

czech

Ústav fyzikální elektroniky PŘF MU

# F3100 Kmity, vlny, optika

příklady do cvičení

Jana Jurmanová, Zdeněk Navrátil, Luboš Poláček

Brno 2020



# Obsah

czech

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Kmity</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Vlastní netlumené kmity . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Skládání kmitů, Fourierova analýza . . . . .   | 14        |
| 1.3      | Tlumené kmity . . . . .  | 17        |
| 1.4      | Vynucené kmity . . . . .   | 20        |
| 1.5      | Spřažené oscilátory, struny, tyče . . . . .  | 22        |
| <b>2</b> | <b>Vlnění, akustika</b>  | <b>27</b> |
| 2.1      | Vlnění . . . . .   | 27        |
| 2.2      | Fázová a grupová rychlost . . . . .  | 29        |
| 2.3      | Vlnění a energie . . . . .   | 31        |
| 2.4      | Dopplerův princip . . . . .  | 32        |
| 2.5      | Hladina zvuku B . . . . .  | 33        |
| 2.6      | Elektromagnetické vlny . . . . .   | 34        |
| <b>3</b> | <b>Optika</b>  | <b>39</b> |
| 3.1      | Základní zákony šíření světla . . . . .  | 39        |
| 3.2      | Optické zobrazování . . . . .  | 45        |
| 3.3      | Interference . . . . .   | 50        |
| 3.4      | Ohyb . . . . .   | 55        |
| 3.5      | Šíření světla na rozhraní . . . . .  | 59        |
| <b>4</b> | <b>Matematický dodatek</b>   | <b>61</b> |
| 4.1      | Goniometrické funkce . . . . .   | 61        |
| 4.2      | Věty určující vztahy mezi rozměry stran a úhlů v trojúhelníku . . . . .                                  | 62        |
| 4.3      | Komplexní čísla . . . . .  | 63        |
| 4.4      | Exponenciální a logaritmické funkce . . . . .  | 63        |
| 4.5      | Hyperbolické funkce . . . . .  | 64        |
| 4.6      | Rozvoj funkcí v řadu . . . . .   | 65        |
| 4.7      | Diferenciál funkce jedné proměnné . . . . .  | 65        |
| 4.8      | Základy vektorového počtu – gradient, divergence, rotace, Laplaceův operátor . . . . .                   | 65        |
| 4.9      | Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty (a případnou pravou stranou) . . . . . | 66        |
|          | <b>Literatura</b>  | <b>67</b> |

V textu označuje symbol ✓ povinné příklady pro studenty kombinovaného studia, symbol ☺ příklady vhodné k doplňkovému procvičení.



# Kapitola 1

## Kmity

### 1.1 Vlastní netlumené kmity

#### Obecný případ harmonického pohybu

Pohybová rovnice je

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}, \quad (1.1)$$

kde  $m$  je hmotnost oscilátoru,  $\vec{F} = -k\vec{r}$  je elastická (harmonická, vratná) síla,  $k > 0$  tuhost elastické vazby. Oscilátor (hmotný bod) opisuje obecně eliptickou dráhu v prostoru.

#### Harmonický pohyb po přímce

Pohybuje-li se oscilátor, na který působí vratná síla, pouze v přímce, nazýváme jej lineární harmonický oscilátor. Pohybová rovnice lineárního harmonického oscilátoru, kmitajícího podél osy  $x$ , je

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (1.2)$$

Řešením této rovnice je časová závislost výchylky  $x$  kmitajícího hmotného bodu z rovnovážné polohy

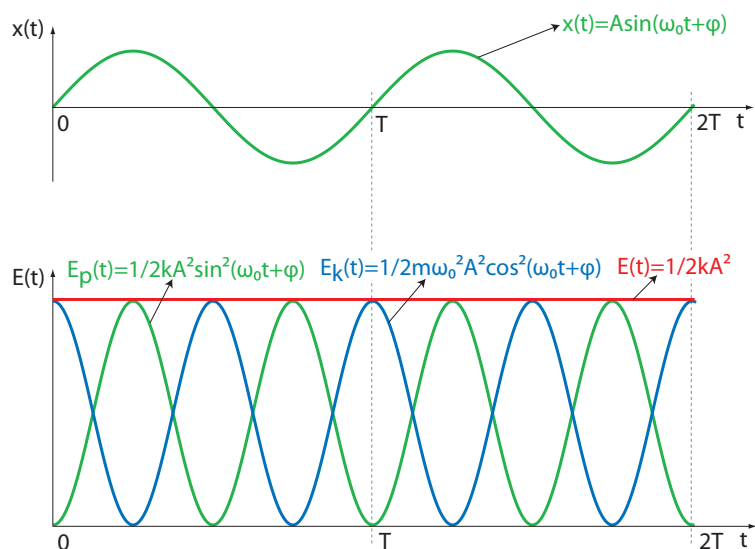
$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.3)$$

kde  $A$  je amplituda výchylky,  $t$  je čas,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je úhlová frekvence a  $\varphi$  je počáteční fáze harmonického pohybu.

#### Energie kmitů

Celková mechanická energie netlumených harmonických kmitů (viz obr. 1), daná součtem potenciální pružné energie a kinetické energie, je rovna

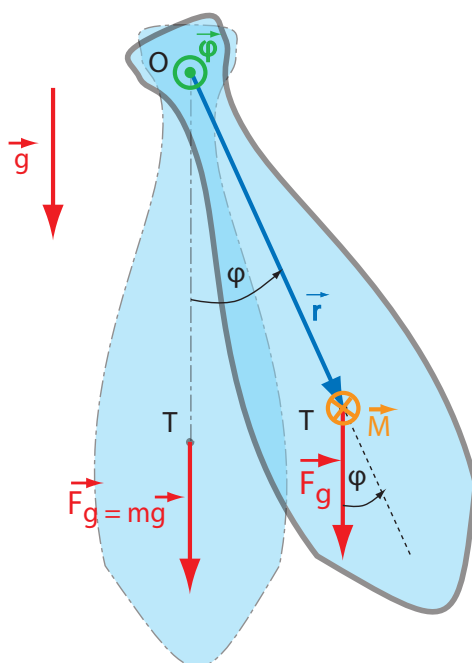
$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2. \quad (1.4)$$



Obrázek 1: Kinetická (modře), potenciální (zeleně) a celková energie (červeně) netlumených harmonických kmitů  $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ .

## Fyzické kyvadlo

Fyzické kyvadlo lze řešit například pomocí druhé momentové věty  $J \vec{\epsilon} = \vec{M}$ , kde  $\vec{M}$  je výsledný moment vnějších působících sil,  $J$  moment setrvačnosti k ose otáčení  $O$  a  $\vec{\epsilon} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$  je úhlové zrychlení.



Obrázek 2: Fyzické kyvadlo: zakreslena je gravitační síla, která jediná má nenulový moment, rameno této síly, směr tohoto momentu a směr úhlového výchylky.

Pohybová rovnice má pak tvar

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mg|OT|}{J_T + m|OT|^2} \sin \varphi = 0, \quad (1.5)$$

kde moment setrvačnosti k ose otáčení je podle Steinerovy věty  $J = J_T + m|OT|^2$ ,  $J_T$  je moment setrvačnosti vzhledem k těžišti.

V přiblížení malých kmitů ( $\sin \varphi \doteq \varphi$ ) získáme pro úhlovou výchylku z rovnovážné polohy  $\varphi$  řešení

$$\varphi(t) = \Phi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.6)$$

kde  $\Phi_0$  je amplituda úhlové výchylky,  $t$  je čas,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg|OT|}{J_T + m|OT|^2}}$  je úhlová frekvence a  $\varphi_0$  počáteční fáze harmonického pohybu.

