, g^n, h^n, ... -- " --
- Pomocné symboly: závorky (,), ...

Formální jazyk PL1
Gramatika

- ***termy***:
  i. každý symbol proměnné *x, y, …* je term
  ii. jsou-li $t_1, \ldots, t_n$ ($n \geq 0$) termy a je-li f n-ární funkční symbol, pak výraz $\boldsymbol{f(t_1, \ldots, t_n)}$ je term;
  pro n = 0 se jedná o individuovou konstantu (značíme a, b, c, …)
  iii. jen výrazy dle i. a ii. jsou termy

Formální jazyk PL1
Gramatika

- ***atomické formule***:
  - je-li P n-ární predikátový symbol a jsou-li $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak výraz $\mathbf{P(t_1,\ldots,t_n)}$ je atomická formule
- ***formule***:
  - každá atomická formule je formule
  - je-li výraz A formule, pak $\neg A$ je formule
  - jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ jsou formule
  - je-li x proměnná a A formule, pak výrazy $\forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{A}$ a $\exists \boldsymbol{x}\, \mathbf{A}$ jsou formule

Formální jazyk PL1
1. řád

- Jediné proměnné, které můžeme používat s kvantifikátory, jsou *individuové proměnné*
- Nemůžeme kvantifikovat přes proměnné *vlastností* či *funkcí*
- *Příklad:* Leibnizova definice rovnosti.
  - Mají-li dvě individua všechny vlastnosti stejné, pak je to jedno a totéž individuum
  - $\forall \mathrm{P}\ [\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(y)] \rightarrow (x = y)$

    jazyk 2. řádu, kvantifikujeme přes vlastnosti

Příklad: jazyk aritmetiky

- Má tyto (speciální) funkční symboly:

□ nulární symbol: 0 (konstanta nula) –

- konstanta je nulární funkční symbol

□ unární symbol: s (funkce následník)

□ binární symboly: + a $\times$ (funkce sčítání a násobení)

- Příkladem termů jsou (používáme infixní notaci pro + a $\times$):

□ 0, s(x), s(s(x)), (x + y) $\times$ s(s(0)), atd.

- Formulemi jsou např. výrazy
  (= je zde speciální predikátový symbol):

□ $s(0) = (0 \times x) + s(0)$

Volné, vázané proměnné

- $\forall x\, \exists y\, P(x, y, t) \wedge \neg\exists x\, Q(y, x)$

vázané, volná volná, vázaná

Formule s *čistými proměnnými*: pouze volné výskyty nebo pouze vázané, ale každý kvantifikátor má své proměnné. Např. x ve druhém konjunktu je jiné než v prvním, tak proč jej nazývat stejně?

- $\forall x\, \exists y\, P(x, y, t) \wedge \neg\exists z\, Q(u, z)$

Uzavřené, otevřené formule

- Formuli obsahující jen vázané proměnné nazýváme uzavřená formule (též věta, sentence)
- Formuli obsahující alespoň jednu volnou proměnnou nazýváme otevřená

Sémantika PL1

$P(x) \rightarrow \forall y\, Q(x, y)$

– je tato formule pravdivá?

Nesmyslná otázka, vždyť nevíme, co znamenají symboly P, Q. Jsou to jen symboly, za které můžeme dosadit jakýkoli predikát.

$P(x) \rightarrow P(x)$

– je tato formule pravdivá?

ANO, je, a to vždy, za všech okolností.

Sémantika PL1

$\forall x\, P(x, f(x))$ musíme se dohodnout, jak
$\exists x\, P(x , f(x))$ budeme tyto formule chápat

1) O čem mluví proměnné:
zvolíme universum, jakákoli ***neprázdná*** množina U
2) Co označuje symbol P; je binární, má dva argumenty, tedy musí označovat nějakou
binární relaci **R ⊆ U × U**
3) Co označuje symbol *f* ; je unární, má jeden argument, tedy musí označovat nějakou funkci F ⊆ **U × U, značíme F: U → U**

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ musíme se dohodnout, jak
B: $\exists x\, P(x , f(x))$ budeme tyto formule chápat

