Základy fyziky hvězd – příklady

1 Úvod. Fyzika a hvězdy

Úlohy a problémy

Na konci všech oddílů učebnice je uvedena řada úloh a problémů vztahujících se k probíranému učivu, které je možné vyřešit pomocí vztahů a úvah obsažených v předcházejícím textu. Výsledky uvedené v hranatých závorkách za zadáním úloh mají posloužit jen k orientaci a kontrole. Důležitý je postup, který k výsledkům vede.

Převážná většina příkladů, úloh a problémů k zamyšlení je původních, i když občas jsem pro inspiraci sáhl i k úlohám uvedeným v učebnicích: M. Šolc a kol., *Fyzika hvězd a vesmíru*, SPN, Praha 1983, nebo J. Široký, M. Široká*: Základy astronomie v příkladech*, SPN, Praha 1970, 1977.

Náročnost úloh je rozdílná, některé úlohy jsou triviální, jiné naopak obtížné a časově náročné. Přesto vám doporučujeme, abyste se pokusili vyřešit všechny, protože jen tak si probíranou látku procvičíte vskutku důkladně a uvědomíte si řadu souvislostí, které v předcházejícím textu nebyly z různých důvodů zmíněny.

1.1. Vypočtěte délku světelného roku a parseku podle jejich definice. S jakou přesností jsou tyto jednotky stanoveny? 1 AU = 1,495 978 706 6 · 10^{11} m, c = 2,997 924 58 · 10^{8} m s^{-1}. Najděte její převodní faktor.

[1 sv. rok = 365,25 · 24 · 60 · 60 s · c = 9,460 730 473 · 10^{15} m,

$$1\ \mathrm{pc} = \left(\frac{\mathrm{AU}\cdot 360\cdot 3600}{2\,\pi}\right) = 3{,}085\,677\,6\cdot 10^{16}\ \mathrm{m},$$

$$\left(\frac{r}{1\,\mathrm{pc}}\right) = \frac{15\ \mathrm{AU}}{2\,\pi\ 365{,}25\,c}\left(\frac{r}{1\,\mathrm{ly}}\right) = 3{,}261\,564\left(\frac{r}{1\,\mathrm{ly}}\right).]$$

1.2. Mikuláš Koperník soudil, že všechny hvězdy jsou od nás vzdáleny asi 40 milionů průměrů Země. Vypočtěte: a) vzdálenost hvězd v AU a pc. b) jakou by měly tyto hvězdy paralaxu. Byla by měřitelná bez dalekohledu?

[a) 5,1 · 10^{14} m = 3400 AU = 0,017 pc, b) 1´, což by bylo na hranici měřitelnosti.]

1.3. Tycho Brahe pak měl zato, že jasné hvězdy mají úhlové průměry 2´. Vypočtěte pro kopernikovské vzdálenosti poloměr jasné hvězdy v poloměrech Slunce. Existují tak veliké hvězdy?

[210 $R_{\odot}$, Brahe se tak velkých hvězd zalekl, my však dnes víme že tak velké hvězdy jsou mezi obry a veleobry zcela běžné.]

1.4. Vlastní pohyb hvězdy μ se zpravidla udává v úhlových vteřinách za rok. Znáte-li paralaxu hvězdy π vypočítejte vzdálenost hvězdy ve světelných rocích r a tečnou složku rychlosti v_t v km/s.

$$[\,v_t = \left(\frac{2\pi\ \mathrm{pc}}{360\cdot 3600\cdot 365{,}2442\cdot 86400}\frac{\mu}{1''/\mathrm{rok}}\frac{r}{\mathrm{pc}}\right) = 4{,}740470\ \ \mathrm{km\,s^{-1}}\left(\frac{\mu}{1''/\mathrm{rok}}\right)\left(\frac{r}{\mathrm{pc}}\right).]$$

1.5. Barnardova hvězda je známa jako hvězda s největším známým vlastním pohybem, který činí 10,37"/rok. Objevil ji E. Barnard v roce 1916, když porovnával fotografické desky zachycující hvězdné pole v Hadonoši z let 1894 a 1916. Ze spektra hvězdy s vizuální hvězdnou velikostí V = 9,54 mag vyplývá mj., že jde o červeného trpaslíka typu M4 V, který se k nám blíží rychlostí V_R = -106,8 km/s. Hvězda je v současnosti druhým nejbližším hvězdným objektem, hned po trojhvězdě zvané Toliman (α Centauri). V databázi SIMBAD najdeme její paralaxu: π = 0,5493(16)".
Vypočtěte: a) její vzdálenost ve světelných letech, b) vypočtěte hodnotu tečné složky její prostorové rychlosti vztažené ke Slunci, c) velikost vektoru prostorové rychlosti, d) absolutní vizuální hvězdnou velikost hvězdy, e) zkontrolujte, zda má pravdu jistý Burnham, když tvrdí, že se tato hvězda přiblíží ke Slunci na pouhé 4 sv. roky, a to už za 10000 let, a pak se bude od něj opět vzdalovat. V době největšího přiblížení prý vzroste vlastní pohyb hvězdy na 25"/rok a hvězdná velikost hvězdy dosáhne 8,6 mag.

[(a) 5,94 sv. roku, (b) 89,5 km s^{-1}, (c) 139,3 km s-1, (d) 13,24 mag, (e) ano]

1.6. Vypočítejte vlnovou délku fotonu, jehož hmotnost odpovídá klidové hmotnosti elektronu. Hmotnost vyjádřete v kg a eV.

[Vlnová délka: 2,43 · 10^{-12} m, m_e = 9,11 · 10^{-31} kg ~ 0,512 MeV]

1.7. O kolik kg své hmotnosti přichází denně Slunce vyzařováním fotonů?

[$\dfrac{86400\,L}{c^2}$ = 3,7 · 10^{14} kg.]

1.8. Pomocí Planckova zákona odvoďte Stefanův zákon. Při odvození použijte vztahu: $\int\limits_0^\infty \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

$$[\ \Phi_e = S\int\limits_0^\infty B_\nu(T)\mathrm{d}\nu = S\frac{2\pi h}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1}\mathrm{d}\nu = S\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = S\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4\ ]$$

1.9. Vyjádřete monochromatickou hustotu zářivého toku absolutně černého tělesa vztaženou na jednotku vlnové délky.

$$[\ B_\nu(T)\left|\mathrm{d}\nu\right| = B_\lambda(T)\left|\mathrm{d}\lambda\right|,\ \mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda\ ,\ B_\lambda(\lambda,T) = 2\pi\,\frac{hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp(hc/kT\lambda)-1}\ ]$$

1.10. Pomocí Planckova zákona ověřte platnost Wienova zákona posuvu.

$$[\ \frac{\mathrm{d}B_\lambda(T)}{\mathrm{d}\lambda} = 0,\quad -\frac{5}{\lambda_{\max}^6}\frac{1}{\exp(hc/kT\lambda_{\max})-1} + \frac{1}{\lambda_{\max}^5}\frac{\exp(hc/kT\lambda_{\max})}{\left[\exp(hc/kT\lambda_{\max})-1\right]^2}\frac{hc}{kT\lambda_{\max}^2} = 0,$$

$$x_{\max} \equiv \frac{hc}{kT\,\lambda_{\max}},\quad -5 + \frac{x_{\max}\exp(x_{\max})}{\exp(x_{\max})-1} = 0,\quad \lambda_{\max}T = \text{konst.}\ ]$$

1.11. Kolikrát vyšší zářivý výkon má hvězda o teplotě 20 000 K, než stejně rozměrná hvězda o efektivní povrchové teplotě 5000 K? Za předpokladu, že obě září jako absolutně černá tělesa, zjistěte, kde leží maximum vyzařované energie v jejich spektru?

[256krát, 145 nm (UV) a 580 nm (oranžová).]

1.12. Sluneční záření o vlnových délkách mezi λ a (λ +1 nm) nese maximální energii pro λ = 480 nm. Pomocí Wienova posunovacího zákona odhadněte teplotu Slunce. Srovnejte s efektivní teplotou a rozdíl diskutujte.

[6038 K, T_{ef} = 5779 K, Slunce nezáří přesně jako absolutně černé těleso]

1.13. Obří hvězda o výkonu L = 1000 $L_\odot$ je obklopena neprůhledným mrakem okolohvězdné látky o poloměru cca 10 AU. Za předpokladu, že tento stav trvá již poměrně dlouho a oblak září jako absolutně černé těleso, vypočtěte efektivní teplotu zámotku. Diskutujte, zda byste tuto hvězdu mohli spatřit pouhýma očima, jak byste ji pozorovali nejlépe?

[T = 700 K, mohli, nejlépe pozorovatelná ale je v infračerveném oboru]

1.14. Ukažte, že pokud je teplota absolutně černého tělesa podstatně větší než $T_{\min} \cong 30\,000$ kelvinů, pak je zbarvení světla takovéhoto objektu na teplotě nezávislé. a) odvoďte $T_{\min}$, b) Jaké to bude zabarvení? Střední vlnová délku viditelného světla: λ_s = 500 nm.

[(a) $T_{\min} = \dfrac{hc}{k\lambda_s}$: Planckův zákon přechází v Rayleighův-Jeansův, (b) stejné jako zabarvení těch nejteplejších pozorovaných hvězd, čili bledě modré.]

