Ztráta jistoty: matematická logika, neúplnost

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

9. prosince 2021

Obsah

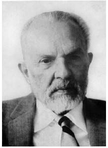
Obrat k jazyku

Obrat k jazyku

Co je to X?

Obrat k jazyku

Co je to X?

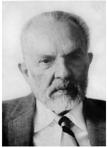


Co označuje ‚X'?

Rudolf Carnap, 1891–1970

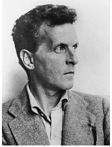
Obrat k jazyku

Co je to X?



Rudolf Carnap, 1891–1970

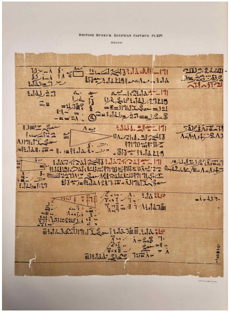
Co označuje ‚X'?



Ludwig Wittgenstein, 1889–1951

V jakých souvislostech používáme ‚X'?

Rhindův papyrus



18st BCE

kopie staršího originálu

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

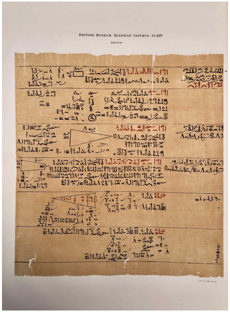
Počítej s $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$.

Počítej s $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.



18st BCE

kopie staršího originálu

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$.

Počítej s $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$.

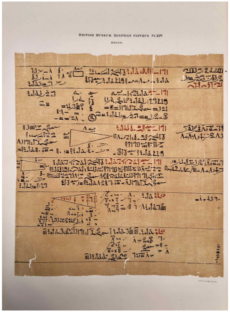
Počítej s $79\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\,\frac{1}{27}\,\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).



18st BCE

kopie staršího originálu

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$.

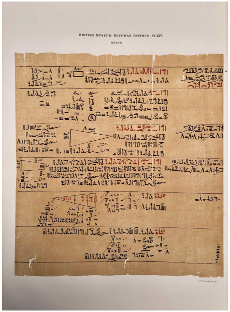
Počítej s $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$.

Počítej s $79\frac{1}{108}\,\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\,\frac{1}{27}\,\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.



18st BCE

kopie staršího originálu

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).
Týká se jediného případu.

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

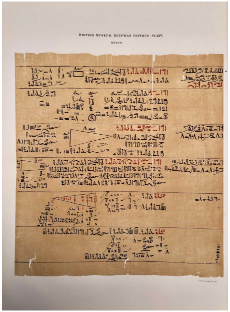
Počítej s $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$.

Počítej s $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.



18st BCE

kopie staršího originálu

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).
Týká se jediného případu.
Není uvedena ani náznak metody.

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

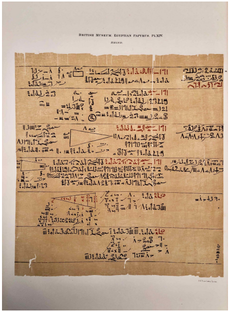
Počítej s $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$.

Počítej s $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.



18st BCE

kopie staršího originálu

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).
Týká se jediného případu.
Není uvedena ani náznak metody.
Úloha není integrována do žádného systému.

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

Počítej s $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$.

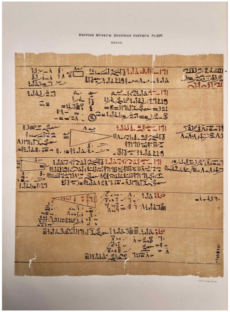
Počítej s $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).
Týká se jediného případu.
Není uvedena ani náznak metody.
Úloha není integrována do žádného systému.
Nic se nevysvětluje (proč to funguje).



18st BCE

kopie staršího originálu

Rhindův papyrus

Kruhová sýpka (o rozměrech) 10, 10.

Odečti $\frac{1}{9}$ z 10, je to $1\frac{1}{9}$ a zbytek je $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

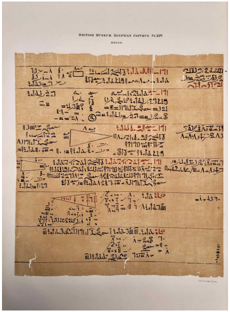
Počítej s $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ $8\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ krát. Vyjde $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$.