Redukovaná délka fyzického kyvadla je délka matematického kyvadla (hmotný bod na nehmotném závěsu délky  $l^*$ ), které má stejnou periodu jako kyvadlo fyzické. Protože úhlová frekvence matematického kyvadla je rovna  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l^*}}$ , platí pro redukovanou délku  $l^*$

$$l^* = |OT| + \frac{J_T}{m|OT|}. \quad (1.7)$$

1. Napište pohybovou rovnici tělesa o hmotnosti  $m$ , na které působí síla pružnosti  $\vec{F} = (-kx, 0, 0)$ . Obecné řešení rovnice hledejte ve formě

- (a)  $e^{\lambda t}$ , kde  $\lambda$  je řešení charakteristické rovnice,
- (b) lineární kombinace funkcí sinus a kosinus,
- (c) funkce sinus s obecnou počáteční fází  $\varphi$ .

Ukažte, kdy jsou všechna řešení ekvivalentní.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

2. Napište pohybovou rovnici tělesa o hmotnosti  $m$  připojeného k pružině o tuhosti  $k$  a nenulové délce  $l$  v nezátíženém stavu. Předpokládejte, že těleso koná harmonický kmitavý pohyb

- (a) bez tření ve vodorovném směru,
- (b) ve svislém směru v tíhovém poli  $\vec{g}$ .

Řešte metodou nehomogenní rovnice. Určete úhlovou frekvenci a periodu vlastních kmitů.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

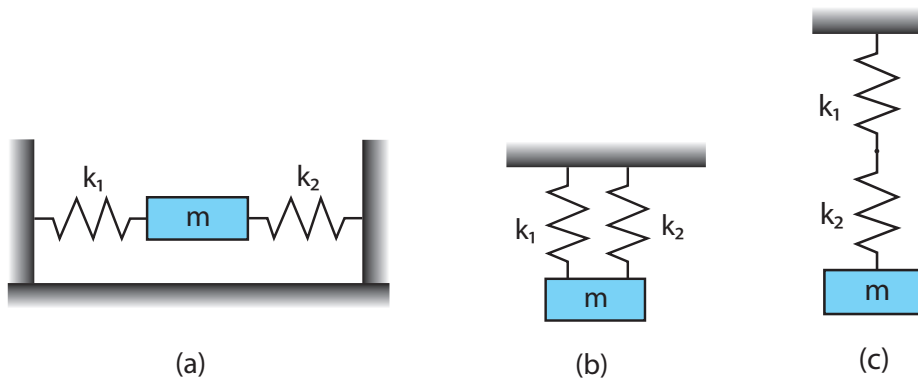
- ✓ 3. Částice koná lineární harmonický pohyb kolem bodu  $x = 0$  m. V čase  $t = 0$  s má nulovou rychlost a její výchylka je  $3,7 \cdot 10^{-3}$  m. Je-li frekvence pohybu  $f = 0,25 \text{ s}^{-1}$ , najděte

- (a) periodu  $T$ ,
- (b) úhlovou frekvenci  $\omega$ ,
- (c) amplitudu  $A$ ,
- (d) výchylku a rychlost v libovolném čase  $t$ ,
- (e) amplitudu rychlosti a amplitudu zrychlení.

Řešení: (a)  $T = 4$  s, (b)  $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$ , (c)  $A = 3,7 \cdot 10^{-3}$  m, (d)  $x(t) = 3,7 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$  m,  $v(t) = -1,85\pi \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$  m.s<sup>-1</sup>, (e)  $v_m = 1,85\pi \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ ,  $a_m = 9,25\pi^2 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ .

- ✓ 4. Určete amplitudu a počáteční fázi netlumeného harmonického pohybu po přímce. Hmotný bod měl v čase  $t = 0$  s výchylku  $x_0 = 5$  cm a rychlost  $v_0 = 20$  cm s<sup>-1</sup>, jeho frekvence byla  $f = 1$  s<sup>-1</sup>.  $A = 5,93$  cm,  $x(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi) : \varphi = 57^\circ 31'$ ;  $x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi) : \varphi = 32^\circ 29'$

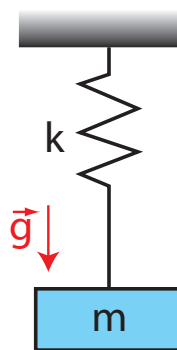
5. V čase  $t = 0$  s je výchylka částice rovna  $x_0 = 4,3$  cm a rychlost částice  $v_0 = 3,2$  m s<sup>-1</sup>. Hmotnost částice je  $m = 4$  kg a celková energie částice je  $E = 79,5$  J. Napište vztah pro závislost výchylky částice na čase a vypočítejte dráhu částice za dobu 0,4 s od začátku pohybu.  
 $x = 0,05 \cos(126,1t - \frac{\pi}{6})$  m,  $s = 1,6$  m
- ✓6. Určete periodu malých podélných kmitů tělesa o hmotnosti  $m$  v soustavách znázorněných na obr. 3. Tuhosti nehmotných pružin jsou  $k_1$  a  $k_2$ , těleso považujte za hmotný bod.



Obrázek 3: Paralelní (a,b) a sériové (c) zapojení pružin

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ (a, b) } k = k_1 + k_2, \text{ (c) } \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

7. Dvě kuličky o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  jsou navzájem spojeny pružinou s koeficientem tuhosti  $k$ . Určete periodu malých kmitů kuliček vzhledem k hmotnému středu soustavy.  
 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$
- ✓8. K nehmotné pružině o tuhosti  $k = 50$  Nm<sup>-1</sup> je přivázána nit, na které visí závaží o hmotnosti 1 kg (obr. 4). O jakou vzdálenost lze posunout závaží směrem dolů, aby po jeho uvolnění vznikly kmity, v jejichž průběhu by bylo vlákno stále napjaté?  
 $x \leq \frac{mg}{k} = 19,6$  cm



Obrázek 4: Těleso visící na niti

9. Těleso leží na desce vykonávající harmonický pohyb  $x(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi)$  s frekvencí  $f$ . Koeficient statického tření mezi tělesem a deskou je  $\mu = 0,5$ . Určete:
- (a) Jak velká smí být nejvýše amplituda kmitů desky, aby těleso po desce neklouzalo, je-li frekvence kmitů  $f = 2$  s<sup>-1</sup> a deska koná kmitavý pohyb v horizontální rovině?



- (b) Deska koná harmonický pohyb ve směru vertikálním s amplitudou  $A = 5 \text{ cm}$ . Jaká může být nejvyšší frekvence  $f$ , při níž ještě těleso neodskočí od desky?
- (c) Deska koná pohyb ve vertikálním směru s amplitudou  $A = 5 \text{ cm}$  a frekvencí  $f = \frac{10}{\pi} \text{ s}^{-1}$ . Těleso je na desku položeno v její nejnižší poloze. Ve kterém bodě opustí těleso desku a jak vysoko těleso vyletí?

Řešení:

(a)  $A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = 31 \text{ mm}$

(b)  $f \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 2,23 \text{ s}^{-1}$

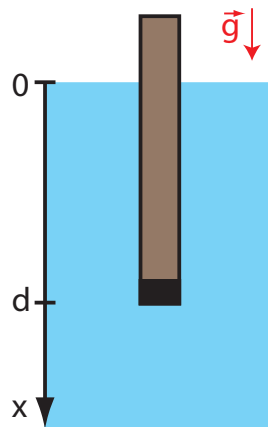
(c)  $x = \frac{g}{\omega^2} = 24,52 \text{ mm}$  nad rovnovážnou polohou,  $h \doteq 2 \text{ mm}$  nad místo odpojení

- ✓ 10. V U-trubici je homogenní kapalina. Pomocí pístu umístěného v jednom rameni U-trubice posuneme kapalinové těleso o vzdálenost  $x$ . Ukažte, že po uvolnění pístu začne kapalina vykonávat jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Celková délka kapalinového sloupce v trubici je  $L$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

11. Dřevěný válcový kůl je na jednom konci zatížen olovem, takže může plavat ve svislé poloze (obr. 5). Kůl uvedeme do kmitavého pohybu ve svislém směru. Ukažte, že může konat jednoduché harmonické kmity a určete jejich periodu. Neberte v úvahu, že dochází ke tlumení kmitů.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$



Obrázek 5: Plovoucí kůl.