1.15. Představte si, že v dutině se ustavilo dokonale rovnovážné záření odpovídající teplotě T_1. a) Jak by se změnila povaha tohoto záření, kdybychom stěny dutiny naráz nahradili dokonalými zrcadly, jejichž povrch odráží záření beze ztrát. Teplota zrcadel nechť je T_2. b) Co by se stalo, kdyby tato zrcadla nebyla tak úplně dokonalá, tj. že by jistou část záření přece jen pohlcovala?

[(a) nijak, (b) po chvíli by se v zrcadlové krabičce ustavilo rovnovážné záření o teplotě T_2.]

1.16. Prostor současného vesmíru je vyplněn reliktním zářením, které má povahu záření absolutně černého tělesa o teplotě 2,7 K. Tyto dlouhovlnné fotony jsou pozůstatkem rané éry vesmíru, kdy ještě byly látka a záření v rovnováze. V průběhu rozpínání vesmíru klesala koncentrace fotonů a prodlužovala se jejich vlnová délka.
Ukažte, že: a) tepelně rovnovážné reliktní záření během rozpínaní si podržuje povahu záření absolutně černého tělesa, b) teplota tohoto záření je nepřímo úměrná faktoru rozepnutí vesmíru. c) Zjistěte, kolikrát byl vesmír menší, když došlo k oddělení záření od látky (stalo se tak zhruba při teplotě 3350 K)

[(c) z = 1200]

1.17. Jistá kulová hvězdokupa o 250 000 členech se jeví jako objekt 4. velikosti. Jaká je průměrná hvězdná velikost člena hvězdokupy. Předpokládejte zde na okamžik, že hvězdná velikost všech hvězd hvězdokupy je stejná. Diskutujte, co se změní, není-li stejná.

[m = 17,5 mag]

1.18. Dvojhvězda Castor sestává ze dvou složek s hvězdnými velikostmi 2,0 a 2,9 mag. Jaká je pak hvězdná velikost Castoru při pozorování pouhým okem, jímž jednotlivé složky dvojhvězdy nerozlišíme.

[m = 1,6 mag]

1.19. Porovnejte jasnost Siria o vizuální hvězdné velikosti m_v = -1,47 mag a nejslabších, okem viditelných hvězd. Kolik takových hvězd šesté velikosti by se muselo spojit, aby se co do jasnosti Siriovi vyrovnalo?

[celkem 973 hvězd]

1.20. Z charakteristik Slunce: $R = 6{,}955\,08(26) \cdot 10^8$ m, $GM = 1{,}327\,124\,400\,18(8) \cdot 10^{20}$ m^3 s^{-2}, $L = 3{,}844(8) \cdot 10^{26}$ W, a střední vzdálenosti Země-Slunce 1 AU = $1{,}4959787066 \cdot 10^{11}$ m, vypočtěte (včetně chyby): a) hmotnost Slunce M, b) střední hustotu hvězdy, c) její střední úhlový poloměr pozorovaný ze Země, d) plochu slunečního kotouče v sr, e) velikost sluneční konstanty, f) zářivý výkon vystupující z 1 m^2 sluneční fotosféry, g) gravitační zrychlení na povrchu, h) únikovou rychlost z povrchu Slunce (u g) a h) zanedbejte rotaci a zploštění Slunce).

[(a) $M = \dfrac{(GM)_{\odot}}{G} = 1{,}98844(30)\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$; (b) $\overline{\rho} = \dfrac{3\,M}{4\pi\,R^3} = 1410{,}97(27)\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$,

(c) $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{\mathrm{R}_{\odot}}{\mathrm{AU}}\right) = 0{,}00464920(17)\ \mathrm{rad} = 958{,}966(36)''$;

(d) $2\pi\,(1-\cos\alpha) = 6{,}7906(5)\cdot 10^{-5}\,\mathrm{sr}$; (e) $K = \dfrac{L}{4\pi \mathrm{AU}^2} = 1367(3)\ \mathrm{W\,m^{-2}}$;

(f) $\dfrac{L}{4\pi\,\mathrm{R}_{\odot}^2} = 6{,}324(13)\cdot 10^7\ \mathrm{W\,m^{-2}}$; (g) $g = \dfrac{(GM)_{\odot}}{\mathrm{R}_{\odot}^2} = 274{,}351(21)\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$;

(g) $v_{\text{ú}} = \sqrt{\dfrac{2(GM)_{\odot}}{\mathrm{R}_{\odot}}} = 6{,}17760(12)\cdot 10^5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.]

1.21. Rotační energie současného Slunce činí 2,4 · 10^{35} J. a) Na kolik let by tato energie dokázala krýt jeho zářivý výkon? b) Za předpokladu zachování momentu hybnosti vypočítejte jak by se změnila perioda rotace a rotační energie, kdyby se Slunce naráz zhroutilo na bílého trpaslíka s rozměry stokrát menšími než má dnes? c) Odkud se vzala energie rotace?

[(a) 20 let, (b) 3,7 min, 2,4 · 10^{39} J, (c) z potenciální energie uvolněné kolapsem.]

1.22. Zjistěte vztah mezi vzdáleností hvězdy r, paralaxou π'', poloměrem hvězdy R a poloměrem kotoučku hvězdy α v úhlových vteřinách. $\mathrm{R}_{\odot}$= 6,95508(26)·10^8 m.

[$\alpha = \dfrac{360\cdot 60\cdot 60''}{2\pi}\left(\dfrac{R}{r}\right) = \dfrac{360\cdot 60\cdot 60''\cdot \mathrm{R}_{\odot}}{2\pi\cdot 1\ \mathrm{pc}}\left(\dfrac{R}{\mathrm{R}_{\odot}}\right)\left(\dfrac{1\ \mathrm{pc}}{r}\right) = 0{,}00464918(5)\left(\dfrac{R}{\mathrm{R}_{\odot}}\right)\pi''$.]

1.23. Odvoďte vztah mezi vzdáleností r v pc, pozorovanou a absolutní hvězdnou velikostí m a M.

[$\left(\dfrac{M}{1\ \mathrm{mag}}\right) = \left(\dfrac{m}{1\ \mathrm{mag}}\right) + 5 - 5\ \log\left(\dfrac{r}{1\ pc}\right)$.]

1.24. Najděte a vyčíslete vzájemné vztahy: a) mezi bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} a hustotou toku F; b) absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí M_{bol}, zářivým výkonem L v nominálních Sluncích, $\mathrm{L}_{\odot}$= 3,846·10^{26} W; c) mezi absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí, poloměrem hvězdy R v poloměrech Slunce, $\mathrm{R}_{\odot}$ ($\mathrm{R}_{\odot}$= 6,95508(26)·10^8 m), a její efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech; d) najděte vztah mezi pozorovanou absolutní hvězdnou velikostí, úhlovým poloměrem α vyjádřeným v úhlových vteřinách a efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech.

Z definice fotometrických veličin přitom plyne, že hvězda 0. bolometrické velikosti způsobuje na hranici zemské atmosféry hustotu zářivého toku F_0 = 2,553 · 10^{-8} W m^{-2}, hvězda s absolutní hvězdnou velikostí M_{bol} = 0 mag vysílá do prostoru zářivý výkon L_0 = 3,055 · 10^{28} W. Stefanova-Boltzmannova konstanta σ = 5,670400 · 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}.

[a) $\left(\dfrac{m_{\mathrm{bol}}}{1\mathrm{mag}}\right) = -2{,}5\log\left(\dfrac{F}{F_0}\right) = -18{,}9824 - 2{,}5\log\left(\dfrac{F}{1\,\mathrm{W\,m^{-2}}}\right)$,

b) $$\left(\frac{M_{\text{bol}}}{1\,\text{mag}}\right) = -2{,}5\,\log\left(\frac{L}{\mathrm{L}_0}\right) = 71{,}2125 - 2{,}5\,\log\left(\frac{L}{1\,\mathrm{W}}\right) = -2{,}5\,\log\left(\frac{\mathrm{L}_\odot}{\mathrm{L}_0}\cdot\frac{L}{\mathrm{L}_\odot}\right) =$$
$$= 4{,}7500 - 2{,}5\,\log\left(\frac{L}{\mathrm{L}_\odot}\right).$$

c) $$\left(\frac{M_{\text{bol}}}{1\,\text{mag}}\right) = -2{,}5\,\log\left(\frac{4\pi\,\sigma R^2\,T_{\text{ef}}^4}{\mathrm{L}_0}\right) = -2{,}5\,\log\left(\frac{4\pi\,\sigma\,\mathrm{R}_\odot^2}{\mathrm{L}_0}\right) - 5\,\log\left(\frac{R}{\mathrm{R}_\odot}\right) - 10\,\log\left(\frac{T_{\text{ef}}}{1\,\mathrm{K}}\right) =$$
$$= 42{,}3690 - 5\,\log\left(\frac{R}{1\,\mathrm{R}_\odot}\right) - 10\,\log\left(\frac{T_{\text{ef}}}{1\,\mathrm{K}}\right).$$

d) $$\left(\frac{m_{\text{bol}}}{1\,\text{mag}}\right) = -2{,}5\,\log\left(\frac{4\pi\,\sigma T_{\text{ef}}^4\,R^2}{4\pi\,F_0\,r^2}\right) = -2{,}5\,\log\left[\frac{\sigma\,T_{\text{ef}}^4\,\alpha^2}{F_0\,(360\cdot 3600/2\pi)''^2}\right] =$$
$$= 25{,}7057 - 5\,\log\left(\frac{\alpha}{1''}\right) - 10\,\log\left(\frac{T_{\text{ef}}}{1\,\mathrm{K}}\right).$$
.]

