MUNI

# Síla symbolů: Algebra a řešení rovnic

CORE004 Matematika jako součást kultury

**Zdeněk Pospíšil**
**707@mail.muni.cz**

Masarykova univerzita

23. září 2021

# Obsah

# Původ matematiky kalkulací

# Původ matematiky kalkulací

**Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al Chvárizmí al Mádžúsí**

Pracoval v بيت الحكمة (dům vědy/moudrosti, knihovna/universita) za chalífa al Ma'múna (813–833).

# Původ matematiky kalkulací

**Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al Chvárizmí al Mádžúsí**

Pracoval v بيت الحكمة (dům vědy/moudrosti, knihovna/universita) za chalífa al Ma'múna (813–833).

- Věda o redukci a vzájemném rušení (*al džebr va l mukábala*) – Algebraický traktát

# Původ matematiky kalkulací

**Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al Chvárizmí al Mádžúsí**

Pracoval v بيت الحكمة (dům vědy/moudrosti, knihovna/universita) za chalífa al Ma'múna (813–833).

- Věda o redukci a vzájemném rušení (*al džebr va l mukábala*) – Algebraický traktát
- Kniha o indickém počítání – Aritmetický traktát

# Pravidla kalkulací

- 
- 
- 
- 

# Pravidla kalkulací

- Označení hledané veličiny شيء
- 
- 
- 

# Pravidla kalkulací

- Označení hledané veličiny شيء
- Tři druhy čísel:
  - kvadrát (mal)
  - kořen (džízr)
  - dané určité číslo (dirhem)
-
-

# Pravidla kalkulací

- Označení hledané veličiny شيء
- Tři druhy čísel
- Správné rovnosti:
  1. $(\tau+\sigma)+\varrho=\tau+(\sigma+\varrho),\ (\tau\sigma)\varrho=\tau(\sigma\varrho)$
  2. $\tau+\sigma=\sigma+\tau,\ \tau\sigma=\sigma\tau$
  3. $\tau(\sigma+\varrho)=\tau\sigma+\tau\varrho$
  4. $1\tau=\tau$
  5. $\tau\frac{1}{\tau}=1$
  6. $\tau=\tau$
  7. $\sqrt(\tau)\sqrt(\tau)=\tau$
  8. $\sqrt(\sigma\tau)=\sqrt{\sigma}\sqrt{\tau}$
-

# Pravidla kalkulací

- Označení hledané veličiny شيء
- Tři druhy čísel
- Správné rovnosti
- Odvozovací pravidla:
  1. Symetrie rovnosti: $\tau = \sigma \;\rightarrow\; \sigma = \tau$
  2. Transitivita rovnosti: $\tau = \sigma, \sigma = \varrho \;\rightarrow\; \tau = \varrho$
  3. Pravidlo substituce: Nechť $\pi$ je výraz, který vznikne z výrazu $\sigma$ nahrazením podvýrazu $\sigma$ výrazu $\tau$ výrazem $\varrho$. Potom $\sigma = \varrho \;\rightarrow\; \tau = \pi$
  4. Pravidla al džebr: $\sigma = \varrho, \tau = \pi \;\rightarrow\; \sigma + \tau = \varrho + \pi$
     $\sigma = \varrho, \sigma + \tau = \varrho + \pi \;\rightarrow\; \tau = \pi$
  5. Pravidla al mukábala: $\sigma = \varrho, \tau = \pi \;\rightarrow\; \sigma\tau = \varrho\pi$
     $\sigma = \varrho, \sigma\tau = \varrho\pi \;\rightarrow\; \tau = \pi$
  6. Jednoznačnost odmocniny: $\sigma^2 = \tau \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{\tau}$

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q$
- $x^2 = px$
- $x^2 = px + q$
- $x^2 + px = q$
- $x^2 + q = px$

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{q}$
- $x^2 = px$
- $x^2 = px + q$
- $x^2 + px = q$
- $x^2 + q = px$