Počítej s $79\frac{1}{108}\frac{1}{324}$ 10 krát. Vyjde $790\frac{1}{18}\frac{1}{27}\frac{1}{324}$.

Přidej k tomu $\frac{1}{2}$ z toho. Vyjde 1 185.

Počítej s 1 185 20 krát, je to $59\frac{1}{4}$.

To je co se do ní vejde v stovkách čtyřnásobných měřic.



18st BCE

kopie staršího originálu

Chybí jakékoliv zdůvodnění (že to funguje).
Týká se jediného případu.
Není uvedena ani náznak metody.
Úloha není integrována do žádného systému.
Nic se nevysvětluje (proč to funguje).
Nepřesahuje nic fakticky daného.

Jazyky matematiky

aritmetika

syntetická geometrie

algebra

analytická geometrie

matematická analýza

Jazyky matematiky

aritmetika	
	syntetická geometrie
algebra	
	analytická geometrie
matematická analýza	
	predikátová logika
teorie množin	

Potenciality jazyků

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat
- *Expresívní síla* – co (nového) lze vyjádřit

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat
- *Expresívní síla* – co (nového) lze vyjádřit
- *Metodická síla* – jaké metody lze zavést (místo spleti nesouvisejících triků)

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat
- *Expresívní síla* – co (nového) lze vyjádřit
- *Metodická síla* – jaké metody lze zavést (místo spleti nesouvisejících triků)
- *Integrativní síla* – jak je možné vidět jednotu tam, kde se ukazovaly jen jednotlivé případy

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat
- *Expresívní síla* – co (nového) lze vyjádřit
- *Metodická síla* – jaké metody lze zavést (místo spleti nesouvisejících triků)
- *Integrativní síla* – jak je možné vidět jednotu tam, kde se ukazovaly jen jednotlivé případy
- *Explanatorická síla* – jak lze vysvětlit selhání předchozího jazyka

Potenciality jazyků

- *Logická síla* – co lze dokázat
- *Expresívní síla* – co (nového) lze vyjádřit
- *Metodická síla* – jaké metody lze zavést (místo spleti nesouvisejících triků)
- *Integrativní síla* – jak je možné vidět jednotu tam, kde se ukazovaly jen jednotlivé případy
- *Explanatorická síla* – jak lze vysvětlit selhání předchozího jazyka
- *Konstitutivní síla* – jak lze konstituovat nové objekty, jak jazyk umožňuje překročit meze skutečnosti dané v rámci předchozího jazyka

Potenciality jazyků

Logická síla

Vyjadřování obecnosti

Jazyk syntetické geometrie: neurčitá délka úsečky

Jazyk algebry: symbol pro proměnnou

Jazyk analytické geometrie: rozvinutí veličiny do tvaru číselné osy

Jazyk matematické analýzy: zavedení proměnných veličin

Potenciality jazyků

Expresivní síla

Generování komplexnosti

Jazyk syntetické geometrie: Eukleidovy postuláty

Jazyk algebry: vytváření vyšších mocnin

Jazyk analytické geometrie: reinterpretace násobení

Jazyk matematické analýzy: zavedení nekonečných řad

Potenciality jazyků

Metodická síla

Zavádění parametrů

Jazyk syntetické geometrie: označování bodů a přímek písmeny v obrázcích

Jazyk algebry: zavedení symbolů pro parametry

Jazyk analytické geometrie: odlišení závisle a nezávisle proměnné

Jazyk matematické analýzy: zavedení funkcionálních parametrů

Potenciality jazyků

Integrativní síla

Nacházení jednoty, spojení termů do forem

Jazyk syntetické geometrie: (jednota Eukleidových základů)

Jazyk algebry: zavedení polynomických forem

Jazyk analytické geometrie: vyjádření křivek pomocí polynomických forem

Jazyk matematické analýzy: sjednocení polynomů, exponenciálních a goniometrických funkcí pomocí nekonečných řad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Jazyk algebry: lze vytvořit predikát „kořen ireducibilního polynomu třetího stupně“