1.25. Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte (a) úhlový a (b) lineární poloměr Vegy, víte-li, že m_{bol} = -0,40 mag, paralaxa podle Hipparca 0,1289(6)“ a efektivní teplota ze spektra 9500 K.

[(a) 0,00184“, (b) R = 3,08 $\mathrm{R}_\odot$]

1.26. Moderní měření hustoty zářivého toku přicházejícího od Slunce, vedou k závěru, že hodnota sluneční konstanty K (hustota toku ve vzdálenosti 1 AU) činí 1367(3) W m^{-2}, přičemž dlouhodobá měření poloměru slunečního kotouče se ustálila kolem hodnoty: $\alpha_\odot$ = 958,966(36)“. Za předpokladu, že Slunce izotropně vyzařuje, vypočtěte a) poloměr Slunce v m, b) hodnotu zářivého výkonu Slunce L ve W a nominálních Sluncích $\mathrm{L}_\odot$, c) hodnotu pozorované sluneční bolometrické hvězdné velikosti a d) sluneční absolutní bolometrické hvězdné velikosti M_{bol} a e) efektivní teplotu Slunce v kelvinech. (Pozor, nezaměňujte skutečný a nominální zářivý výkon Slunce).

[(a) $\mathrm{R}_\odot$= 6,95508(26)·10^8 m, (b) L = 3,844(8) · 10^{26} W = 0,9995(21) $\mathrm{L}_\odot$, (c) $m_{\text{bol}\odot}$= -26,822(2) mag, (d) $M_{\text{bol}\odot}$= 4,751(2) mag, (e) $T_{\text{ef}\odot}$ = 5779(3) K]

1.27. Je-li dosah dalekohledu 23 magnitudy, do jaké vzdálenosti jím lze zaznamenat: a) nejjasnější cefeidy s absolutní hvězdnou velikostí M = -5 mag, b) novy, dosahující v maximu svého lesku M = -8 mag, c) supernovy typu Ia M = -19,5 mag?

[4, 16 a 3000 Mpc]

1.28. Dokažte, že pro rozdíl absolutní a pozorované hvězdné velikosti (libovolného typu) Slunce platí $m - M$ = -31,572126 mag. S jakou nepřesností tento modul vzdálenosti známe?

1.29. Jistá dvojhvězda, která nechce být jmenována, sestává ze dvou složek o absolutní hvězdné velikosti 1,267 mag a 1,875 mag. Vypočtěte a) jejich zářivé výkony v jednotkách slunečních, b) celkový zářivý výkon soustavy a d) její celkovou absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

[(a) 24,76 $\mathrm{L}_\odot$a 14,14 $\mathrm{L}_\odot$, (b) 38,90 $\mathrm{L}_\odot$, (d) 0,776 mag.]

1.30. Představte si, že by nám někdo zaměnil Slunce za a) Vegu (m_V = 0,03 mag, π" = 0,1289), b) Arkturus (m_V = -0,04 mag, π" = 0,0889), c) typickou hvězdu slunečního okolí (HD 155 876, m_V = 9,35 mag, π" = 0,158). Vypočtěte jejich vizuální hvězdnou velikost a úhlový průměr. Případné další potřebné údaje si můžete vyhledat v textu učebnice.

[(a) m_V = -30,99 mag, α = 83', (b) m_V = -31,87 mag, α = 10,6°, (c) m_V = -21,23 mag, α = 13']

1.31. Vypočtěte jakou hvězdnou velikost m_V by sama o sobě měla sluneční skvrna o teplotě 4200 K pokrývající asi 0,1 % plochy slunečního disku. Úhlový průměr Arkturu s toutéž teplotou je 0,022", vizuální hvězdná velikost je 0,0 mag. Srovnejte s hvězdnou velikostí Měsíce v úplňku.

[m_V = -17,2 mag, o 4,5 magnitudy jasnější.]

1.32. Hvězda Pollux je zřejmě Slunci nejbližším obrem. Vizuální hvězdná velikost Polluxu činí 1,15 mag, paralaxa podle družice Hipparcos 0,0967", efektivní teplota 4100 K a bolometrická korekce se odhaduje na +0,37 mag. Vypočtěte: a) vzdálenost Polluxu, b) jeho absolutní vizuální hvězdnou velikost, c) bolometrickou hvězdnou velikost, d) absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy, e) zářivý výkon v jednotkách slunečních, f) poloměr hvězdy v poloměrech Slunce.

[(a) 10,3 pc, (b) 1,08 mag, (c) 1,52 mag, (d) 1,45 mag, (e) 21 $L_\odot$, (f) 9 $R_\odot$]

1.33. Efektivní teplota Siria A je 9400 K, poloměr 1,8 $R_\odot$ a hmotnost 2,2 $M_\odot$. Určete: a) zářivý výkon hvězdy v jednotkách slunečních, b) její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost, c) střední hustotu hvězdy.

[(a) 22,7 $L_\odot$, (b) 1,35 mag, (c) 530 kg m^{-3} = 0,38 $\rho_\odot$]

1.34. Jistý červený trpaslík spektrální třídy M5 V má hmotnost 0,2 $M_\odot$ a poloměr 0,31 $R_\odot$, absolutní bolometrická velikost hvězd činí 9,8 mag. Vypočtěte: a) zářivý výkon v jednotkách slunečních, b) efektivní povrchovou teplotu, c) střední hustotu hvězdy. Diskutujte.

[(a) 0,0095 $L_\odot$, (b) 3240 K, (c) 9500 kg m^{-3} = 6,7 $\rho_\odot$]

1.35. Diskutujte, jak se na ploše HR diagramu projeví, že zakreslený objekt je vlastně nerozlišenou dvojhvězdou sestávající ze dvou hvězd hlavní posloupnosti.

1.36. Studujte nyní hvězdy, které mají absolutní hvězdnou jasnost J a jsou a) rozloženy v prostoru zcela rovnoměrně, b) jsou zcela rovnoměrně rozloženy v tenké vrstvě, v níž je i pozorovatel (galaktická rovina). Vypočtěte jak bude záviset počet těchto objektů jasnějších než je jistá mezní jasnost j_m na této jasnosti a absolutní jasnosti J pro oba tyto idealizované případy. Extinkci zanedbejte. Co tyto výsledky naznačují?

[(a) $N \sim (J/j_m)^{3/2}$, (b) $N \sim J/j_m$]

1.37. Předpokládejte, že hvězdy jsou v prostoru rozloženy zcela rovnoměrně. Je-li N_m počet hvězd jasnějších než m magnitud a N_{m+1} je počet hvězd jasnějších než (m+1) magnitud, dokažte, že poměr N_{m+1}/N_m = 3,98. Na naší obloze je však tento poměr poněkud menší. Proč?

2 Stavba hvězd

2.1. Byli jsme úspěšní a podařilo se nám v pozemské laboratoři vyrobit supertěžkou velmi slabě interagující částici. Ve chvíli svého zrodu byla vůči laboratoři v klidu. Jaký byl její další osud. Kde ji hledat? Hýbe-li se, pak jak? Pro jednoduchost předpokládejte, že Země je uvnitř homogenní.

[$F = -G\dfrac{m M_Z}{r^2} = -\dfrac{4}{3}\pi G m \rho r,\ \ F = m\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \ \ \rightarrow \ \ \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4}{3}\pi G \rho r = 0,$ pohybová rovnice odpovídá harmonickému oscilátoru, částice bude vykonávat harmonický pohyb se středem v centru Země]

2.2. Představte si, že máte hvězdu složenou z ideálního plynu, který je ovšem zcela dokonale tepelně vodivý (izotermický). a) Jak by v nitru takové hvězdy závisel tlak na hustotě? b) Mohla by být taková hvězda stabilní?

[(a) $P \sim \rho$, (b) nikoli, $\gamma = 1 < 4/3$.]

2.3. Vypočítejte hodnotu gradientu tlaku a) nad zemskou mořskou hladinou a b) pod ní. Hustotu vzduchu uvažujete 1,205 kg/m^3, stlačitelnost vody zanedbejte.

[(a) -11,8 Pa m^{-1}, (b) -9,81 · 10^3 Pa m^{-1}.]

2.4. Při klinických zkouškách bylo zjištěno, že jeden z vašich žabích mužů nesnese větší přetlak než 2,4 atm. Jak hluboko byste ho beze svědků poslal, abyste se ho konečně zbavil?

[do 25 metrů.]

2.5. Jaký je rozdíl tlaků v hlavě a chodidlech při vzpřímeném postoji 1,80 m vysokého člověka. Co se změní, postaví-li se týž na hlavu? Předpokládejte, že hustota člověk odpovídá hustotě vody.

[17 000 Pa = 0,17 atm]

2.6. Dokažte, že při maximálním zploštění hvězdy způsobeném rotací je poměr polárního a rovníkového poloměru 2:3. Předpokládejte, že hmota hvězdy je v převážné míře koncentrovaná do jejího centra.

2.7. Pomocí tabulky s charakteristikami hvězd hlavní posloupnosti ukažte, že hodnota centrálního tlaku roste zhruba nepřímo úměrně hmotnosti hvězdy.

