# CORE004 Matematika jako součást kultury

## Týden 4. Pohyb a změna: infinitesimální počet

**14. října 2021**


# Jan Slovák

# 1. Infinitesimální počet: co to znamená?

- **Infinitesimal:** z latinského „infinitesimus“ tj. „člen posloupnosti v nekonečnu“, později „nekonečně malé“ číslo, tj. takové, které je nule blíže než jakékoliv reálné číslo.
- **Calculus:** v matematice pro nás dnes znamená „počet“ (ve smyslu „počítání“), původně z latinského calculus = oblázek
  - Calculus je dnes elementární část tzv. matematické analýzy zahrnující **diferenciální** a **integrální počet** (v češtině i němčině pod zjednodušeným názvem „matematická analýza“, původně „matematická infinitesimální analýza“)
  - V medicíně je zachován původní latinský význam slova, označuje různé typy „kamenů“ (žlučníkové, ledvinové, …)
  - Převzato prý ze starodávného „taxametru“ v Římě, založeného na počítání malých oblázků během jízdy.

# 2. Jak se s „nekonečně malým“ nakládá?

- Velmi dávno se objevovaly myšlenky integrálního počtu, lidé potřebovali počítat objemy a plochy geometricky daných objektů.
- V docela pokročilé formě už u starých Řeků
  - **metoda vyčerpání:** rozvinutá Archimedem, včetně heuristiky práce s „neviditelnými“ částmi, velmi připomíná základy integrálního počtu.
  - podobně, v přibližně stejné době také v Číně.
  - ve formalizované podobě tzv. Cavalierův princip (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647).
- Kupodivu, myšlenka vyčíslení „okamžité změny hodnoty“ a souvislost s počítáním objemů nebyla pořádně rozvinuta před Newtonem a Leibnizem.
- Dnes poměrně jednoduché, díky základnímu konceptu **limity** (jednoduchá formalizace významu „libovolně blízko“).
- Už Pierre de Fermat: „**rovno až na infinitesimální chybu**“.

# Leibniz versus Newton

- Gotfried Wilhelm Leibnitz, 1646 – 1716, péče formální stránku, **šikovný zápis**

- Isaak Newton, 1642 – 1726, „Calculus“ jako nástroj

# Leonhard Euler

1707 – 1783

- „inženýrská matematika“
- naši dnešní absolventi programu Matematika umí jen malinký zlomek toho, co obsáhl Euler
- k dokonalosti dotáhl (Newtonovu) práci s nekonečnými řadami a komplexními čísly (řada pro exponenciálu $e^x$)
- našel diferenciální rovnice popisující mnoho dějů i jejich řešení
- $e^{i\pi} + 1 = 0$ , rovnice obsahuje 5 nejdůležitějších čísel …

# Carl Friedrich Gauss

1777 – 1855

- dokonalé zvládnutí diferenciálního a integrálního počtu jako nástroje pro řešení problémů
- neskutečné množství „průlomových“ výsledků (např. „základní věta algebry“, odhad rozložení prvočísel),
- tzv. „normální“ rozdělení chyb měření (dnes všudypřítomná „Gaussova křivka“)
- neeuklidovská geometrie

# 3. Infinitesimální počet dnes – limity

- binomická věta pro racionální mocniny vedla k potřebě práce s „nekonečnými polynomy“ (Newton, psal o „mé metodě nekonečných řad“, formálně nedokonalou „interpolací“ k formuli dospěl dříve např. Wallis)
- **limity funkcí** v „hromadných bodech“ definičního oboru, posloupnosti jsou speciální případ
- jednoduchá pravidla pro počítání s limitami
- geometrická řada a konvergence **mocninných řad**
- **spojitost**



MUNI SCI
HR EXCELLENCE IN RESEARCH

# 3. Infinitesimální počet dnes – diferenciál

- Přírůstek hodnot nahradíme nejlepší možnou **lineární aproximací**, mluvíme o **derivaci**
- Když je chyba „nekonečně malé číslo řádu aspoň 2“, mluvíme o **diferenciálu**
- Když takto lze postupovat kvadratickými, kubickými atd. aproximacemi, dostaneme mocninnou řadu. Pokud konverguje k původní funkci, mluvíme o **analytických funkcích**
- Hladké funkce, zobecněné funkce …

# 3. Infinitesimální počet dnes – diferenciální rovnice

- Hledání Newtonova integrálu je nejjednodušší případ differenciální rovnice: $y' = f(t)$, hledáme $y(t)$, které rovnost splňuje.
- Obecně, „obyčejné diferenciální rovnice“ jsou infinitesimální vztahy mezi proměnnými zadávající křivky v prostoru (v zásadě jsme zpět v analytické geometrii, ale máme teď k dispozici silné nástroje)
- Ještě obecněji: závislost na více proměnných než jen na času, vede k „parciálním diferenciálním rovnicím“.
- V analytických případech přímočaře přechází v kombinatorické (zpravidla neřešitelné) problémy.

# 3. Diskrétní varianty – sumační a diferenční počet

- V praxi a v numerických metodách vidíme často **diference** místo derivací a pracujeme tak s diskrétními hodnotami času.
- Analogie derivace a integrálu u posloupností.
- Diferenční rovnice, neboli rekurence.