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Jazyk algebry: lze vytvořit predikát „kořen ireducibilního polynomu třetího stupně“
někeré rovnice nemají řešení

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Jazyk algebry: lze vytvořit predikát „kořen ireducibilního polynomu třetího stupně“
některé rovnice nemají řešení

Jazyk analytické geometrie: křivky v rovině se nemusí protínat

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Jazyk algebry: lze vytvořit predikát „kořen ireducibilního polynomu třetího stupně“
některé rovnice nemají řešení

Jazyk analytické geometrie: křivky v rovině se nemusí protínat
nemožnost kvadratury kruhu

Potenciality jazyků

Explanatorická síla

Vytváření formálních predikátů; vysvětlení selhání předchozího jazyka

Jazyk syntetické geometrie: nemožnost trisekce úhlu

Jazyk algebry: lze vytvořit predikát „kořen ireducibilního polynomu třetího stupně“
některé rovnice nemají řešení

Jazyk analytické geometrie: křivky v rovině se nemusí protínat
nemožnost kvadratury kruhu

Jazyk matematické analýzy: platí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^0 = 0$ a Lindenmannova věta[1]

---

[1] Pokud $A_1, A_2, \ldots, a_n$ jsou nenulová a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou různá algebraická čísla, pak $A_1\mathrm{e}^{\alpha_1} + A_2\mathrm{e}^{\alpha_2} + \cdots + A_n\mathrm{e}^{\alpha_n} \neq 0$.

Potenciality jazyků

Konstitutivní síla

Definování nových objektů pomocí určitých deskripcí

Potenciality jazyků

Konstitutivní síla

Definování nových objektů pomocí určitých deskripcí

Jazyk syntetické geometrie:

Jazyk algebry: záporná čísla, odmocniny, komplexní čísla, …

Potenciality jazyků

Konstitutivní síla

Definování nových objektů pomocí určitých deskripcí

Jazyk syntetické geometrie:

Jazyk algebry: záporná čísla, odmocniny, komplexní čísla, …

Jazyk analytické geometrie: transcendentní křivky, logaritmus jako číslo vyjadřující obsah pod hyperbolou $xy = 1$ mezi body 1 a x, …

Potenciality jazyků

Konstitutivní síla

Definování nových objektů pomocí určitých deskripcí

Jazyk syntetické geometrie:

Jazyk algebry: záporná čísla, odmocniny, komplexní čísla, …

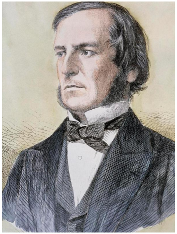
Jazyk analytické geometrie: transcendentní křivky, logaritmus jako číslo vyjadřující obsah pod hyperbolou $xy = 1$ mezi body 1 a x, …

Jazyk matematické analýzy: funkce jako integrál horní meze, řešení diferenciální rovnice, …

George Boole

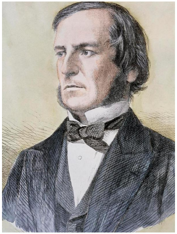
Zákony myšlení

The Laws of Thought, 1854



1815–1864

George Boole
Zákony myšlení



1815–1864

The Laws of Thought, 1854

Booleova algebra:

$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$	komutativita
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	asociativita
$x \vee 0 = x$	$x \wedge 1 = x$	neutrální prvek
$x \wedge x' = 0$	$x \vee x' = 1$	komplementární prvek
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	distributivita
$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$	absorpce
$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$	idempotence
$x \vee 1 = 1$	$x \wedge 0 = 0$	agresivita
$(x \vee y)' = x' \wedge y'$	$(x \wedge y)' = x' \vee y'$	De Morganovy zákony

Gottlob Frege

Formální logika

1848–1925

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

1848–1925

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

1848–1925

Logika **není** věda o správném myšlení. Ale o vyplývání a jeho převádění na řetězce elementárních odvození (inferencí).

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

1848–1925

Logika **není** věda o správném myšlení. Ale o vyplývání a jeho převádění na řetězce elementárních odvození (inferencí).