2.8. Jaká je střední kinetická energie atomů vodíku, atomů helia a volných elektronů ve sluneční atmosféře o teplotě 5780 K. Jaké jsou jejich střední kvadratické rychlosti? Stačí k úniku ze sluneční atmosféry? Diskutujte.

[0,75 eV, 12,0 km s^{-1}, 6,0 km s^{-1}, 513 km s^{-1}, v_u = 618 km s^{-1}.]

2.9. Odhadněte počet částic v 1 m^3 látky ve sluneční fotosféře, víte-li, že její teplota je 5780 K a tlak 0,1 atmosféry. Porovnejte s koncentrací molekul v zemské atmosféře.

[1,3 · 10^{23} částic/m^3. Koncentrace ve fotosféře je 200krát menší než zemské atmosféře.]

2.10. Za zjednodušujícího předpokladu, že Slunce je složeno ze 30 % z He a 70 % z H a jde o plně ionizovaný plyn, vypočtěte celkový počet a) volných elektronů, b) protonů, c) α částic ve hvězdě.

[(a) 1,01 · 10^{57}, (b) 8,32 · 10^{56}, (c) 8,91 · 10^{55}.]

2.11. Diskutujte, jak by se měnila střední atomová hmotnost slunečního materiálu μ, pokud by byl tento složen pouze z vodíku a helia: X = 0,70, Y = 0,30 při cestě od povrchu hvězdy k centru. Rozlište postupně tyto případy: a) oba plyny jsou neutrální, b) vodík je zcela ionizován, helium je však takřka neutrální, c) vodík i helium jsou právě jedenkrát ionizovány a d) oba plyny jsou úplně ionizovány. Diskutujte.

[(a) 1,29, (b) 0,678, (c) 0,645, (d) 0,615 – ze všeho nejdůležitější je stav vodíku, ostatní je pouze korekce]

2.12. Dokonale plastické těleso udržované pohromadě vlastní gravitací, které rotuje jako tuhé těleso, se vlivem odstředivé síly formuje do tvaru velice podobného rotačnímu elipsoidu. Ukažte, že v tom případě, kdy je převážná část hmoty rotujícího tělesa soustředěna v centru, platí, že poměr jeho rovníkového poloměru r_e ku poloměru polárnímu r_p je dán vztahem: $q = \frac{r_e}{r_p} - 1 = \frac{a_{od}}{2 g_{gr}}$, kde a_{od} je odstředivé zrychlení na rovníku a g_{gr} je hodnota gravitačního zrychlení tamtéž. Zkontrolujte, nakolik předpovědi míry zploštění q_{pred} souhlasí s reálně pozorovanými hodnotami zploštění a) u Země, b) u Jupiteru, c) u fotosféry Slunce. d) Vysvětlete pozorované rozdíly.

[(a) q_{pred} = 0,00347/2, q = 0,00346, (b) q_{pred} = 0,087/2, q = 0,065, (c) q_{pred} = 2,14 · 10^{-5}/2, q = 1/20000.]

2.13. Předpokládejte, že v určitém objemu vodíku o hustotě a teplotě T proběhly jaderné reakce, při nichž se všechna jádra vodíku spojila v jádra helia. Jak se musí změnit součin teploty T' a hustoty ρ', aby v témže objemu ionizovaného helia panoval týž tlak jako před započetím jaderných reakcí. Vysvětlete tím, proč během stadia hvězdy hlavní posloupnosti teplota a hustota v centru monotónně rostou.

[$\rho' T' = \frac{8}{3} \rho T$]

2.14. Porovnejte tlak působící v nitru bílého trpaslíka o hmotnosti 1 $M_\odot$, poloměru 6000 km s tlakem ve slunečním nitru. Diskutujte s ohledem na chování látky, z níž jsou obě hvězdy tvořeny.

[tlak je zde 2 · 10^8krát větší, látka je ve stavu elektronově degenerovaného plynu]

2.15. Pro teplotu degenerace platí: $T_{deg} \sim 10^{-15} N_e^{2/3}$ K, kde N_e je koncentrace volných elektronů. Dokažte, že ve vysokoteplotním plazmatu hvězdného materiálu, tvořeném především zcela ionizovanými atomy a volnými elektrony, závisí N_e na zastoupení vodíku X a hustotě materiálu ρ takto:

$$N_e = \frac{(1+X)\rho}{2 m_H} \rightarrow T_{deg} \sim 450 \text{ K } (1+X)^{2/3} \{\rho\}^{2/3}.$$

Pro materiál ve slunečním centru s hustotou ρ_c = 1,5 · 10^5 kg m^{-3} a hmotnostním zastoupením vodíku X = 0,4 spočtěte teplotu degenerace a porovnejte se skutečnou teplotou.

[1,6 · 10^6 K, je tedy 10krát menší, než skutečná teplota: 1,6 · 10^7 K.]

2.16. Na půl cesty mezi středem a povrchem Slunce vládne teplota 3,4 · 10^6 K, tlak 10^6 Pa, hustota látky 1000 kg/m^3. Vypočtěte a) kolik látkových částic (volných elektronů, protonů, alfa částic, jader těžších prvků) obsahuje 1 m^3 látky látkových částic všeho druhu (předpokládejte standardní chemické složení a úplnou ionizaci všech atomů). b) Najděte střední vlnovou délku fotonů a stanovte o jaký typ záření tu jde, c) porovnejte se zářením vycházejícím z fotosféry. d) Jaká je koncentrace fotonů, porovnejte s počtem „látkových“ částic. Srovnáme-li charakteristiky tohoto plynu s charakteristikami rovnovážného fotonového plynu téže teploty, musíme dojít k závěru, že fotony jsou ve slunečním nitru dosti „vzácnými zvířaty“. e) Vypočtěte hustotu energie fotonového plynu a porovnejte s hustotou kinetické energie plynu. f) Porovnejte tlak záření s tlakem ideálního plynu. Z toho okamžitě plyne, že příspěvek fotonového plynu na celkovém tlaku je zanedbatelný – činí 1/1340 tlaku ideálního plynu. g) Vysvětlete, jak je potom možné, že se zde energie přenáší právě zářením?

[(a) $9{,}64 \cdot 10^{29}$ částic, (b) 1,6 nm, měkké rentgenové záření, (c) 600krát delší, (d) $8 \cdot 10^{26}$ fotonů/m^3: na 1200 částic připadá jeden foton, (e) 10^{11} J m^{-3}, 670krát menší, (f) 1/(2x670) = 1/1340, (g) fotony se pohybují rychlosti světla a mají o několik řádů delší střední volnou dráhu než ostatní částice]

2.17. Předpokládejte, že se ve hvězdě o poloměru R a hmotnosti M hustota látky 1) vůbec nemění, 2) mění se nepřímo úměrně kvadrátu vzdálenosti od centra r. Vypočítejte pro oba případy: a) závislost této hustoty $\rho(r)$ vyjádřené pomocí střední hustoty hvězdy ρ_s, b) závislost té části hmotnosti hvězdy, která je pod poloměrem r M_r, c) průběh závislosti gravitačního zrychlení $g(r)$ vyjádřeného v povrchovém gravitačním zrychlení $g(R)$ a d) velikost potenciální (konfigurační) energie této hvězdy a rozdíly diskutujte.

[(a) $\rho_1(r) = \rho_s$, $\rho_2(r) = 1/3\, \rho_s (R/r)^2$, (b) $M_r = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x$, $M_{r1} = M\,(r/R)^3$, $M_{r2} = M\,(r/R)$, (c)

$$g(r) = -\frac{G M_r}{r^2},\ g_1(r) = g_1(R)(r/R),\ g_2(r) = g_2(R)\,(R/r),\ \text{(d)}$$

$$W_{\mathrm{pot}}(r) = \int_\infty^R \frac{GM}{r^2}\mathrm{d}r + \int_R^r \frac{GM_r}{r^2}\mathrm{d}r,\ E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}4\pi\int_0^R \rho(r) W_{\mathrm{pot}}(r) r^2 \mathrm{d}r,$$

$$E_{\mathrm{pot1}} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R},\ E_{\mathrm{pot2}} = -G\frac{M^2}{R}\ ].$$

2.18. Hustota energie záření absolutně černého tělesa připadající na jednotku frekvence je dána vztahem $w_\nu(T) = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}$. Spočtěte celkovou hustotu energie záření absolutně černého tělesa. Při odvození použijte vztahu: $\int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

$$[\ w = \int_0^\infty w_\nu(T)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1}\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3}T^4 = \frac{4\sigma}{c}T^4\ ]$$

2.19. Pomocí vztahů z předcházející úlohy získejte vzorec pro koncentraci fotonů. Při odvození použijte vztahu: $\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1} \cong 2{,}404.$

$$[\ n_{\mathrm{f}}(\nu,T) = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1},$$

$$n_{\mathrm{f}} = \int_0^\infty n_{\mathrm{f}}(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^3\int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x \cong 2{,}404\frac{8\pi k^3}{c^3h^3}T^3 \cong 2{,}029\cdot 10^7\,\mathrm{m^{-3}K^{-3}}T^3\ ]$$

2.20. Pomocí výsledků předcházejících dvou příkladů spočtěte střední energii připadající na jeden foton.

[$\varepsilon_s = \dfrac{w}{n_f} \cong 2{,}70kT$]

2.21. Podle standardního slunečního modelu slunečního nitra má látka v centru hustotu 1,5 · 10^5 kg/m^3 a teplotu 1,5 · 10^7 K, hmotnostní zastoupení vodíku X = 0,4 a obsah helia Y = 0,6, příspěvek těžších prvků je možno v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí, za předpokladu, že vodík a helium jsou zde plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte též tlak záření a oba tlaky porovnejte.