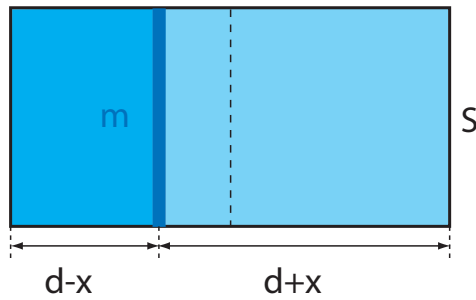
- ✓ 12. V uzavřeném válci naplněném vzduchem je píst o hmotnosti  $m$ , který rozděljuje válec na dvě stejné části délky  $d$ . Tlak vzduchu v obou částech je  $p_0$ . Píst nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy o vzdálenost  $x$  a potom uvolníme (viz obr. 6). Píst začne vykonávat kmitavý pohyb. Vypočítejte periodu kmitů za předpokladu, že děj v plynu můžeme považovat za

(a) izotermický,

(b) adiabatický s konstantou  $\kappa$ .

$$(a) T = 2\pi \sqrt{\frac{md}{2p_0S}}, (b) T = 2\pi \sqrt{\frac{md}{2\kappa p_0S}}$$

13. Odvoďte vztah pro potenciální energii tělesa o hmotnosti  $m$



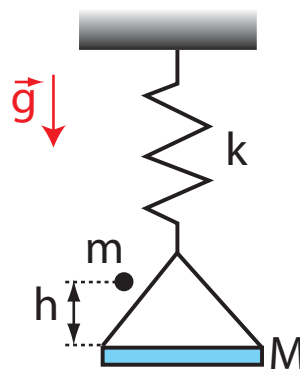
Obrázek 6: Píst ve válci.

- (a) v tíhovém poli popsaném konstantním zrychlením  $g$ ,  
 (b) podrobeného síle pružnosti  $F = -kx$ ,  
 (c) při současné splnění (a) a (b). Ukažte, že pro celkovou potenciální energii oscilátoru v tíhovém poli dostaneme stejný výsledek jako v (b), pokud  $x$  má význam výchylky z nové rovnovážné polohy v tíhovém poli.

$$(a) E_{p-t} = mgh, (b) E_{p-p} = \frac{1}{2}kx^2$$

- ✓ 14. Na misku o hmotnosti  $M$  zavěšenou na pružině s tuhostí  $k$  dopadne z výšky  $h$  kulička o hmotnosti  $m$  a zůstane na misce ležet (viz obr. 7). Tento systém začne vykonávat kmitavý pohyb. Najděte amplitudu kmitů soustavy.

$$A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh}{k(m+M)}}$$

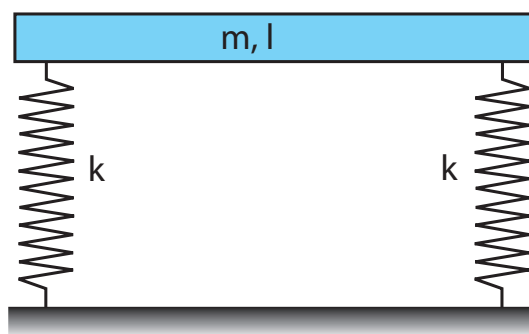


Obrázek 7: Pružinové váhy

15. Kostka o hmotnosti  $M = 8 \text{ kg}$  je zavěšena na pružině o tuhosti  $k = 3 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$ . Do kostky je zespolu vstřelena rychlostí  $v_0 = 500 \text{ ms}^{-1}$  kulka o hmotnosti  $m = 10 \text{ g}$ . Kulka uvázne v kostce.
- (a) Určete amplitudu jednoduchých harmonických kmitů, které začne soustava konat.  
 (b) Jakou část původní kinetické energie kulky přibližně tvoří celková energie kmitající soustavy?

$$(a) A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{g^2(m+M)}} = 0,032 \text{ m}, (b) \frac{E}{E_0} \doteq \frac{m}{m+M} = 0,125 \% \left( \frac{kv_0^2}{g^2(m+M)} \gg 1 \right)$$

16. Homogenní tyč o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  (obr. 8) je na obou koncích podložena dvěma stejnými pružinami o tuhosti  $k$ . Tyč uvedeme do pohybu tak, že ji na jednom konci stlačíme o určitou vzdálenost a vzápětí uvolníme. Řešte pohyb tyče za předpokladu, že neexistuje tlumení.



Obrázek 8: Tyč na dvou pružinách

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

✓ 17. Napište pohybovou rovnici a určete úhlovou frekvenci fyzického kyvadla (těleso o hmotnosti  $m$  otáčející se kolem osy neprocházející těžištěm). Tutíž úlohu řešte

- (a) pomocí momentové formulace druhého Newtonova zákona,
- (b) derivováním zákona zachování mechanické energie,
- (c) Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu.

Použité postupy aplikujte i na pohyb matematického kyvadla (hmotný bod na nehmotném závěsu).

Řešení: Pro fyzické kyvadlo obdržíme rovnici  $J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgd \sin \varphi = 0$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení,  $d$  je vzdálenost těžiště od osy otáčení,  $g$  je tíhové zrychlení a  $\varphi$  je úhel určující výchylku z rovnovážné polohy. Uvažujeme-li malé kmity ( $\sin \varphi \doteq \varphi$ ), je úhlová frekvence  $\omega = \sqrt{mgd/J}$ . Uvažujeme-li o matematickém kyvadle jako o speciálním případě fyzického kyvadla s momentem setrvačnosti  $J = md^2$ , je úhlová frekvence  $\omega = \sqrt{g/d}$ .

18. V kabině letadla kmitá matematické kyvadlo délky  $l = 0,5$  m. Určete periodu jeho kmitů, koná-li letadlo pohyb

- (a) rovnoměrný přímočarý,
- (b) vodorovný se zrychlením  $a = 2,5 \text{ ms}^{-2}$ ,
- (c) klouže-li pod úhlem  $\alpha = 15^\circ$  vzhledem k horizontální rovině.

Řešení:

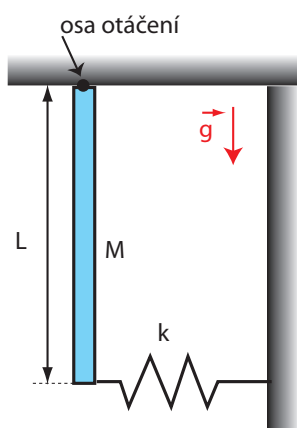
$$(a) T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 1,42 \text{ s}$$

$$(b) T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2}{g^2 + a^2}} = 1,40 \text{ s}$$

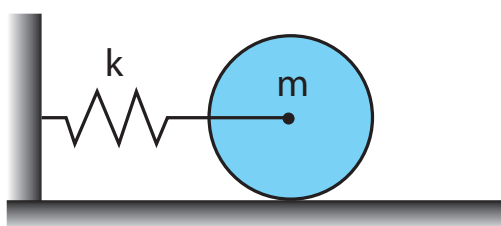
$$(c) T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} = 1,44 \text{ s}$$

✓ 19. Homogenní tenká tyč o hmotnosti  $M$  a délce  $L$  je připevněna ke stropu tak, že se může volně otáčet bez tření kolem osy O (viz obr. 9). Tyč je kromě toho připevněna ke stěně pomocí pružiny o tuhosti  $k$ . Určete periodu kmitů tyče.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{ML}{Mg + 2kL}}$$



Obrázek 9: Kyvadlo s pružinou



Obrázek 10: Neprosmykující válec

20. Na vodorovné pružině zanedbatelné hmotnosti je připevněn tuhý válec o hmotnosti  $m$ , který se může valit bez klouzání po vodorovné rovině (viz obr. 10). Tuhost pružiny je  $k = 3,0 \text{ Nm}^{-1}$ . Válec vychýlíme z rovnovážné polohy o  $d = 0,25 \text{ m}$  a uvolníme jej.