1) Nechť U = N (množina přirozených čísel)
2) Nechť P označuje relaci <
(tj. množinu dvojic takových, že první člen je ostře menší než druhý: $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \ldots,\langle 1,2\rangle, \ldots\}$)
3) Nechť *f* označuje funkci druhá mocnina x^2, tedy množinu dvojic, kde druhý člen je druhá množina prvního:
$\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \ldots,\langle 5,25\rangle, \ldots\}$

Nyní můžeme teprve vyhodnotit pravdivostní hodnotu formulí A, B

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$

B: $\exists x\, P(x, f(x))$ Vyhodnocujeme „zevnitř“:

Nejprve vyhodnotíme term $f(x)$. Každý term označuje prvek universa. Který? Záleží na *valuaci e proměnné x.* Nechť $e(x) = 0$, pak $f(x) = x^2 = 0$.

$e(x) = 1$, pak $f(x) = x^2 = 1$,
$e(x) = 2$, pak $f(x) = x^2 = 4$, atd.

Nyní vyhodnocením $P(x, f(x))$ musíme dostat pravdivostní hodnotu: $e(x) = 0$, 0 není < 0 Nepravda
$e(x) = 1$, 1 není < 1 Nepravda, $e(x) = 2$, 2 je < 4 Pravda

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$

B: $\exists x\, P(x, f(x))$

Formule $P(x, f(x))$ je pro některé valuace e proměnné *x v dané interpretaci* Pravdivá, pro jiné nepravdivá

Význam $\forall x$ ($\exists x$): formule musí být pravdivá pro ***všechny (některé)*** valuace *x*

Formule A: Nepravdivá v naší interpretaci I: $|\neq_I A$

Formule B: Pravdivá v naší interpretaci I: $|=_I B$

Interpretace

- Formálně je interpretace dvojice **(U, I)**, kde U je neprázdná množina zvaná **univerzum**, I je zobrazení které:
  - Každé konstantě přiřazuje prvek univerza.
  - Každému n-árnímu funkčnímu symbolu přiřazuje funkci n proměnných na univerzu s hodnotami z univerza.
  - Každému n-árnímu predikátu přiřazuje n-ární relaci na univerzu, tvořenou všemi n-ticemi prvků univerza, pro které je daný predikát pravdivý.

Splnitelnost formulí, model

- Formule A je **splnitelná v interpretaci** I, jestliže existuje aspoň jedno ohodnocení e volných proměnných že vznikne pravdivý výrok.
- Formule A je **pravdivá v interpretaci** I, jestliže pro všechna možná ohodnocení e volných proměnných vznikne pravdivý výrok.
- Formule A je **splnitelná**, jestliže existuje interpretace I, ve které je splnitelná. Takovou interpretaci nazýváme **model** formule A.
- Formule A je **tautologií** je-li pravdivá v každé interpretaci.
- Formule A je **kontradikcí**, jestliže nemá model, tedy neexistuje interpretace I, v která by formule A byla splnitelná.

Sémantická dedukce

- Uzavřená formule (věta) ϕ je sémantickým důsledkem (též tautologickým důsledkem) množiny uzavřených formulí S právě tehdy, když každý model S je také modelem ϕ.
- To však je obvykle obtížné ověřit.

Syntaxe predikátové logiky

Logická spojka	Pravidlo pro zavedení	Pravidlo pro vyloučení
$\neg$	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \rightarrow \neg\varphi$ *princip nepřímého důkazu*	$\varphi \vee \neg\varphi \rightarrow \mathbf{T}$; $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ *princip vyloučení třetího a princip dvojí negace*
$\wedge$	$\{\varphi, \psi\} \rightarrow \{\varphi \wedge \psi, \psi \wedge \varphi\}$ *definice konjunkce*	$\varphi \wedge \psi \rightarrow \{\varphi, \psi\}$ *definice konjunkce*
$\vee$	$\varphi \rightarrow \{\varphi \vee \psi, \psi \vee \varphi\}$ *definice disjunkce*	$\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \alpha\ \alpha, \psi \rightarrow \alpha\} \rightarrow \alpha$ *princip důkazu rozborem případů*
$\Rightarrow$	$\{\varphi \rightarrow \psi\} \rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$ *definice implikace*	$\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \rightarrow \psi$ *pravidlo modus ponens*
Kvalifikátor	**Pravidlo pro zavedení**	**Pravidlo pro vyloučení**
$\forall$	$\varphi(x) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$	$\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$
$\exists$	$\varphi(a) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$	$\{\exists x\, \varphi(x), \varphi(y) \rightarrow \psi\} \rightarrow \psi$