[P_g = 2,3 · 10^{16} Pa, P_r = 1,3 · 10^{13} Pa, P_r/P_g = 6 · 10^{-4}]

2.22. Předpokládejte, že v centru Slunce vládne teplota T_c = 1,5 · 10^7 kelvinů a směrem k povrchu hvězdy klesá lineárně. Vypočtěte závislosti na vzdálenosti od centra Slunce těchto veličin: a) teploty a teplotního gradientu, b) hustoty energie rovnovážného záření, c) gradientu hustoty energie, d) koncentrace fotonů, e) gradientu koncentrace fotonů. Dále odhadněte f) celkový počet fotonů ve hvězdě a porovnejte jej s počtem nukleonů, g) jaký je relativní poloměr a objem koule, v níž je obsažena polovina slunečních fotonů

[$x = r/R_\odot$; (a) $T(r) = T_c(1-x)$, $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{T_c}{R_\odot}$ = -0,020 K/m, (b) $\varepsilon = a\,T^4$ = 2,90 · 10^{13} J/m^3 $(1-x)^4$, (c) $\dfrac{d\varepsilon}{dr}$ = 1,67 · 10^5 J/m^4 $(1-x)^3$, (d) n_f = 5,57 · 10^{28} $(1-x)^3$ fotonů/m^3, (e) $\dfrac{dn_f}{dr}$ = 2,40 · 10^{20} $(1-x)^2$ fotonů/m^4, (f) N = 1,97 · 10^{54} fotonů (přesnější výpočet dá 1,1 · 10^{54} fotonů), částic ve Slunci je 2 · 10^{57}, (g) řešením rovnice: $40\,x^3 - 90\,x^4 + 72\,x^5 - 20\,x^6 - 1 = 0$, x = 0,421; 3,1 %]

2.23. Dostali jste za úkol zvýšit průměrnou teplotu částic ve hvězdě změnou opacity její látky. Zvýšíte opacitu a nebo ji zmenšíte?

2.24. U hvězd hlavní posloupnosti je nejdůležitější charakteristikou celková hmotnost hvězdy M. V intervalu spektrálních typů M5 až B0 platí, že poloměr $R \sim M^{3/4}$, a zářivý výkon $L \sim M^{7/2}$. Najděte, jak potom na hmotnosti závisí: a) efektivní teplota hvězdy T_{ef}, b) střední hustota hvězdy ρ_s , c) gravitační zrychlení na povrchu hvězdy g a d) centrální teplota hvězdy T_c, e) centrální tlak P_c.

[(a) $T_{ef} \sim M^{1/2}$, (b) $\rho_s \sim M^{-5/4}$, (c) $g \sim M^{1/2}$, (d) $T_c \sim M^{1/4}$, (e) $P_c \sim M^1$]

2.25. Za předpokladu, že zářivý výkon hvězdy L závisí na hmotnosti hvězdy M tímto způsobem: $(L/L_\odot) = (M/M_\odot)^{7/2}$ vypočtěte, jak na hmotnosti hvězdy závisí poloměr dráhy r a perioda P hypotetické obyvatelné planety, na níž bychom naměřili touž hustotu zářivého toku, jakou nás oblažuje Slunce. Obě veličiny spočtěte pro případ hvězdy o hmotnosti a) 1,5 Slunce a b) 0,8 Slunce a c) 0,3 Slunce. Diskutujte.

[r = 1 AU $(M/M_\odot)^{7/4}$, P = 1 rok $(M/M_\odot)^{17/8}$, (a) 2,0 AU a 2,4 roku, (b) 0,68 AU a 0,62 roku, (c) 0,12 AU a 0,077 roku.]

2.26. Na jak dlouho by Slunci vydržela zásoba vodíkového paliva, kdyby bylo možné ve Slunci spálit veškerý vodík na helium beze zbytku a zářivý výkon Slunce by celou dobu odpovídal výkonu dnešního Slunce. (Předpokládejte, že Slunce obsahuje 70% H a 30% He).

[70 miliard let]

2.27. Pokuste se všeobecně přístupnou formou vysvětlit fakt, proč je ke spojování jader helia zapotřebí vyšší teplota, než při vodíkových termonukleárních reakcích?

2.28. Určete o kolik kg se zmenšuje ročně hmotnost Slunce vyzařováním fotonů a jak dlouho by mohlo Slunce zářit svým současným výkonem, než by vyzářilo energii ekvivalentní své hmotnosti.

[$1{,}35 \cdot 10^{17}$ kg; $1.5 \cdot 10^{13}$ let]

2.29. První hvězdy ve vesmíru byly pravděpodobně složeny pouze z vodíku a helia, ostatní lehčí prvky byly zastoupeny pouze v zanedbatelném množství. Diskutujte, jaké termonukleární reakce mohly probíhat v jádru těchto hvězd na počátku jejich vývoje.

3 Hvězdné atmosféry

3.1. Vypočítejte: a) Jakou minimální kinetickou energii a rychlost musí mít elektron (hmotnost elektronu vůči hmotnosti protonu zanedbejte), aby při nepružné srážce s atomem vodíku v základním stavu dokázal tento atom ionizovat. Porovnejte potřebnou rychlost se střední kvadratickou rychlostí elektronů v ideálním plynu teplém b) 6000 K, c) 9000 K a d) 12 000 K. Diskutujte.

[(a) 13,6 eV, 2 190 km/s, (b) 522 km/s, (c) 640 km/s, (d) 739 km/s. K ionizaci jsou disponovány jen výjimečně rychlé elektrony]

3.2. Je možné, aby se sousední spektrální série vodíku vzájemně překrývaly?

[Ano, platí-li $n > 1 + \sqrt{2}$, čili již Paschenova série s Brackettovou se překrývají.]

3.3. Jak mnoho energie se uvolní při rekombinaci 1 kg ionizovaného vodíku na vodík neutrální? Porovnejte s energií zkapalnění 1 kg vodní páry na vodu téže teploty při tlaku 10^5 Pa.

[$1{,}3 \cdot 10^9$ J, tato energie je 580krát větší než v případě zkapalnění vodní páry.]

3.4. Atom vodíku s elektronem v základním energiovém stavu pohltil foton o vlnové délce 88 nm, což vedlo k jeho ionizaci. Vypočtěte rychlost elektronu, s níž opustí atom za zjednodušujícího předpokladu, že se kinetická energie jádra přitom nezmění.

[410 km/s.]

3.5. Při velmi pomalé, avšak nepružné srážce dvou neutrálních atomů vodíku, z nichž jeden je v základním stavu a druhý je excitován do druhé energiové hladiny, dojde k deexcitaci druhého atomu bez emise fotonu. Vypočtěte rychlost, s níž se po srážce začnou atomy vzájemně vzdalovat. (Řešte v soustavě spojené s těžištěm).

[62,5 km/s.]

3.6. Ukažte, a) že Boltzmannovu konstantu k, jež vystupuje ve většině vztahů statistické fyziky, lze vyjádřit v podobě: $k = 8{,}617\,343 \cdot 10^{-5}$ eV K^{-1}. b) Jaký význam má součin kT? Jak velký je pro pokojovou teplotu? Při jaké teplotě je kT rovno c) 1 eV , d) 13,59 eV?

[(b) 1/40 eV, (c) 11 600 K, (d) 157 800 K.]

3.7. Dokažte, že pro atom vodíku je stupeň degenerace g_n energetické hladiny, popsané hlavním kvantovým číslem n, dán vztahem: $g_n = 2\,n^2$. Vypočítejte stupeň degenerace i pro případ složitějšího atomu, kde je energie atomu funkcí jak hlavního kvantového čísla n, tak i vedlejšího kvantového čísla j.

$$[\, s = \pm\frac{1}{2},\; m = -l,\ldots,l,\; l = 0,\ldots,n-1,\; g_n = 2\sum_{0}^{n-1}(2l+1) = 2\,n^2 \,]$$

3.8. Zjistěte poměrné zastoupení atomů vodíku excitovaných do 2. a 3. energetické hladiny v termodynamické rovnováze při teplotě a) 6000 K, b) 12 000 K, c) 24 000 K, vztažené vůči koncentraci atomů vodíku v základním stavu. Koncentrace volných elektronů nechť činí $3{,}14159265 \cdot 10^{23}$/m^3.

[(a) $1{,}1 \cdot 10^{-8}$ a $6{,}2 \cdot 10^{-10}$, (b) $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ a $7{,}5 \cdot 10^{-5}$, (c) $2{,}9 \cdot 10^{-2}$ a $2{,}6 \cdot 10^{-2}$.]

3.9. Může za předpokladu termodynamické rovnováhy nastat taková situace, že a) ve hvězdné atmosféře početně převládnou atomy nabuzené do druhé energetické hladiny nad atomy v základním stavu? b) Jestliže ano, jaké budou mít relativní zastoupení atomy excitované do 3.

hladiny? c) Poroste-li teplota nade všechny meze, jaké bude obsazení i-té hladiny v poměru k obsazení základní hladiny? Může takové obsazení hladin reálně nastat?

[(a) může, teplota by zde však musela být vyšší než 85 000 K, tj. vyšší než teplota běžných hvězdných atmosfér, (b) atomů ve 3. hladině by muselo být 1,73krát více než atomů v základním stavu, (c) $N_i/N_1 = i^2$, ovšem v té situaci už nebude žádný neutrální atom k dispozici.]