- Vypočtete kinetickou energii rotačního a translačního pohybu válce při průchodu rovnovážnou polohou.
- Ukažte, že střed hmotnosti válce koná jednoduchý harmonický pohyb s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

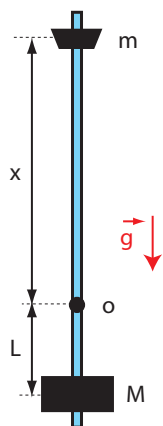
$$(a) E_{tr}(0) = \frac{1}{3}kd^2 = 0,0625 \text{ J}, E_{rot}(0) = \frac{1}{6}kd^2 = 0,0313 \text{ J}$$

21. Homogenní tyč délky  $L$  kývá kolem vodorovné osy, kolmé k tyči. Určete, pro jakou vzdálenost  $d$  osy otáčení od hmotného středu tyče je perioda kmitů tohoto fyzického kyvadla minimální.  
 $d = \frac{L}{\sqrt{12}}$

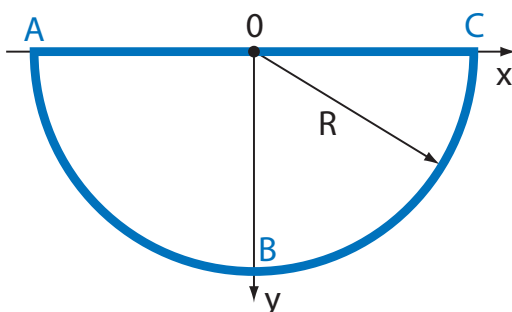
✓ 22. Kyvadlo metronomu je lehká tyčinka, na jejímž konci je ve vzdálenosti  $L$  od osy otáčení umístěno tělísko o hmotnosti  $M$ . Na druhém konci kyvadla je ve vzdálenosti  $x$  od osy umístěno posuvné tělísko o hmotnosti  $m$ , pomocí kterého lze měnit frekvenci kyvadla (viz obr. 11). Najděte vztah pro úhlovou frekvenci metronomu za předpokladu, že hmotnosti tělísek  $M$  a  $m$  jsou bodové a hmotnost tyčinky je zanedbatelná.

$$\omega = \sqrt{\frac{g(ML - mx)}{ML^2 + mx^2}}$$

⊙ 23. Homogenní válcový kotouč o poloměru podstavky  $R$  a o hmotnosti  $M$  je otáčivý kolem vodorovné osy, která prochází středem kotouče kolmo na rovinu podstavky. Na obvod kotouče při-



Obrázek 11: Metronom



Obrázek 12: Drátěná kostra

pevníme tělísko o hmotnosti  $m$ , které považujeme za hmotný bod. Kotouč s tělískem vytvoří fyzické kyvadlo. Určete:

- dobu kmitu tohoto fyzického kyvadla,
- redukovanou délku kyvadla.

Řešení:

$$(a) T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \frac{M+2m}{2m}}$$

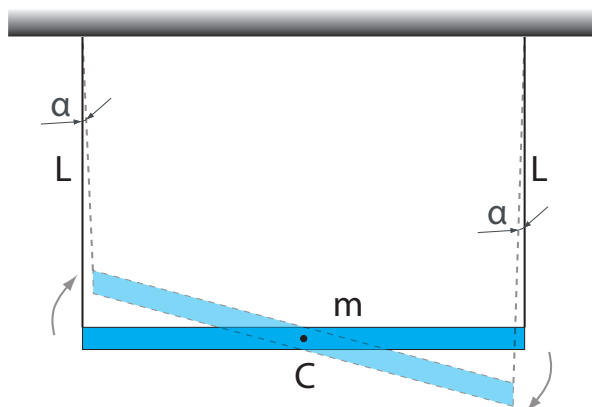
$$(b) l^* = \frac{M+2m}{2m} R$$

- ⊙24. Drátěná kostra z homogenního tuhého drátu s lineární hustotou  $\rho$  má tvar polokružnice (obr. 12). Průřez drátu je ve všech bodech stejný. Kostra je složena z polokružnice ABC o poloměru  $R = 0,25$  m a z přímé části AC. V polovině části AC je kostra zavěšena na ose O a může se kolem ní otáčet bez tření. Jak velká bude perioda kmitů tohoto tělesa?

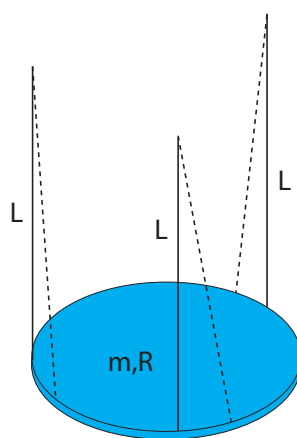
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2+3\pi}{6} \frac{R}{g}} = 1,38 \text{ s}$$

- ⊙25. Homogenní tyč o hmotnosti  $m = 1,5$  kg, visící na dvou vláknech délky  $L = 90$  cm (obr. 13) byla pootočena o malý úhel kolem osy, procházející jejím středem C. Přitom se vlákna odklonila o úhel  $\alpha = 5^\circ$ . Po uvolnění začala tyč vykonávat malé kmity. Najděte:

- periodu kmitů tyče,



Obrázek 13: Zavěšená tyč



Obrázek 14: Zavěšený disk

(b) energii kmitavého pohybu tyče.

$$(a) T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}} = 1,1 \text{ s} \quad (b) E = \frac{3}{2}mgL\alpha^2 = 0,15 \text{ J}$$

©26. Vypočtete periodu torzních kmitů tenkého disku hmotnosti  $m$  a poloměru  $R$ , který je zavěšen na třech rovnoběžných stejně dlouhých nitích délky  $L$  (obr. 14).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

## 1.2 Skládání kmitů, Fourierova analýza

### Skládání stejnosměrných harmonických kmitů

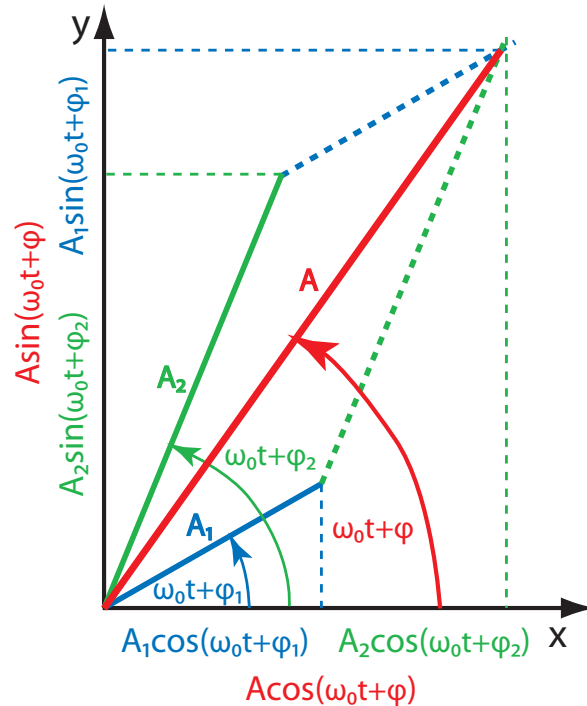
Složením  $n$  stejnosměrných izochronních harmonických kmitů (tj. kmitů se stejnou frekvencí  $\omega_0$ , které probíhají po téže přímce)

$$x_i(t) = A_i \sin(\omega_0 t + \varphi_i) \quad (1.8)$$

vznikne opět harmonický pohyb se stejnou frekvencí

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.9)$$

Amplitudu  $A$  a počáteční fázi  $\varphi$  výsledného pohybu určíme ze vztahů



Obrázek 15: Fázorový diagram

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i \right)^2, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i}. \quad (1.11)$$

Vztahy (1.10) a (1.11) lze snadno odvodit například z fázorového diagramu (obr. 15).