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q \quad \to \quad x = \sqrt{q}$
- $x^2 = px \quad \to \quad x = p$
- $x^2 = px + q$
- $x^2 + px = q$
- $x^2 + q = px$

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q \quad \to \quad x = \sqrt{q}$
- $x^2 = px \quad \to \quad x = p$
- $x^2 = px + q \quad \to \quad x = \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 + q} + \frac{1}{2}p$
- $x^2 + px = q$
- $x^2 + q = px$

# Klasifikace a řešení rovnic

**Syntax:** pravidla pro kalkulování se znaky, jejich skladba, provádění jednotlivých kroků a podobně.
**Sémantika:** co ve zkoumaném předmětu jednotlivé znaky označují, co o něm vypovídá skladba znaků a podobně.

*Je vhodné udržovat syntax a sémantiku v souladu.*

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{q}$
- $x^2 = px \quad \rightarrow \quad x = p$
- $x^2 = px + q \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q} + \frac{1}{2}p$
- $x^2 + px = q \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q} - \frac{1}{2}p$
- $x^2 + q = px$

# Klasifikace a řešení rovnic

- $x^2 = q \quad \to \quad x = \sqrt{q}$
- $x^2 = px \quad \to \quad x = p$
- $x^2 = px + q \quad \to \quad x = \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 + q} + \frac{1}{2}p$
- $x^2 + px = q \quad \to \quad x = \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 + q} - \frac{1}{2}p$
- $x^2 + q = px$

  $\to \quad x_1 = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q},\ x_2 = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q}$

  pokud $p^2 > 4q$

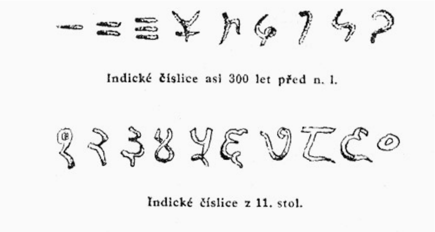
# Indické číslice

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.



Indické číslice asi 300 let před n. l.

Indické číslice z 11. stol.

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.

Indické číslice asi 300 let před n. l.

Indické číslice z 11. stol.

Výpočty prováděné na desce s pískem:

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.

Indické číslice asi 300 let před n. l.

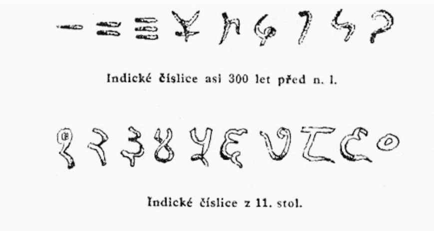
Indické číslice z 11. stol.

Výpočty prováděné na desce s pískem:

887
352

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.



Indické číslice asi 300 let před n. l.

Indické číslice z 11. stol.

Výpočty prováděné na desce s pískem: 887
1152

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.

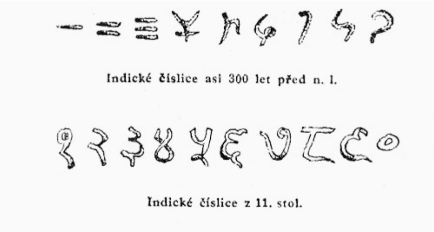
Indické číslice asi 300 let před n. l.

Indické číslice z 11. stol.

Výpočty prováděné na desce s pískem: 887<br>1232

# Indické číslice

Seve Sébóchot (622): Nebudu se zabývat vědou Indů, národa různého od Syřanů, jejich pozoruhodnými objevy astronomickými, hlubšími než jsou objevy Řeků a Babylóňanů, jejich systémem počítání, pro nějž nenacházím slov. Pouze upozorňuji, že výpočty jsou prováděny pomocí devíti znaků. Kdyby se o tom dověděli ti, kteří myslí, že toliko jazykem řeckým lze dosáhnout hranic vědy, tak by se přesvědčili, že jsou i jiné znalosti.



Indické číslice asi 300 let před n. l.

Indické číslice z 11. stol.