3.10. Zdůvodněte, proč je v Sahově rovnici koncentrace atomů ve vyšším stupni ionizace nepřímo úměrná koncentraci volných elektronů?

3.11. Nakreslete graf závislosti poměru koncentrace vodíku v druhé energiové hladině k celkové koncentraci vodíku v závislosti na teplotě za předpokladu termodynamické rovnováhy. Předpokládejte, že koncentrace elektronů se nemění a je rovna $N_e = 10^{20}$ m^{-3}. Pro příslušné partiční funkce platí $Z_\mathrm{I} \cong 2,\ Z_\mathrm{II} = 1$. Diskutujte.

$$[\frac{N_{2,\mathrm{I}}}{N_\mathrm{H}} = \frac{N_{2,\mathrm{I}}}{N_\mathrm{I}}\frac{N_\mathrm{I}}{N_\mathrm{H}} = \frac{N_{2,\mathrm{I}}}{N_\mathrm{I}}\frac{N_\mathrm{I}}{N_\mathrm{I}+N_\mathrm{II}} = \frac{N_{2,\mathrm{I}}}{N_\mathrm{I}}\frac{1}{1+\frac{N_\mathrm{II}}{N_\mathrm{I}}},\quad \frac{N_{2,\mathrm{I}}}{N_\mathrm{I}} = \frac{g_{2,\mathrm{I}}}{Z_\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-\frac{E_2-E_1}{kT}},$$

$$\frac{N_\mathrm{II}}{N_\mathrm{I}} = \frac{2}{N_\mathrm{e}}\frac{Z_\mathrm{II}}{Z_\mathrm{I}}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{E_\mathrm{I}}{kT}}.]$$

3.12. Je vyšší ionizace a) atomů sodíku s ionizačním potenciálem χ_i = 5,14 eV a $Z_1/Z_0 \cong 0{,}5$, b) atomů železa s χ_i = 7,87 eV, $Z_1/Z_0 \cong 1{,}6$ v atmosféře červeného obra, kde předpokládáme efektivní teplotu 4 500 K a koncentraci volných koncentrací $N_\mathrm{e} = 2{,}5 \cdot 10^{17}$ m^{-3} nebo v atmosféře hvězdy hlavní posloupnosti o teplotě 5 200 K s elektronovou koncentrací $N_\mathrm{e} = 4{,}4 \cdot 10^{18}$ m^{-3}. Diskutujte.

[a) pro hvězdu hlavní posloupnosti N_1/N_0 = 2 100, pro obra N_1/N_0 = 5 100, ionizace sodíku je v atmosféře obra vyšší; b) pro hvězdu hlavní posloupnosti je poměr počtu ionizovaných a neionizovaných atomů železa N_1/N_0 = 16, pro obra N_1/N_0 = 14, ionizace v atmosféře hvězdy hlavní posloupnosti je mírně vyšší.]

3.13. Vysvětlete empirický postřeh spektroskopistů, a totiž, že čáry neutrálního vápníku Ca I mají větší intenzitu u červených trpaslíků než u červených obrů těchže efektivních teplot. Úvahu proveďte pro teplotu u obou hvězd 3 150 K, s tím, že ionizační potenciál neutrálního vápníku je χ_i = 6,11 eV. Koncentraci volných elektronů v případě atmosféry obra předpokládejte $N_\mathrm{e} = 4{,}6 \cdot 10^{16}$ m^{-3}, v případě trpaslíka $N_\mathrm{e} = 4{,}6 \cdot 10^{16}$ m^{-3}. Poměr příslušných partičních funkcí neutrálního a jednou ionizovaného vápníku má při zadané teplotě a elektronové koncentraci hodnotu $Z_1/Z_0 \cong 1{,}9$.

[pro obra N_1/N_0 = 6, pro hvězdu hlavní posloupnosti N_1/N_0 = 0,18. Relativně více neutrálních atomů vápníku je v atmosférách červených trpaslíků.]

3.14. Užitím Sahovy rovnice vypočítejte poměr počtu negativní iontů vodíku H^- a neutrálních vodíkových atomů H ve fotosféře Slunce. Za teplotu zvolte efektivní povrchovou teplotu 5779 K, koncentraci elektronů předpokládejte $N_\mathrm{e} = 2 \cdot 10^{19}$ m^{-3}, χ_i = 0,75 eV. Pauliho vylučovací princip vyžaduje existenci jednoho stavu pro iont, oba elektrony musí mít opačné spiny. V atmosféře Slunce se iont H^- vytváří tak, že se volný elektron spojí s neutrálním atomem vodíku H, přičemž se uvolní foton o energii nejméně 0,75 eV $H + e^- \rightarrow H^- + \gamma$.

$$[Z_\mathrm{H} \cong 2,\quad Z_{\mathrm{H}^-} = 1,\quad \frac{N_\mathrm{H}}{N_{\mathrm{H}^-}} = 5 \cdot 10^7]$$

3.15. Logaritmováním Boltzmannovy a Sahovy rovnice uveďte tyto vztahy do tvaru, v němž je astrofyzikové vidí nejraději, energie v eV, teploty v kelvinech:

[$\log \dfrac{N_B}{N_A} = -\dfrac{5040\ \mathrm{K}}{T}\dfrac{E_A - E_B}{\mathrm{eV}} + konst.$;

$\log \dfrac{N_i}{N} = 1{,}5\ \log T - \dfrac{5040\ \mathrm{K}}{T}\dfrac{E_i}{\mathrm{eV}} - \log N_e + konst.$].

3.16. Obr spektrální třídy K má efektivní teplotu 4 300 K. Zjištěná hodnota mikroturbulentní rychlosti je 2 km s^{-1}. Stanovte šířku čáry Fe I o vlnové délce 553,93 nm. Lze mikroturbulenci zanedbat?

[$\Delta\lambda = \dfrac{2\lambda}{c}\left(\dfrac{2kT}{m} + v_{\mathrm{turb}}^2\right)^{1/2} \cong 0{,}008\ \mathrm{nm}$, nelze]

3.17. Hvězda CQ UMa je chemicky pekuliární hvězdou typu SrCrEu, spektrální třídy A2 V, na jejímž povrchu se nacházejí rozsáhlé skvrny s odlišným rozložením energie ve spektru. Hvězda v důsledku rotace vykazuje fotometrické změny, které v barvě *v* dosahují až 0,096 mag. Perioda světelných změn činí 2,45 dne, není ovšem vyloučena ani perioda dvojnásobná. K rozhodnutí mezi nimi nám může pomoci spektroskopie. Z pološířky spektrální čáry Mg II totiž lze odhadnout projekci ekvatoreální rotační rychlosti: $V_\mathrm{e} \sin i$ = 33 km s^{-1}. Hvězdy hlavní posloupnosti téže spektrální třídy mají poloměr R = 2,0 $\mathrm{R}_\odot$. a) Odvoďte obecný vztah mezi velikost ekvatoreální rotační rychlosti V_e v km/s, poloměrem hvězdy v $\mathrm{R}_\odot$ a periodou rotace P ve dnech. b) Co nyní soudíte o obou navržených periodách?

[a) $V_\mathrm{e} = 2\pi \dfrac{\mathrm{km\,s^{-1}}}{86400}\left(\dfrac{\mathrm{R}_\odot}{\mathrm{km}}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{P}\right)\left(\dfrac{R}{\mathrm{R}_\odot}\right) = 50{,}5788\ \mathrm{km\,s^{-1}}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{P}\right)\left(\dfrac{R}{\mathrm{R}_\odot}\right)$, b) pro P = 2,45 d je $\sin i$ = 0,8, pro P = 4,9 d ale vychází $\sin i$ = 1,6.]

3.18. Sestavte vztah pro tloušťku izotermické atmosféry H, v níž by vystupovaly základní charakteristiky hvězdy, tj. její hmotnost M, poloměr R a zářivý výkon L, vše v jednotkách slunečních, případně efektivní teplota T_{ef}. Předpokládejte, že i střední atomová hmotnost částic v atmosféře je stejná jako u Slunce. Aplikujte na některé známé případy hvězd.

[$H = 135\ \mathrm{km}\dfrac{R^2\,\mathrm{M}_\odot}{\mathrm{R}_\odot^2\,M}\dfrac{T}{5780\ \mathrm{K}} = 135\ \mathrm{km}\left(\dfrac{L}{\mathrm{L}_\odot}\right)^{1/4}\left(\dfrac{R}{\mathrm{R}_\odot}\right)^{3/2}\left(\dfrac{M}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{-1}$]

3.19. Vypočítejte a porovnejte a) únikovou rychlost atomu vodíku ve sluneční koróně se b) střední kvadratickou atomu, za předpokladu, že nás zajímá situace ve vzdálenosti 2 poloměrů hvězdy od středu, kde kinetická teplota koróny dosahuje 1,6 · 10^6 K. Co z toho plyne?

[(a) $v_\mathrm{ú} = \sqrt{\dfrac{(GM)_\odot}{\mathrm{R}_\odot}} = 4{,}37\cdot 10^5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; (b) $v_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_\mathrm{p}}} = 1{,}99\cdot 10^5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; v nižších vrstvách koróny nemají všechny atomy vodíku únikovou rychlost, nicméně řada z nich tuto rychlost mít bude, z koróny tak bude neustále unikat proud částic.]