Druhý zakladatel logiky.

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

Die Grundlagen der Arithmetik, 1884

1848–1925

Logika **není** věda o správném myšlení. Ale o vyplývání a jeho převádění na řetězce elementárních odvození (inferencí).

Druhý zakladatel logiky.

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

Die Grundlagen der Arithmetik, 1884

Über Sinn und Bedeutung, 1892

1848–1925

Logika **není** věda o správném myšlení. Ale o vyplývání a jeho převádění na řetězce elementárních odvození (inferencí).

Druhý zakladatel logiky.

Gottlob Frege

Formální logika

Begriffsschrift, 1879

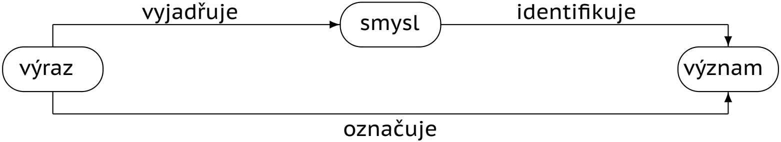
Die Grundlagen der Arithmetik, 1884

Über Sinn und Bedeutung, 1892

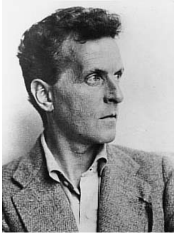
1848–1925

Logika **není** věda o správném myšlení. Ale o vyplývání a jeho převádění na řetězce elementárních odvození (inferencí).

Druhý zakladatel logiky.



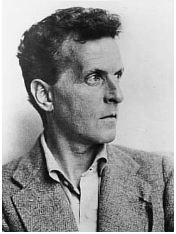
Ludwig Wittgenstein



1889–1951

Ludwig Wittgenstein

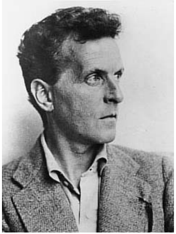
Logisch-Philosophische Abhandlung, 1921
Tractatus Logico-Philosophicus, 1922



1889–1951

Ludwig Wittgenstein

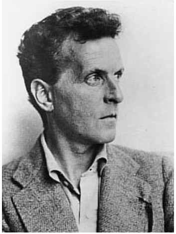
Logisch-Philosophische Abhandlung, 1921
Tractatus Logico-Philosophicus, 1922



1889–1951

Svět je vše, co je zkrátka tak.

Ludwig Wittgenstein



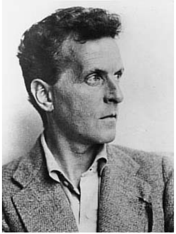
1889–1951

Logisch-Philosophische Abhandlung, 1921
Tractatus Logico-Philosophicus, 1922

Svět je vše, co je zkrátka tak.

Logika není nauka, nýbrž zrcadlový obraz světa.
Matematika je metoda logiky.

Ludwig Wittgenstein



1889–1951

Logisch-Philosophische Abhandlung, 1921
Tractatus Logico-Philosophicus, 1922

Svět je vše, co je zkrátka tak.

Logika není nauka, nýbrž zrcadlový obraz světa.
Matematika je metoda logiky.

O čem lze mluvit, o tom lze mluvit jasně.

O čem nelze mluvit, o tom se musí mlčet.

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

Matematika je logika:

The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself.

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

Matematika je logika:

The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself.
Paradox:

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

Matematika je logika:

The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself.

Paradox:

$$M := \{A : A \notin A\}$$

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Matematika je logika:

The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself.

Paradox:

$$M := \{A : A \notin A\}$$

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$$

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

A.N. Whitehead, 1889–1951

B. Russell, 1872–1970

Matematika je logika:

The fact that all Mathematics is Symbolic Logic is one of the greatest discoveries of our age; and when this fact has been established, the remainder of the principles of mathematics consists in the analysis of Symbolic Logic itself.