Úplnost predikátové logiky

- Pro predikátovou logiku 1. řádu platí rovněž **věta o úplnosti.**
- Přirozená dedukce je **bezrozporná** (vše co se dá logicky odvodit je i sémantickým důsledkem).
- Přirozená dedukce je **úplná.** Vše co je sémantickým důsledkem lze odvodit i logicky.
- Důkaz tohoto tvrzení však není snadný.
- Pro predikátové logiky vyšších řádů již nelze vytvořit úplný a bezesporný syntaktický odvozovací systém.

REZOLUCE V PREDIKÁTOVÉ LOGICE

Rozdíl v sémantickém odvozování mezi výrokovou a predikátovou logikou

- Každý **jazyk predikátové logiky má nekonečně mnoho možných interpretací (už jenom universum lze stanovit nekonečně mnoha způsoby). Tím se liší od jazyka výrokové logiky, který má vždy jen konečný počet interpretací – ohodnocení TRUE – FALSE výrokových proměnných (jazyk výrokové logiky pracující s n výrokovými symboly má různých 2^n interpretací, je tedy možné, i když časově náročné, ověřit pravdivost všech interpretací).**
- **Syntaktický přístup je u predikátové logiky jediný možný**

Rezoluční princip v predikátové logice

- Chceme-li zjistit zda klauzule ϕ je důsledkem (logickým a tedy i sémantickým) množiny klauzulí S, vytvoříme množinu S' = S ∪ {¬ϕ} a zjistíme, zda je splnitelná, či nikoliv. Je-li S' splnitelná ϕ není důsledkem S. Je-li nesplnitelná, je ϕ důsledkem S.
- Formule množiny S i formuli ¬ϕ převedeme na množinu klausulí

Skolemizace

- Podle norského matematika Thorlafa Skolema (1887-1963)
- Nahradíme formuli
  - $\exists x\, P(x)$ formulí $P(a)$, kde a je konstanta.
- $\forall x1, \dots, \forall xn\ \exists y\ \phi(y, x1, \dots, xn)$ nahradíme formulí
  - $\forall x1, \dots, \forall xn\ \phi(f(x1, \dots, xn), x1, \dots, xn)$, kde f je nový funkční symbol arity n.
  - Je-li $n = 0$ užijeme konstantní symbol.

Převod na množinu klauzulí

- Přejmenují se proměnné tak, aby každý kvantifikátor označoval různou proměnnou.
  - $\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x, a)$ změníme $\forall x\ \forall y\ P(x) \lor Q(x, a)$.
- Spojky $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ vyjádříme pouze pomocí $\neg$, $\lor$, $\land$
  - $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta$; $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \neg\beta)$; … .
- Zařadíme negace $\neg$ dovnitř až před atomické formule pomocí tautologických ekvivalencí
  - $\neg\exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg\alpha$; $\neg\forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg\alpha$; $\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$; $\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$; $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$.
- Zařadíme disjunkce $\lor$ co nejhlouběji užitím tautolických ekvivalencí
  - $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$;
  - $\alpha \lor (\forall x\ \beta) \equiv \forall x\ (\alpha \lor \beta)$; $\alpha \lor (\exists x\ \beta) \equiv \exists x\ (\alpha \lor \beta)$.
- Přemístíme univerzální kvantifikátory užitím tautologické ekvivalence $(\forall x\ \alpha) \land (\forall x\ \beta) \equiv \forall x\ (\alpha \land \beta)$.

Rezoluční princip v predikátové logice

- Pro množinu klauzulí hledám dvojice klauzulí s komplementárním párem literálů.
- V případě potřeby mohu provézt substituci:
  - Rezolventa klausulí $\{P(x, y, z), \neg Q(x, y)\}$ a $\{\neg P(a, b, z), \neg R(a)\}$ získaná substitucí x/a, y/b je $\{\neg Q(a, b), \neg R(a)\}$.