### Skládání kolmých harmonických kmitů

Složením dvou izochronních harmonických kmitů v navzájem kolmých směrech

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t), \quad y(t) = B \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.12)$$

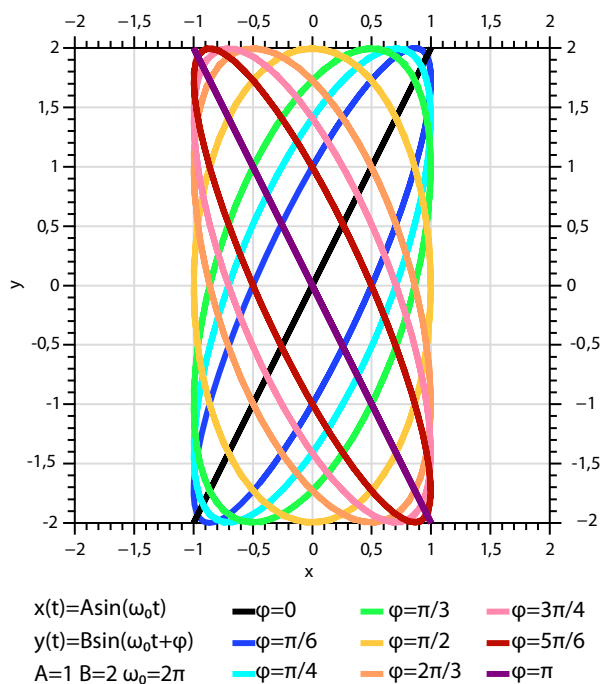
vznikne pohyb s trajektorií ve tvaru elipsy (viz obr. 16)

$$\left( \frac{x}{A} \right)^2 + \left( \frac{y}{B} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{A} \right) \left( \frac{y}{B} \right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (1.13)$$

### Rozklad periodických kmitů na harmonické složky (Fourierova analýza)

Každý periodický pohyb popsáný po částech spojitou periodickou funkcí  $f(t)$  o periodě  $T$  lze rozložit do Fourierovy řady

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(m\omega t) + B_m \sin(m\omega t)], \quad (1.14)$$



Obrázek 16: Skládání kolmých kmitů

ve které  $\omega = 2\pi/T$  je základní úhlová frekvence. Její celistvé násobky  $m\omega$  nazýváme vyšší harmonické frekvence. Koeficienty řady  $A_m$  a  $B_m$  lze stanovit ze vzorců

$$A_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega t) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

$$B_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega t) dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.16)$$

- ✓ 27. Odvoďte obecný vztah pro výslednou amplitudu a fázový posuv kmitání, které vznikne složením dvou stejnosměrných kmitů o stejné frekvenci, amplitudách  $A_1$  a  $A_2$  a počátečních fázích  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ .

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

28. Určete amplitudu výsledného harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných kmitavých pohybů se stejnou periodou a amplitudami 3 a 5 cm. Rozdíl jejich fází je  $60^\circ$ .  
 $A = 7 \text{ cm}$

29. Jaký pohyb vznikne superpozicí dvou stejnosměrných harmonických kmitů se stejnými úhlovými frekvencemi  $\omega_0$ , jsou-li amplitudy jednotlivých kmitů  $A_1 = 1 \text{ cm}$  a  $A_2 = 10 \text{ cm}$ ? Příslušné počáteční fáze jsou  $\varphi_1 = 30^\circ$  a  $\varphi_2 = 60^\circ$ .

Řešení: Harmonický,  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $A = 10,9 \text{ cm}$ ,  $\text{tg } \varphi = 1,56$ ,  $\varphi = 57^\circ 36'$ .

30. Hmotný bod koná v jednom směru dva kmitavé pohyby, které mohou být popsány závislostmi  $x_1 = A \cos(\omega_0 t)$ ,  $x_2 = A \cos(2\omega_0 t)$ . Určete maximální rychlost tohoto bodu.  $v_{\max} = 2,7 A \omega_0$



✓ 31. Najděte obecnou rovnici trajektorie pohybu, který vznikne superpozicí dvou navzájem kolmých izochronních harmonických kmitů  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$ ,  $y(t) = B \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$ , jsou-li jejich počáteční fáze  $\varphi_1, \varphi_2$ :

- (a)  $\varphi_1 \neq \varphi_2$
- (b)  $\varphi_1 = \varphi_2$  anebo  $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$
- (c)  $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$

Řešení:

(a) Rovnice výsledné dráhy je rovnice elipsy

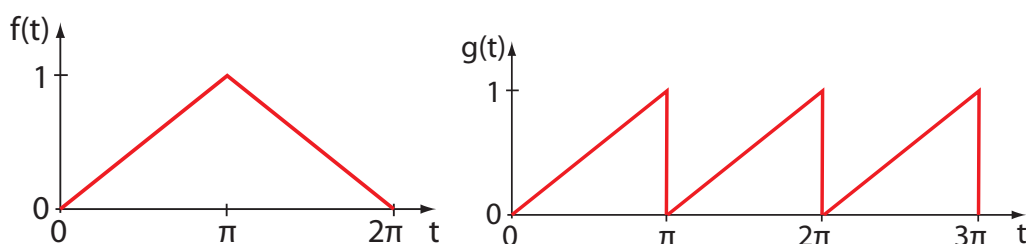
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

(b) Harmonický pohyb po přímce  $y = \frac{B}{A}x$  anebo  $y = -\frac{B}{A}x$ .

(c) Pro  $A = B$  harmonický pohyb po kružnici o poloměru  $A$ :  $x^2 + y^2 = A^2$ , pro  $A \neq B$  harmonický pohyb po elipse  $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$ .

⊙ 32. Najděte dráhu výsledného pohybu, který vznikne složením dvou navzájem kolmých kmitavých pohybů se stejnými amplitudami 5 cm a se stejnými periodami, jestliže jejich fázový rozdíl je  $\frac{\pi}{2}$ . *Dráhou výsledného pohybu je kružnice o poloměru 5 cm se středem  $S [0,0]$ .*

✓ 33. Pomocí Fourierovy analýzy rozložte funkce  $f(t)$  a  $g(t)$  znázorněné na obr. 17. V případě funkce  $f(t)$  je znázorněna pouze jedna perioda.