Výpočty prováděné na desce s pískem:

$$\begin{array}{r} 887 \\ 1239 \end{array}$$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Co je to $\sqrt{p^2 - 4q}$ pro $p^2 < 4q$?

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Co je to $\sqrt{p^2-4q}$ pro $p^2<4q$?

$$\sqrt{p^2-4q}=\sqrt{|p^2-4q|(-1)}=\sqrt{|p^2-4q|}\sqrt{(-1)}=\sqrt{4q-p^2}\sqrt{(-1)}$$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Co je to $\sqrt{p^2 - 4q}$ pro $p^2 < 4q$?

$$\sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{|p^2 - 4q|(-1)} = \sqrt{|p^2 - 4q|}\sqrt{(-1)} = \sqrt{4q - p^2}\sqrt{(-1)}$$

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

Komplexní čísla $\mathbb{C}$: 
$$\begin{aligned} &z = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R} \\ &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ &(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

Komplexní čísla $\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned} z &= (a, b),\ a, b \in \mathbb{R} \\ (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b)(c,d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$, $(a, -b)$, $\quad z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových" čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

Komplexní čísla $\mathbb{C}$: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - \overline{b}d, a\overline{d} + bc)$$

Komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$, $(a, -b)$, $\quad z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových" čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

Komplexní čísla $\mathbb{C}$: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{b}d, a\bar{d} + bc)$$

Komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$, $(a, -b)$, $\quad z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

Kvaterniony $\mathbb{K}$: $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{C}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{b}d, a\bar{d} + bc)$$
$$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$$

sdružený kvaternion: $\bar{q} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}$

# Rozšiřování číselných oborů

## Zavádění „nových“ čísel

Komplexní čísla: $z = a + b\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Grafické znázornění čísel

Komplexní čísla $\mathbb{C}$: $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{b}d, a\bar{d} + bc)$$

Komplexně sdružené číslo: $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$, $(a, -b)$, $\quad z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

Kvaterniony $\mathbb{K}$: $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{C}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{b}d, a\bar{d} + bc)$$
$$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$$

sdružený kvaternion: $\bar{q} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}$

Oktoniony $\mathbb{O}$: $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{K}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{b}d, a\bar{d} + bc)$$

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Diofantos z Alexandrie: rovnice je ekvivalence formálních výrazů.
Řešil konkrétní problémy, zavedl symbol pro neznámou.

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Diofantos z Alexandrie: rovnice je ekvivalence formálních výrazů.
Řešil konkrétní problémy, zavedl symbol pro neznámou.

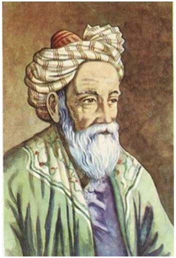
---

al-Chvárizmí

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Diofantos z Alexandrie: rovnice je ekvivalence formálních výrazů.
Řešil konkrétní problémy, zavedl symbol pro neznámou.

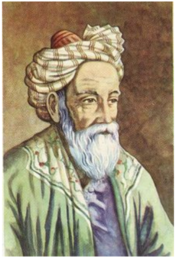
---



Abú al-Fath Umar ibn Ibrahím al-Nisapuri al-Chajjám (1048–1131): Řešení kubických rovnic hledal jako průsečík dvou kuželoseček.

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Abú al-Fath Umar ibn Ibrahím al-Nisapuri al-Chajjám (1048–1131): Řešení kubických rovnic hledal jako průsečík dvou kuželoseček.



---

Gerolamo Cardano (1501–1576) *Ars magna*
Niccolò Fontano Tartaglia (1500-1557) *Quesiti et Inventioni diverse*: řešení kubických a kvartických rovnic.


# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Gerolamo Cardano (1501–1576) *Ars magna*

Niccolò Fontano Tartaglia (1500-1557) *Quesiti et Inventioni diverse*: řešení kubických a kvartických rovnic.


---

François Viète (1540–1603): koeficienty polynomů jsou symetrickými funkcemi jeho kořenů.