Rezoluční princip v predikátové logice

- Podaří-li se odvodit prázdnou klauzuli, byla množina formulí $S \cup \{\neg\phi\}$ nesplnitelná a ϕ je syntaktickým (i sémantickým) důsledkem S.
- Pokud se výpočet rezolvent zastaví a prázdná klauzule nebyla odvozena, je množina formulí $S \cup \{\neg\phi\}$ splnitelná a ϕ není syntaktickým (ani sémantickým) důsledkem S.
- Pokud se výpočet nezastaví, nevím nic.

Příklad

- Každý holič na ostrově holí kohokoliv, kdo se neholí sám.
- Žádný holič na ostrově neholí kohokoliv, kdo se holí sám.
- Důsledek: Na ostrově nejsou žádní holiči.

Příklad

- Univerzum: Všichni lidé na ostrově.
- B(x) – unární predikát: „člověk je holič“.
- S(x, y) – binární predikát “osoba x holí osobu y”.
- Předpoklady:
  - $\forall x\ (B(x) \Rightarrow \forall y\ (\neg S(y, y) \Rightarrow S(x, y)))$
  - $\forall x\ (B(x) \Rightarrow \forall y\ (S(y, y) \Rightarrow \neg S(x, y)))$
- Důsledek: $\neg\exists x\ B(x)$.