Obrázek 17: Trojúhelníkové a pilové kmity

Řešení:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)t]$$

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2nt)$$

### 1.3 Tlumené kmity

Je-li tlumící síla realizována odporem prostředí závislým na první mocnině rychlosti

$$F_o = -2m\gamma \frac{dx}{dt}, \tag{1.17}$$

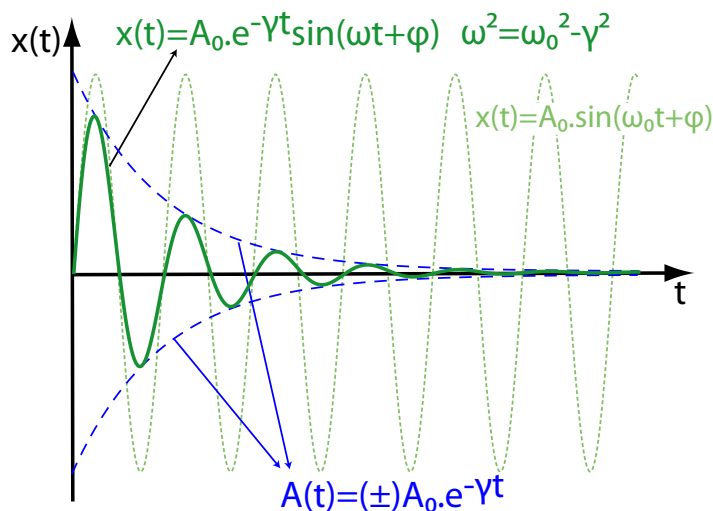
Lze pohybovou rovnici tlumených kmitů vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.18}$$

Konstanta  $\gamma > 0$  se nazývá koeficient útlumu,  $\omega_0$  je úhlová frekvence vlastních netlumených kmitů. Řešení této pohybové rovnice je v případě slabého útlumu

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.19)$$

ve kterém  $A_0$  je amplituda tlumených harmonických kmitů v čase  $t_0 = 0$  a  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  jejich úhlová frekvence.



Obrázek 18: Časový vývoj výchylky kmitů tlumených silou lineárně závislou na rychlosti

**Útlum**  $\Lambda$  je dán poměrem dvou po sobě následujících výchylek na tutéž stranu

$$\Lambda = e^{\gamma T}. \quad (1.20)$$

**Logaritmický dekrement útlumu**  $\delta$  je přirozený logaritmus útlumu

$$\delta = \ln \Lambda = \gamma T. \quad (1.21)$$

**Činitel jakosti**  $Q$  tlumeného harmonického oscilátoru je bezrozměrnou veličinou

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma}. \quad (1.22)$$

**Mechanická energie tlumeného harmonického oscilátoru**  $E_{tl}$  se s časem zmenšuje, přičemž v rámci periody je vlivem proměnné rychlosti oscilátoru disipace energie nerovnoměrná (viz obr. 19). Pro mechanickou energii kmitání popsaného rovnicí 1.19 lze odvodit vztah

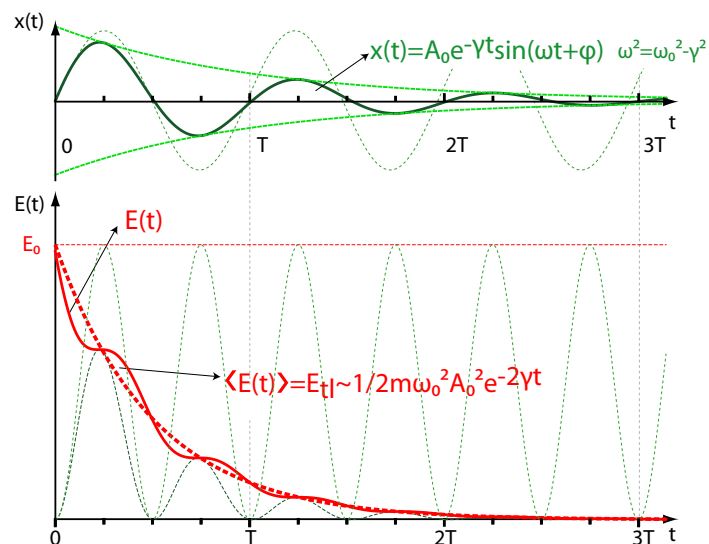
$$E_{tl}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \right) \cos(2(\omega t + \varphi)) - \left( \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2} \right) \sin(2(\omega t + \varphi)) \right].$$

Zanedbáme-li kolísání ztrát mechanické energie v rámci periody, zmenšuje se mechanická energie podle vztahu

$$E_{tl}(t) = E_0 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t}. \quad (1.23)$$

34. Kulička je zavěšena na pružině a ponořena do kapaliny. Nalezněte hodnotu tuhosti pružiny, pro kterou dochází ke kritickému tlumení kmitů.

$$k = \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{m}, \text{ kde } \eta \text{ je viskozita kapaliny, } r \text{ poloměr kuličky, } m \text{ její hmotnost.}$$

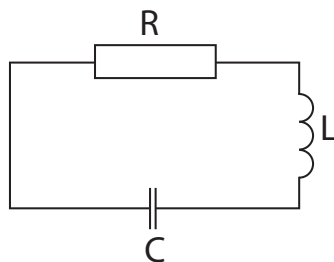


Obrázek 19: Výchylka a mechanická energie tlumených kmitů.

35. Jaký je logaritmický dekrement útlumu tlumeného harmonického pohybu, který koná hmotný bod, jestliže za 10 s trvání pohybu ztratí hmotný bod 50% své mechanické energie? Jaký je činitel jakosti  $Q$  tohoto tlumeného oscilátoru? Perioda tlumeného pohybu je  $T = 2$  s.  
 $\delta = 0,0693$ ,  $Q = 45,3$
36. Při pozorování tlumeného harmonického pohybu bylo zjištěno, že po dvou po sobě následujících výchylkách na tutéž stranu se amplituda kmitů zmenšila tak, že její nová hodnota byla 0,6 násobkem hodnoty výchozí a že perioda tlumených kmitů je  $T = 0,5$  s. Určete:
- konstantu útlumu a činitel jakosti tohoto oscilátoru,
  - frekvenci *netlumených* kmitů, které by mohly probíhat za jinak stejných podmínek.

$$(a) \gamma = 1,02 \text{ s}^{-1}, Q = 6,15, (b) f_0 = 2,01 \text{ s}^{-1}$$

- ✓ 37. Počáteční amplituda kmitavého pohybu kyvadla je  $A_0 = 3$  cm. Za dobu  $t_1 = 10$  s je amplituda již jen  $A_1 = 1$  cm. Za jak dlouho bude amplituda  $A_2 = 0,3$  cm?  $t_2 = t_1 \frac{\ln A_0 - \ln A_2}{\ln A_0 - \ln A_1} = 20,96$  s
38. Kondenzátor o kapacitě  $C = 0,025 \mu\text{F}$ , který je nabit na potenciální rozdíl  $U = 20$  V, je vybíjen přes vodič o indukčnosti  $L = 4 \mu\text{H}$ . Odpor obvodu je  $R = 1 \Omega$ . Vypočtete kruhovou frekvenci vlastních kmitů obvodu a jeho logaritmický dekrement útlumu (viz obr. 20).