Paradox:

$$M := \{A : A \notin A\}$$

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$$

„Tato věta není pravdivá.“

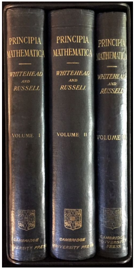
Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

B. Russell: Principles of mathematics, Cambridge, 1903

A.N. Whitehead, B. Russell:*Principia Mathematica,* I 1910, II 1912, III 1913

A.N. Whitehead, 1889–1951



$$M := \{A : A \notin A\}$$

$$M \in M \quad \Leftrightarrow \quad M \notin M$$

B. Russell, 1872–1970

Alfred N. Whitehead, Bertrand A.W. Russel

Logistika

SECTION A] THE CARDINAL NUMBER 1 351

$*52{\cdot}601.\ \vdash :: \alpha \in 1 . \supset :. \phi(\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . \phi x$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}15 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : E!\,\breve{\iota}`\alpha :$ (1)

$[*30{\cdot}4] \quad \supset : x\,\breve{\iota}\,\alpha . \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha .$

$[*52{\cdot}6] \quad \equiv . x \in \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . *30{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi(\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x\,\breve{\iota}\,\alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x\,\breve{\iota}\,\alpha . \phi x$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash .$ Prop

$*52{\cdot}602.\ \vdash :. \hat{z}(\phi z) \in 1 . \supset : \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv . \phi x \supset_x \psi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . \psi x$ [$*52{\cdot}12 . *14{\cdot}26$]

$*52{\cdot}61.\ \vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \breve{\iota}`\alpha \in \beta . \equiv . \alpha \subset \beta . \equiv . \exists!(\alpha \cap \beta)$ $\left[*52{\cdot}601 \dfrac{x \in \beta}{\phi x}\right]$

$*52{\cdot}62.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha = \beta . \equiv . \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}601 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x = \breve{\iota}`\beta :$

$[*52{\cdot}6] \quad \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta :$

$[*52{\cdot}46] \quad \equiv : \alpha = \beta :: \supset \vdash .$ Prop

$*52{\cdot}63.\ \vdash : \alpha, \beta \in 1 . \alpha \neq \beta . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ [$*52{\cdot}46$. Transp]

$*52{\cdot}64.\ \vdash : \alpha \in 1 . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}43 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \exists!\,\alpha \cap \beta . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 :$

$[*5{\cdot}6 . *24{\cdot}54] \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \vee . \alpha \cap \beta \in 1 :$

$[*51{\cdot}236] \quad \supset : \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda :. \supset \vdash .$ Prop

$*52{\cdot}7.\ \vdash :. \beta - \alpha \in 1 . \alpha \subset \xi . \xi \subset \beta . \supset : \xi = \alpha . \vee . \xi = \beta$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}41 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \xi \subset \alpha . \supset . \xi = \alpha$ (1)

$\vdash . *24{\cdot}55 . \quad \supset \vdash : \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists!\,\xi - \alpha$ (2)

$\vdash . *22{\cdot}48 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \quad \supset . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists!\,\xi - \alpha . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (4)

$\vdash . *52{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\exists x) . \beta - \alpha = \iota`x$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . *51{\cdot}4 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \xi - \alpha = \beta - \alpha .$

$[*24{\cdot}411] \quad \supset . \xi = \beta$ (6)