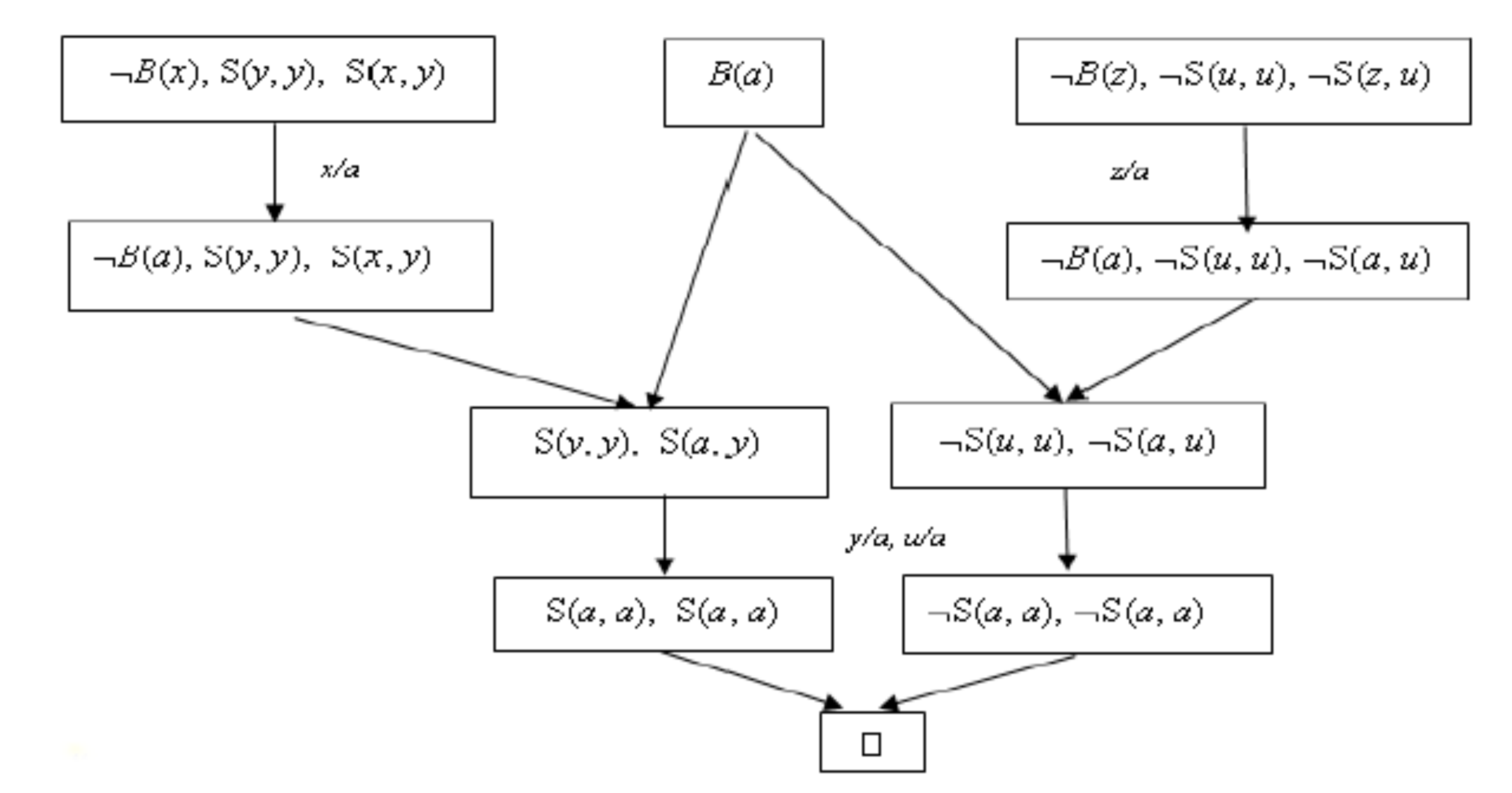
Příklad

- Potřebuji zjistit, zda je nesplnitelná množina fomulí
  - $\{\forall x\, (B(x) \Rightarrow \forall y\, (\neg S(y, y) \Rightarrow S(x, y)),$
  - $\forall x\, (B(x) \Rightarrow \forall y\, (S(y, y) \Rightarrow \neg S(x, y)),$
  - $\exists x\, B(x)\}.$

Příklad

- Převedení prvního předpokladu na klauzule:
  - $\forall x\, (B(x) \Rightarrow \forall y\, (\neg S(y, y) \Rightarrow S(x, y)) \equiv \forall x\, (\neg B(x) \vee \forall y\, ((S(y, y) \vee S(x, y))) \equiv \forall x \forall y (\neg B(x) \vee S(y, y) \vee S(x, y))$;
- Převedení druhého předpokladu na klauzule
  - $\forall x\, (B(x) \Rightarrow \forall y\, (S(y, y) \Rightarrow \neg S(x, y)) \equiv \forall z\, (\neg B(z) \Rightarrow \forall u\, (\neg S(u, u) \vee \neg S(z, u)) \equiv \forall z \forall u\, (\neg B(z) \vee \neg S(u, u) \vee \neg S(z, u))$.
- Skolemizace důsledku
  - $B(a)$
- Potřebuji ověřit nesplnitelnost množiny klauzulí
  - $\mathbf{S} \cup \{\neg\phi\} = \{\{\neg B(x), S(y, y), S(x, y)\}, \{\neg B(z), \neg S(u, u), \neg S(z, u\}, (B(a)\}\}$

Příklad



Náš úsudek je správný

a) $$\frac{\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \qquad \exists x\,\neg P(x)}{\exists x\, Q(x)}$$

b) $$\frac{\exists x\,\forall y\, P(x,y) \qquad \forall x\,\forall y\,(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))}{\exists x\,\forall y\, Q(x,y)}$$

c) $$\frac{(\exists x\, P(x)) \Rightarrow Q(a)}{\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(a))}$$

Výsledek: a) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(y)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

b) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{P(a, y), \neg P(x, z) \vee Q(x, z), \neg Q(t, f(t))\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

c) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\neg P(x) \vee Q(a), P(b), \neg Q(a)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^2(S)$.

3.3.5 Příklad. Rezoluční metodou ověřte správnost úsudku:

$$\begin{array}{l} P(b) \Rightarrow V(a) \\ (\forall x\, V(x)) \vee (\forall x\, \neg V(x)) \\ P(b) \\ \hline \forall x\, V(x) \end{array}$$

kde P je unární predikátový symbol, V je unární predikátový symbol a a, b jsou konstantní symboly.

Výsledek: a) Úsudek je správný: Množina klausulí $S = \{\neg P(b) \vee V(a), V(x) \vee \vee \neg V(y), P(b), \neg V(b)\}$ je nesplnitelná, neboť $F \in R^3(S)$.