Obrázek 20: RLC obvod

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 3,16 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \delta = \frac{\pi R}{\omega L} = 0,249$$

## 1.4 Vynucené kmity

Působí-li na tlumený harmonický oscilátor vnější harmonická síla  $F_v = F_0 \sin \Omega t$ , kde  $F_0$  je její amplituda a  $\Omega$  úhlová frekvence, bude oscilátor vykonávat tzv. vynucené kmity. Pohybová rovnice získá tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t. \quad (1.24)$$

Obecným řešením této nehomogenní diferenciální rovnice je superpozice vlastních tlumených kmitů a kmitů vynucených

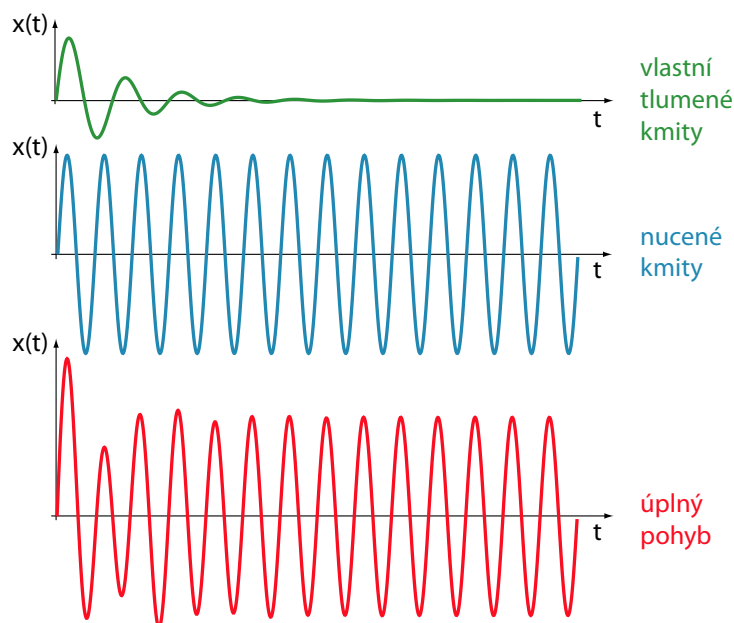
$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A_v \sin(\Omega t + \psi). \quad (1.25)$$

Amplituda vynucených kmitů  $A_v$  je dána vztahem

$$A_v = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}, \quad (1.26)$$

ve kterém  $\omega_0$  a  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  jsou opět úhlové frekvence vlastních netlumených a tlumených kmitů. Po utlumení vlastních kmitů se výchylka oscilátoru ustálí ve tvaru (viz obr. 21)

$$x(t) = A_v \sin(\Omega t + \psi). \quad (1.27)$$

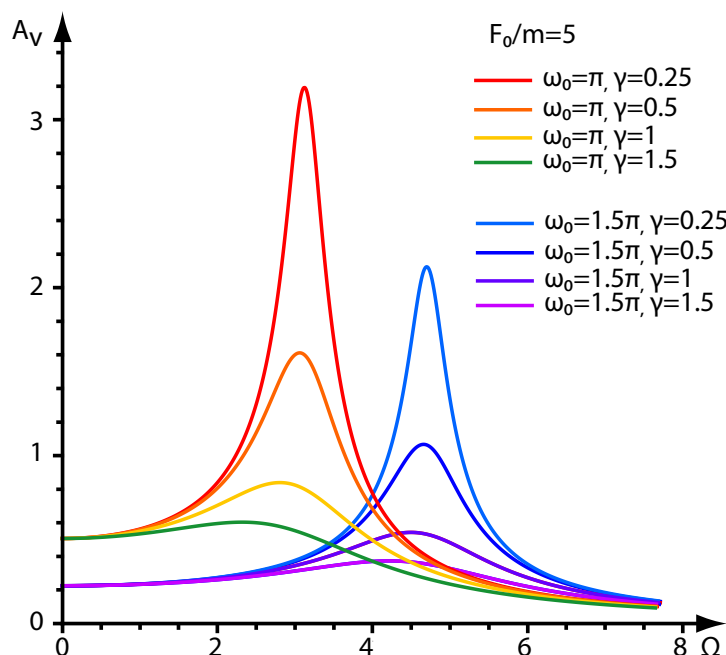


Obrázek 21: Výsledný pohyb jako superpozice vlastních tlumených a vynucených kmitů.

### Amplitudová rezonance

Závislost  $A_v(\Omega)$  daná rovnicí (1.26) představuje rezonanční křivku (viz obr. 22). Křivka nabývá maxima  $A_r$  pro rezonanční úhlovou frekvenci  $\Omega_r$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad A_r = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (1.28)$$



Obrázek 22: Rezonanční křivky pro různé oscilátory

- ✓ 39. Odvod'te rovnice nuceného kmitání pro kuličku zavěšenou na pružině. Kulička je ponořena do kapaliny, a je tedy tlumena. Předpokládejte, že odporová síla je tvaru  $\vec{F}_{\text{odp}} = -6\pi\eta r\vec{v}$  (Stokesův vztah) a vynucující síla je harmonická,  $\vec{F}_v = F \sin \Omega t$ . Určete frekvenci a amplitudu vlastních i vynucených kmitů, odvod'te vztah (1.26). Pro jaké hodnoty parametrů soustavy dochází k rezonanci?

Řešení:  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{kap}}}{\rho_{\text{kul}}}\right) + \frac{F}{m} \sin \Omega t$ , kde  $\gamma = \frac{3\pi\eta r}{m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , frekvence vlastních kmitů je  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ , jejich amplituda  $Ae^{-\gamma t}$ , frekvence vynucených kmitů je  $\Omega$ , jejich amplituda je  $A_v = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$ , k rezonanci dojde pro frekvenci vynucující síly  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ .

40. Vlivem vnější vertikální síly  $F = F_0 \cos \Omega t$  koná těleso zavěšené na pružině stacionární vynucené kmity podle vztahu  $x = x_0 \cos(\Omega t - \Phi)$ . Určete práci síly  $F$ , vykonanou během jedné periody.  
 $A = \pi x_0 F_0 \sin \Phi$
41. Jaká je rezonanční amplituda a rezonanční frekvence hmotného bodu, který koná vynucené kmity, je-li hmotnost bodu  $m = 0,1 \text{ kg}$ , kruhová frekvence vlastních kmitů  $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ , koeficient útlumu  $\gamma = 3 \text{ s}^{-1}$  a amplituda vynucující síly  $F_0 = 10 \text{ N}$ ?  $A_r = 84,3 \text{ cm}$ ,  $\omega_r = 19,54 \text{ s}^{-1}$
42. Těleso o hmotnosti  $m = 0,2 \text{ kg}$  koná vynucené harmonické kmity působením sinusově proměnné síly, jejíž amplituda je  $F_0 = 2 \text{ N}$ . Určete rezonanční kruhovou frekvenci  $\omega_r$  a rezonanční amplitudu  $A_r$ , je-li doba vlastního kmitání tělesa  $T_0 = \frac{\pi}{4}$  a koeficient útlumu  $\gamma = 4 \text{ s}^{-1}$ .  
 $A_r = 0,18 \text{ m}$ ,  $\omega_r = 5,7 \text{ s}^{-1}$

## 1.5 Spřažené oscilátory, struny, tyče

**Spřažené oscilátory.** Nejméně dva oscilátory jsou spojeny vazbou, která může sloužit k vzájemnému předávání energie.

**Normální kmity.** Libovolný kmitavý pohyb soustavy spřažených oscilátorů lze vyjádřit jako superpozici normálních kmitů. Pro  $N$  spřažených oscilátorů existuje při lineárních kmitech  $N$  normálních frekvencí (módů). Při kmitání na jednom normálním módu nedochází k předávání energie mezi jednotlivými oscilátory.