3.20. Je vyšší ionizace a) atomů sodíku s ionizačním potenciálem χ_i = 5,14 eV a $Z_1/Z_0 \cong 0,5$, b) atomů železa s χ_i = 7,87 eV, $Z_1/Z_0 \cong 1,6$ v atmosféře červeného obra, kde předpokládáme efektivní teplotu 4 500 K a koncentraci volných elektronů $N_e = 2,5 \cdot 10^{17}$ m^{-3} nebo v atmosféře hvězdy hlavní posloupnosti o teplotě 5 200 K s elektronovou koncentrací $N_e = 4,4 \cdot 10^{18}$ m^{-3}. Diskutujte.

[a) pro hvězdu hlavní posloupnosti N_1/N_0 = 2100, pro obra N_1/N_0 = 5100, ionizace sodíku je v atmosféře obra vyšší; b) pro hvězdu hlavní posloupnosti je poměr počtu ionizovaných a neionizovaných atomů železa N_1/N_0 = 16, pro obra N_1/N_0 = 14, ionizace v atmosféře hvězdy hlavní posloupnosti je mírně vyšší.]

3.21. Na rovinnou homogenní vrstvu optické hloubky τ dopadá kolmo záření s hustotou zářivého toku Φ_0. Vypočítejte hustotu zářivého toku vystupujícího záření zanedbáme-li emisi záření ve vrstvě a optická hloubka vrstvy je a) τ = 0,1, b) τ = 1, c) τ = 10.

[$\mathrm{d}\Psi = -\kappa\rho\Psi\,\mathrm{d}r$, $\Psi = \Psi_0\,\mathrm{e}^{-\int\kappa\rho\,\mathrm{d}r} = \Psi_0\,\mathrm{e}^{-\tau}$, a) Ψ = 0,90 Φ_0, b) Ψ = 0,37 Φ_0, c) Ψ = 4,5 · 10^{-5} Φ_0.]

3.22. Odhadněte hmotnost atmosféry horké, hmotné hvězdy α Cam (M = 43 $M_\odot$, T_{ef} = 30 900 K, R = 27,6 $R_\odot$). Předpokládejte, že absorpce v atmosféře této hvězdy je způsobena pouze volnými elektrony a že atmosféra je složena pouze z vodíku. Předpokládejte, že atmosféra sahá do optickou hloubky τ =10. Diskutujte, porovnejte s hmotností atmosféry Slunce.

[$\tau = \int\limits_{\text{atmosféra}} \sigma N_e\,\mathrm{d}r = \sigma \int\limits_{\text{atmosféra}} N_e\,\mathrm{d}r$ $\rightarrow$ počet volných elektronů připadajících na jednotku plochy atmosféry je

$n_e = \dfrac{\tau}{\sigma}$ $\rightarrow$ $M_{atm} = 4\pi R^2 n_e m_H$, $M_{atm} = 1,2 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} = 0,2\,M_Z$, za předpokladu, že vzhledem k efektivní teplotě hvězdy je veškerý atmosférický vodík zcela ionizován.]

4 Vznik a vývoj hvězd

4.1. V okolí Slunce připadá jedna hvězda na 8 pc^3. Je-li střední hmotnost hvězd 0,35 $M_\odot$, vypočtěte střední hustotu hmoty v okolí Slunce a porovnejte ji se střední hustotou mezihvězdné látky v rovině Galaxie (10^6 atomů/m^3). Diskutujte.

[3.10^{-21} kg/m^3, jen dvakrát více (!)]

4.2. Co byste museli udělat se Sluncem, abyste jej zchladili z jeho současné průměrné teploty 7 milionů kelvinů na původní teplotu zárodečné mlhoviny?

[Museli byste do něj vpravit tolik energie, kolik se z něj vyzářilo v důsledku gravitačního smršťování]

4.3. Typického červeného obra si lze představit jako velice rozměrnou hvězdu o poloměru několika desítek $R_\odot$ a hmotnosti cca 1 $M_\odot$ a zhroucené, elektronově degenerované hvězdy o velikosti srovnatelné se Zemí a hmotností rovněž cca 1 $M_\odot$. Ukažte, že tlak v centru obra (a tím i jeho stav) na charakteristikách obalu prakticky nezávisí.

4.4. kolik by se ročně změnil poloměr Slunce, pokud ve Slunci neprobíhaly termonukleární reakce a výkon Slunce byl hrazen pouze z energie uvolňované pozvolným smršťováním. Využijte viriálový teorém.

[$E_\mathrm{p} \cong -\dfrac{3}{5}\dfrac{GM_\odot^2}{R_\odot}$, $\Delta E_\mathrm{p} = \dfrac{3}{5}\dfrac{GM_\odot^2}{R_\odot^2}\Delta R_\odot$, $L_\odot = -\dfrac{1}{2}\Delta E_\mathrm{p}$, $\Delta R_\odot = \dfrac{10}{3}\dfrac{L_\odot R_\odot^2}{GM_\odot^2}$, musel by se zmenšit ročně o 70 m = $1{,}1 \cdot 10^{-7}$ $R_\odot$.27 m = $3{,}8 \cdot 10^{-8}$ $R_\odot$.]

4.5. Jaká by byla na Zemi průměrná teplota na počátku vývoje sluneční soustavy za předpokladu, že by zemská atmosféra měla tytéž vlastnosti, jako v současnosti.

[-7° C oproti dnešním 18° C]

4.6. Za předpokladu, že ve Slunci všude panuje jeho střední teplota, tedy 7 milionů kelvinů, vypočtěte počet fotonů v objemu Slunce a porovnejte s počtem nukleonů.

[$9{,}8 \cdot 10^{54}$ fotonů, $1{,}2 \cdot 10^{57}$ nukleonů: 1:100]

4.7. Jestliže by ve Slunci byl zdrojem opacity jen k rozptyl, při němž se náhodně změní směr fotonu, a střední volná dráha l byla 1 mm, vypočtěte střední dobu τ, za níž by jeden takto trápený foton dokázal z centra doletět na povrch Slunce.

Návod – situaci můžete chápat jako Brownův pohyb, kde platí, že střední vzdálenost od místa počátku cesty takové částice je rovna $l\sqrt{N}$, kde N je počet jednotlivých skoků.

[$\tau = \dfrac{R_\odot^2}{l\,c}$, 50 000 let, ve skutečnosti je však doba „cesty jednoho kvanta“ řádově delší, neboť hlavním zdrojem opacity je fotoionizace, která je procesem mnohem zdlouhavějším.]

4.8. Při rychlé fázi hvězdné kontrakce na počátku jejich vývoje pozorujeme víceméně volný pád částic do centra tíže. a) Ukažte, že doba zhroucení kulového oblaku o hustotě ρ do bodu t_ff volným pádem, pokud by se síle gravitační nepostavila žádná jiná, je dána vztahem: $t_\mathrm{ff} \cong \sqrt{3\pi / 32\, G\rho}$.
b) Za jakou dobu by se za těchto podmínek zhroutilo do bodu naše Slunce s hustotou ρ = 1400

kg m^{-3}, c) Za jak dlouho se zhroutí oblak s typickou koncentrací cca 10^4 molekul vodíku v cm^3. d) Porovnejte tento čas s celkovou dobou aktivního života hvězdy (cca 10^{10} let).

[(a) Podle 3. Keplerova zákona $P^2 = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GM}$, kde $t_{\mathrm{ff}} = \dfrac{P}{2}$; $a = \dfrac{R}{2}$; $M = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$; (b) za 30 minut, (c) za cca 350 000 let, (d) 1/30 000.]

4.9. Během pomalé fáze hvězdné kontrakce je výkon hvězdy zhruba konstantní, zhruba takový, jaký hvězda má, „dosedne-li“ na hlavní posloupnost: $L \sim M^{3,5}$. Víte-li, že u hvězd hlavní posloupnosti závisí poloměr hvězdy R na hmotnosti takto: $R \sim M^{3/4}$, vypočtěte jak závisí délka trvání pomalé fáze hvězdné kontrakce τ na hmotnosti hvězdy. Vyjděte přitom z předpokladu, že τ se u hvězd sluneční hmotnosti odhaduje na 30 milionů let.

[$\tau \sim 3 \cdot 10^7$ let $M^{-9/4}$]

4.10. Jaká je minimální počáteční hmotnost hvězdy, která již prošla nebo právě prochází stadiem obra. Zdůvodněte.

[$\tau_{\mathrm{HP}} = 10^{10}\,\mathrm{let}\left(\dfrac{M}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{-2,6}$, při stáří vesmíru $13{,}7 \cdot 10^9$ let je $M_{\mathrm{min}} = 0{,}89\ \mathrm{M}_\odot$]

4.11. Jak starý by musel být vesmír, aby se v něm objevil první heliový bílý trpaslík vzniklý jako výsledek vývoje osamělé hvězdy. Je myslitelné, aby vznikl i dříve, a to jako výsledek vývoje těsné dvojhvězdy?

[alespoň 60 miliard let, ano]

4.12. Za předpokladu, že stavová rovnice elektronově degenerované látky, z níž je složena hvězda nebo její část, váže tlak a hustotu takto: $P \sim \rho^{5/3}$ a pro střední hodnotu tlaku ve hvězdě lze též psát $P \sim M^2 R^{-4}$, odvoďte závislost a) poloměru, b) střední hustoty degenerované hvězdy c) vazebné energie E_{P} a d) vnitřní teploty T na hmotnosti M.