$\vdash . (1) . (6) . \supset \vdash .$ Prop

LIST OF DEFINITIONS

1·01.	$p \supset q$	13·03.	$x = y = z$
2·33.	$p \vee q \vee r$	14·01.	$[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x)$
3·01.	$p . q$	14·02.	$E!(\imath x)(\phi x)$
3·02.	$p \supset q \supset r$	14·03.	$[(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$
4·01.	$p \equiv q$	14·04.	$[(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$
4·02.	$p \equiv q \equiv r$	20·01.	$f\{\hat{z}(\psi z)\}$
4·34.	$p . q . r$	20·02.	$x \in (\phi ! \hat{z})$
9·01.	$\sim\{(x) . \phi x\}$	20·03.	Cls
9·011.	$\sim(x) . \phi x$	20·04.	$x, y \in \alpha$
9·02.	$\sim\{(\exists x) . \phi x\}$	20·05.	$x, y, z \in \alpha$
9·021.	$\sim(\exists x) . \phi x$	20·06.	$x \sim \in \alpha$
9·03.	$(x) . \phi x . \vee . p$	20·07.	$(\alpha) . f\alpha$
9·04.	$p . \vee . (x) . \phi x$	20·071.	$(\exists \alpha) . f\alpha$
9·05.	$(\exists x) . \phi x . \vee . p$	20·072.	$[(\imath \alpha)(\phi \alpha)] . f(\imath \alpha)(\phi \alpha)$
9·06.	$p . \vee . (\exists x) . \phi x$	20·08.	$f\{\hat{\alpha}(\psi \alpha)\}$
9·07.	$(x) . \phi x . \vee . (\exists y) . \psi y$	20·081.	$\alpha \in \psi ! \hat{\alpha}$
9·08.	$(\exists y) . \psi y . \vee . (x) . \phi x$	21·01.	$f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x, y)\}$
10·01.	$(\exists x) . \phi x$	21·02.	$a\{\phi ! (\hat{x}, \hat{y})\} b$
10·02.	$\phi x \supset_x \psi x$	21·03.	Rel
10·03.	$\phi x \equiv_x \psi x$	21·07.	$(R) . fR$
11·01.	$(x, y) . \phi(x, y)$	21·071.	$(\exists R) . fR$
11·02.	$(x, y, z) . \phi(x, y, z)$	21·072.	$[(\imath R)(\phi R)] . f(\imath R)(\phi R)$
11·03.	$(\exists x, y) . \phi(x, y)$	21·08.	$f\{\hat{R}\hat{S}\psi(R, S)\}$
11·04.	$(\exists x, y, z) . \phi(x, y, z)$	21·081.	$P\{\phi ! (\hat{R}, \hat{S})\} Q$
11·05.	$\phi(x, y) . \supset_{x,y} . \psi(x, y)$	21·082.	$f\{\hat{R}(\psi R)\}$
11·06.	$\phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y)$	21·083.	$R \in \phi ! \hat{R}$
13·01.	$x = y$	22·01.	$\alpha \subset \beta$
13·02.	$x \neq y$	22·02.	$\alpha \cap \beta$

Kurt Gödel

1906	28. dubna narozen v Brně (Pekařská 5)
1912–1916	Evangelická základní škola v Brně (s německou řečí)
1916–1924	Reálné gymnázium v Brně (s německou řečí)
1924	Vstupuje na univerzitu ve Vídni
1927	Seznamuje se s Adelou Nimburskou, roz. Porketovou
1929	Vzdává se československého občanství, nabývá občanství rakouského 24. října obhajuje disertaci Über die Vollständigkeit des Logikkalkulus.
1929–1939	Zásadní výsledky na poli matematické logiky
1931	Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, **38**, 137–198.
1933	11. března habilitován na Vídeňské univerzitě
1938	20. září svatba s Adelou Nimburskou ve Vídni
1940	V lednu až březnu cesta manželů Gödelových do USA (přes Sibiř, Yokohamu a San Francisco do Princetonu)
1947	What is Cantor's continuum problem? American Mathematical Monthly, **54**, 515–525.
1948	Získává americké občanství
1949	An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. Review of Modern Physics, **21**, 447-450.
1958	Uber eine bischer noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica, **12**, 280–287. (Poslední publikovaná práce)
1978	14. ledna umírá v Princetonu
1992	9. dubna založena Společnost Kurta Gödela v Brně
1996	25.–29. srpna mezinárodní konference Logical Foundations of Mathematics, computer Science and Physics – Kurt Gödel Legacy v Brně

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty“) formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen“) – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty“) formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen“) – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Lze precizovat, které posloupnosti základních znaků jsou smysluplné.

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty“) formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen“) – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Lze precizovat, které posloupnosti základních znaků jsou smysluplné.

Důkazy jsou konečné posloupnosti formulí s pevně stanovenými vlastnostmi.

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty") formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen") – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Lze precizovat, které posloupnosti základních znaků jsou smysluplné.

Důkazy jsou konečné posloupnosti formulí s pevně stanovenými vlastnostmi.

K formuli lze přidat symbol $\vdash$, který označuje její dokazatelnost.