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

François Viète (1540–1603): koeficienty polynomů jsou symetrickými funkcemi jeho kořenů.

---

Rafael Bombelli (1526–1572)
John Wallis (1616–1703): geometrická interpretace odmocniny ze záporného čísla.

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Rafael Bombelli (1526–1572)

John Wallis (1616–1703): geometrická interpretace odmocniny ze záporného čísla.


---

Carl Friedrich Gauß(1777-1855): důkaz základní věty algebry.

*„…přes veškeré úsilí skvělých geometrů je velmi malá naděje, že lze kdykoliv přijmout obecné řešení algebraických rovnic, takže bude více pravděpodobné, že nebude možné najít, nebo bude kontradiktorické.“*

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Carl Friedrich Gauß(1777-1855): důkaz základní věty algebry.

*„…přes veškeré úsilí skvělých geometrů je velmi malá naděje, že lze kdykoliv přijmout obecné řešení algebraických rovnic, takže bude více pravděpodobné, že nebude možné najít, nebo bude kontradiktorické.“*

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Carl Friedrich Gauß(1777-1855): důkaz základní věty algebry.
*„…přes veškeré úsilí skvělých geometrů je velmi malá naděje, že lze kdykoliv přijmout obecné řešení algebraických rovnic, takže bude více pravděpodobné, že nebude možné najít, nebo bude kontradiktorické.“*

---

Niels Henrik Abel (1802–1829): *Mémoire sur les équationes algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution générale du cinquième dégré.*

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Niels Henrik Abel (1802–1829): *Mémoire sur les équationes algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution générale du cinquième dégré.*

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Niels Henrik Abel (1802–1829): *Mémoire sur les équationes algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution générale du cinquième dégré.*

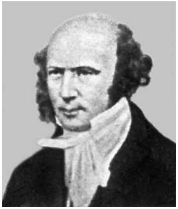
---

Évariste Galois (1811–1832): jiný pohled na nemožnost řešení rovnic pátého stupně.

# Rovnice od Diofanta k Abelovi

Évariste Galois (1811–1832): jiný pohled na nemožnost řešení rovnic pátého stupně.

---



William Rowan Hamilton (1805–1865): rekonstrukce a doplnění Abelova důkazu.
Zavedl kvaterniony.

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

*Liber abaci:* Zprostředkování antického a arabského vědění

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

*Liber abaci:* Zprostředkování antického a arabského vědění

- **Úloha o králících:** Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

*Liber abaci:* Zprostředkování antického a arabského vědění

- **Úloha o králících:** Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

$$n(t) = n(t-1) + n(t-2), \quad n(1) = 1, n(2) = 2$$

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

*Liber abaci:* Zprostředkování antického a arabského vědění

- **Úloha o králících:**
- **Úloha o vážení:** Máme sadu závaží, jejichž váhy jsou 1, 3, 9, 27, 81, ..., přičemž od každé takové váhy je v této sadě jen jediné závaží. Naším úkolem je nalézt k libovolné váze nalézt počty závaží, které jsouce umístěny na rovnoramenné váhy, vyjádří tuto váhu.

# Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)

*Liber abaci:* Zprostředkování antického a arabského vědění

- **Úloha o králících:**
- **Úloha o vážení:** Máme sadu závaží, jejichž váhy jsou 1, 3, 9, 27, 81, ..., přičemž od každé takové váhy je v této sadě jen jediné závaží. Naším úkolem je nalézt k libovolné váze nalézt počty závaží, které jsouce umístěny na rovnoramenné váhy, vyjádří tuto váhu.

| váha | levá miska | pravá miska | váha | levá miska | pravá miska |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 6 | 9 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 7 | $9+1$ | 3 |
| 3 | 3 | 0 | 8 | 9 | 1 |
| 4 | $3+1$ | 0 | 9 | 9 | 0 |
| 5 | 9 | $3+1$ | 10 | $9+1$ | 0 |

MASARYKOVA UNIVERZITA