[(a) $R \sim M^{-1/3}$, (b) $\rho \sim M^2$, (c) $E_{\mathrm{P}} \sim M^{7/3}$, (d) $T \sim M^{4/3}$]

4.13. Vysvětlete proč se v heliovém elektronově degenerovaném jádru zapálí heliové reakce přesáhne-li hmotnost jádra 0,4 $\mathrm{M}_\odot$?

[Nárůstem hmotnosti elektronově degenerovaného jádro se současně zmenšuje jeho poloměr. Nutně se v důsledku toho uvolňuje potenciální energie, která ovšem zůstává lapena v jádru a přispívá ke zvýšení kinetické teploty atomových jader, které se chovají jako ideální plyn. Teplota jádra, která rozhoduje o tom, zda se ve hvězdě heliové reakce rozhoří nebo ne, je tak funkcí hmotnosti jádra a 0,4 $\mathrm{M}_\odot$ je právě ona kritická hmotnost, kdy se tak stane.]

4.14. Hvězda τ Scorpii má efektivní teplotu 33 000 K a poloměr 5,5 $\mathrm{R}_\odot$. Určete s pomocí vývojového HR diagramu její hmotnost, ve které fázi svého vývoje se nachází?

[zhruba 20 $\mathrm{M}_\odot$, je to hvězda hlavní posloupnosti]

4.15. U horké hvězdy AzV 232, která se nachází v Malém Magellanově mračnu, bylo zjištěno zvláštní chemické složení. Obsah dusíku je dvojnásobný než v případě našeho Slunce, ale obsah uhlíku a kyslíku je zhruba desetkrát menší než na Slunci. Jak by jste vysvětlili chemické složení této hvězdy?

5 Závěrečná stadia vývoje hvězd

5.1. Kolik energie by se uvolnilo při jaderné přeměně uhlíku o hmotnosti 1,4 $M_\odot$ na železo. Porovnejte tuto energii s potenciální energií bílého trpaslíka o téže hmotnosti a poloměru odpovídajícímu poloměru 4 500 km. Je pravda, že by touto termonukleární detonací bylo možné zmíněného bílého trpaslíka rozmetat do prostoru?

[Kompletní fúzí uhlíku ${}_{12}C$ na železo ${}_{56}Fe$ s atomovou hmotností 55,9349 lze uvolnit $2{,}9 \cdot 10^{44}$ joulů, potenciální energii dotyčného bílého trpaslíka lze odhadnout na $1{,}0 \cdot 10^{44}$ joulů, „vyhození do povětří“ je možné.]

5.2. Spočtěte střední energii nerelativistických fermionů ε připadající na jeden fermion (předpokládejte, že se jedná o fermion s polovičním spinem) při nulové absolutní teplotě.

[Počet fermionů s velikostí hybnosti v intervalu (p, p+dp) je $\frac{8\pi p^2}{h^3}\mathrm{d}p$. Jejich energie je $\frac{p^2}{2m}$, střední energie $\frac{1}{N}\int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3}\frac{p^2}{2m}\mathrm{d}p = \frac{3}{10}\frac{p_F^2}{m} = \frac{3}{5}E_F$.]

5.3. Odvoďte vztah mezi únikovou rychlostí v_u z povrchu bílého trpaslíka a pozorovanou hodnotou gravitačního rudého posuvu vyjádřeného a) v bezrozměrných jednotkách z nebo b) ve formě „nadbytečné rychlosti“ V_n. c) Pro střední hodnotu V_n = 54 km s^{-1} vypočtěte hodnotu únikové rychlosti. Je tento postup aplikovatelný i pro neutronové hvězdy?

[(a, b) $v_u = c\,\sqrt{(2z)} = \sqrt{(2V_n\,c)}$, (c) v_u = 5700 km/s.]

5.4. Pro bílého trpaslíka s hmotností M a poloměrem R v jednotkách sluneční vypočítejte nejprve obecně střední hustotu ρ_s, gravitační zrychlení na povrchu g v jednotkách SI a nadbytečnou rychlost danou gravitačním červeným posuvem RV v km/s. Řešte pro Síria B: M = (1,034±0,026) $M_\odot$, R = (0,0084±0,00025) $R_\odot$ včetně odhadu nejistoty výsledku.

$$\rho_s = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3} = \frac{3}{4\pi}\frac{M_\odot}{R_\odot^3}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^3 = 1\,411\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^3;$$

$$[\,g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{M_\odot}{R_\odot^2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 = 274{,}35\ \mathrm{m\,s^{-2}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2;$$

$$RV = \frac{G}{c}\frac{M}{R} = \frac{G}{c}\frac{M_\odot}{R_\odot}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right) = 636{,}49\ \mathrm{m\,s^{-1}}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right).$$

ρ_s = (2,46±0,23) · 10^9 kg m^{-3}, g = (4,02±0,26) · 10^6 m s^{-2}, RV = (78,0±3,1) km s^{-1}]

5.5. Teoretickou závislost mezi poloměrem bílého trpaslíka R v km a jeho hmotností M v $M_\odot$ v intervalu 0,5 až 1,2 $M_\odot$ lze aproximovat přímkou: R = 12 900 – 7 350 M. Pozorovaný střední gravitační posuv pozorovaný u bílých trpaslíků typu DA činí 54 km/s. Vypočtěte z těchto předpokladů jaký je střední poloměr a střední hmotnost skupiny bílých trpaslíků typu DA.

[0,83 $M_\odot$, 6800 km]

5.6. Ukažte, že ve smršťující se hvězdě roste teplota degenerace rychleji než teplota nitra. Co z toho vyplývá?

[$T_s \sim M/R$, $T_{de} \sim M^{2/3}/R^2$; ve hvězdě se během kolapsu objeví elektronová degenerace, která je s to hroucení zastavit, pokud ovšem není tato degenerace ultrarelativistická.]

5.7. Jakou maximální rychlost může mít elektron po β-rozpadu neutronu. Jaká může být maximální energie uvolněného neutrina?

[nejvýše 92% *c*; $1{,}39 \cdot 10^{-30}$ kg = $1{,}53\ m_e$ = $1{,}25 \cdot 10^{-13}$ J = 0,78 MeV.]

5.8. Železo je prvek, v jehož jádru jsou nukleony nejtěsněji vázány. Efektivní poloměr jádra Fe^{56} je $5{,}6 \cdot 10^{-15}$ m. Porovnejte hustotu tohoto jádra s hustotou typické neutronové hvězdy o poloměru 14 km a s hmotností 1,3 $M_\odot$. Diskutujte.

[hustota jádra $1{,}3 \cdot 10^{17}$ kg/m^3, střední hustota neutronové hvězdy $2{,}2 \cdot 10^{17}$ kg/m^3

5.9. Neutronová hvězda je výsledkem kolapsu elektronově degenerovaného jádra hmotné hvězdy. Předpokládejte, že se při zhroucení poloměr objektu zmenší 400krát. Víte-li že neutronová hvězda se při vzniku otočí 100krát za sekundu a má magnetické pole o indukci 10^8 teslů, odhadněte minimální hodnoty těchto veličin v objektu, z něhož neutronová hvězda vznikla.

[600 T, P = 27 min.]

5.10. Ukažte, že pro malé hodnoty gravitačního červeného posuvu z relativistický vztah: $z = \left(1 - \dfrac{GM}{2c^2 r}\right)^{-1/2} - 1$, přechází na kvaziklasický: $z = \dfrac{GM}{c^2 r}$. Návod: použijte vhodného Taylorova rozvoje.

5.11. Odhadněte charakteristickou tloušťku atmosféry neutronové hvězdy tvořené ionizovaným vodíkem o teplotě 10^7 K. Hmotnost neutronové hvězdy nechť je 1,2 $M_\odot$, poloměr 12 km.

[0,15 m.]

5.12. Odhalte co nejvíce astrofyzikálních chyb a bludů v následujícím textu převzatém z časopisu *Kozmos* 1998, 5, str. 2. „Exotický pulzar“:

Ako neutrónové hviezdy vznikajú? Tieto objekty sú vlastne pozostatkami voľakedajších veľmi hmotných hviezd. Keď hviezda spáli svoje jadrové palivo, jej rovnováha sa naruší. Tlak žiarenia už nedokáže vyrovnávať tlak vrstiev ležiacich nad jadrom. Nastane kataklizmatický gravitačný kolaps, čo sa prejaví prudkým nárastom tlaku a teploty. Za takýchto podmienok sú jadrá v centrálnej oblasti natlačené tesne vedľa seba a zmršťovanie už nemôže ďalej pokračovať. Dôsledkom tejto evolúcie je napokon explózia, ktorá vymrští vonkajšiu obálku do okolitého priestoru.

Výbuchom nevyvrhnuté centrálne oblasti supernovy sa po explózii začnú opäť zmŕšťovať. Pri obrovskom tlaku sa začnú spájať elektróny s protónmi na neutróny. Pretože neutróny nemajú elektrický náboj, v zmršťujúcej sa hviezde sa nahromadia vedľa seba. Superhustá látka zastaví gravitačný kolaps a vznikne neutrónová hviezda.

5.13. Spočtěte ekvivalentní hustotu černé díry o hmotnosti 10^8 $M_\odot$.

[$\bar{\rho} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R_g^3}$, $\bar{\rho} = 1800$ kg m^{-3}]