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty“) formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen“) – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Lze precizovat, které posloupnosti základních znaků jsou smysluplné.

Důkazy jsou konečné posloupnosti formulí s pevně stanovenými vlastnostmi.

K formuli lze přidat symbol $\vdash$, který označuje její dokazatelnost.

Všechny znaky se zobrazí na přirozená čísla. Formule je reprezentovatelná konečnou posloupností přirozených čísel, důkaz konečnou posloupností konečných posloupností čísel.

Kurt Gödel

Neúplnost formálně-logických systémů

O formálně nerozhodnutelných větách v *Principia mathematica* a příbuzných systémech, 1931

Formule („věty“) formálního systému jsou konečné posloupnosti základních znaků („písmen“) – pro proměnné, logické konstanty, závorky.

Lze precizovat, které posloupnosti základních znaků jsou smysluplné.

Důkazy jsou konečné posloupnosti formulí s pevně stanovenými vlastnostmi.

K formuli lze přidat symbol $\vdash$, který označuje její dokazatelnost.

Všechny znaky se zobrazí na přirozená čísla. Formule je reprezentovatelná konečnou posloupností přirozených čísel, důkaz konečnou posloupností konečných posloupností čísel.

Zkonstruuje se formule A, pro kterou $\vdash A \;\Leftrightarrow\; \nvdash A$.

Logický kalkul

- Abeceda – používané symboly
- Pravidla pro tvorbu formulí
- Axiomy
- Odvozovací pravidla

Sémantika: význam formulí

Výrokový kalkul

Abeceda výrokového počtu

1. $a, b, c, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ atomické výroky {výrokové proměnné}
2. $\neg, \rightarrow$ (výrokové) operátory
3. (,) levá a pravá závorka

Definice výroků

(i) Každý atomický výrok je výrok.
(ii) Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.
(iii) Jsou-li A, B výroky, je i $(A \rightarrow B)$ výrok.
(iv) Není jiných výroků.

Výrokový kalkul

Klasický

Axiomy

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$

(3) $\big((A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

(4) $\neg\neg A \to A$

Odvozovací pravidlo

$A \to B,\ A \mid B$

Výrokový kalkul

Klasický

Axiomy

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\big)$

(3) $\big((A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$

(4) $\neg\neg A \rightarrow A$

Odvozovací pravidlo

$A \rightarrow B,\ A \mid B$

Sémantika

Významy výroků: T, F (true, false)

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Výrokový kalkul

Intuicionistický

Axiomy

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$

(3) $\big((A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

(4) $\neg A \to (A \to B)$

Odvozovací pravidlo

$A \to B,\ A \mid B$

Sémantika

Významy výroků: T, F (true, false)

Výrokový kalkul

Vícehodnotový (fuzzy)

Axiomy

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

(3) $\big((A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$

(4) $\big((A \rightarrow B) \rightarrow A\big) \rightarrow A$

Odvozovací pravidlo

$A \rightarrow B,\ A \mid B$

Sémantika

Význam výroku A: pravdivostní hodnota $\mathcal{P}(A)$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$;
1$\sim$T (true), 0$\sim$F (false)

$$\mathcal{P}(\neg A) = 1 - \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A \rightarrow B) = \max\{1 - \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)\}$$

Výrokový kalkul

Modální S4

Axiomy

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\big)$

(3) $\big((A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$

(4) $\neg\neg A \rightarrow A$

(5) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(6) $\Box A \rightarrow A$

(7) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

Odvozovací pravidla

$A \rightarrow B,\ A \mid B$

$A \mid \Box A$

Sémantika

Možné světy

Výrokový kalkul

Parakonzistentní

Sémantika

Významy výroků:

T	true (pravda)
F	false (nepravda)
O	truth-value gap (ani pravda ani nepravda)
X	truth-value gluts (pravda i nepravda)

A	$\neg A$
T	F
O	O
X	X
F	T

$A \to B$		B: T	O	X	F
A	T	T	O	X	F
	O	T	O	T	O
	X	T	T	X	X
	F	T	T	T	T

MASARYKOVA
UNIVERZITA