**Kmity tyčí a strun.** Výchylka  $u(x,t)$  libovolného bodu  $x$  tyče (struny) délky  $L$  musí splňovat rovnici

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.29)$$

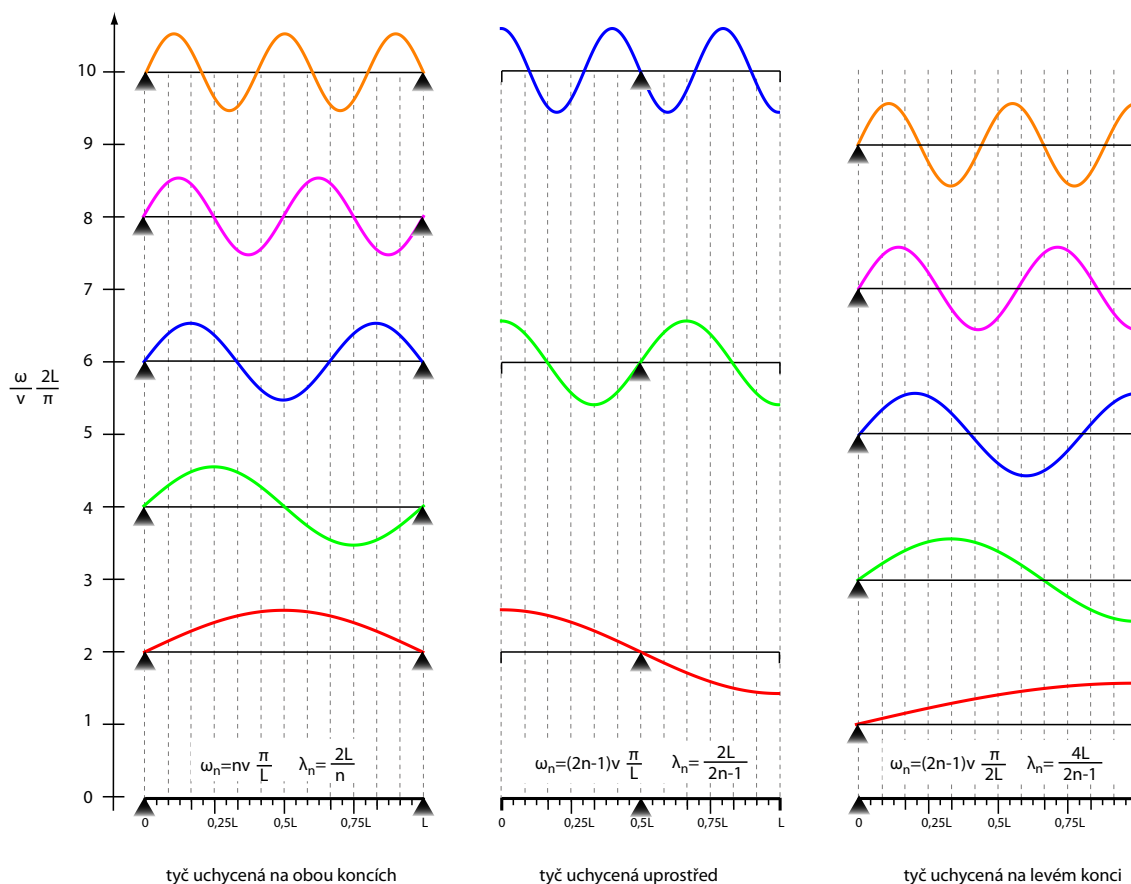
kde  $v$  je rychlost šíření zvuku v tyči (struně). Řešení je tvaru

$$u(x,t) = A \sin\left(\frac{\omega}{v}x + \varphi\right) \sin(\omega t + \psi), \quad (1.30)$$

kde  $\omega$  je vlastní frekvence kmitů,  $\varphi$  a  $\psi$  fázové konstanty,  $A$  je amplituda. Ze všech možných řešení (1.30) se vybírají takové kmitové módy, které splňují okrajové podmínky (zadaná výchylka a rychlost nejméně ve dvou bodech struny či tyče). Frekvence těchto módů  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  jsou svázány s příslušnou vlnovou délkou vztahem

$$\lambda_n = vT_n = v \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (1.31)$$

Pro strunu (tyč) s různým uchycením jsou kmitové módy zakresleny na obrázku 23.



Obrázek 23: Kmitové módy tyče při různých způsobech uchycení.

**Příčné kmity struny.** Rychlost šíření je dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (1.32)$$

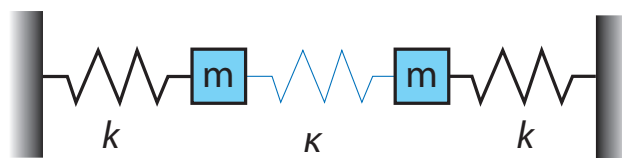
kde  $F$  je síla, napínající strunu, a  $\mu$  je hmotnost její jednotkové délky.

**Podélné kmity tyče.** Rychlost šíření je dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.33)$$

kde  $E$  je Youngův modul tyče a  $\rho$  její hustota.

- ✓43. Kmitající systém dvou těles o hmotnostech  $m$  je uspořádán podle obrázku 24. Předpokládejte, že pro tuhost pružin platí  $\kappa \ll k$ . Necht'  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  jsou výchylky těles z jejich rovnovážných poloh.



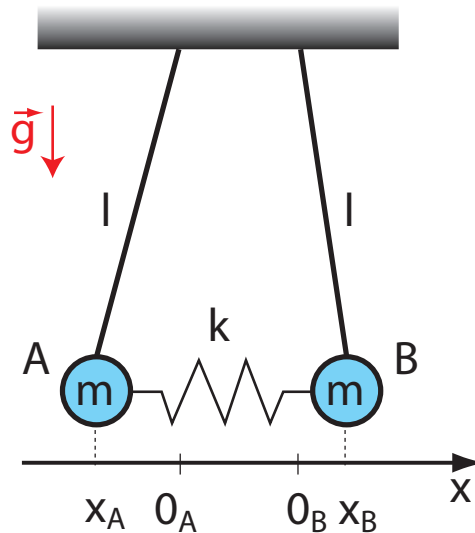
Obrázek 24: Dvě tělesa na pružinách spojená slabou vazbou.

- Napište pohybové rovnice pro obě tělesa.
  - Ukažte, že zavedením normálních souřadnic  $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$ ,  $\eta = \frac{x_1-x_2}{2}$  lze systém separovat na dvě nezávislé rovnice.
  - Najděte obecné řešení obou normálních módů  $\xi(t)$  a  $\eta(t)$ .
  - Najděte obecné řešení pohybu těles  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  a ukažte, že pro slabou vazbu dochází k výraznému přelévání energie.
44. Dvě stejná tělesa o hmotnosti  $m$  leží na hladkém stole a jsou navzájem spojena pružinou s tuhostí  $K$ . Obě tělesa rozkmitáme ve vodorovném směru. Jak se změní frekvence vlastních kmitů soustavy, připevníme-li jedno z těles ke stolu – viz obr. 25. *Frekvence se zmenší  $\sqrt{2}$  krát.*



Obrázek 25: Dvě tělesa na pružině

- ✓45. Napište pohybové rovnice pro kmity soustavy dvou sprzęžených kyvadel (viz obr. 26), určete kmitové módy soustavy.



Obrázek 26: Spřažená kyvadla

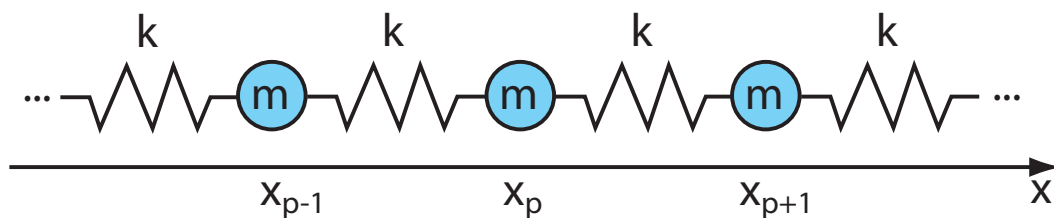
Řešení:

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x_A - k(x_A - x_B)$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x_B - k(x_B - x_A),$$

kde  $x_A$  ( $x_B$ ) značí výchylku kuličky A (B) z její rovnovážné polohy. Vlastní kmitové módy jsou  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $\omega' = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$

46. Odvod'te vztah pro okamžitou výchylku  $p$ -té kuličky systému na obr. 27, určete vlastní frekvence systému  $N$  kuliček a počet těchto kmitových módů (kmity se konají podél osy  $x$ ). Okrajová podmínka: nultá a  $N + 1$  kulička mají v libovolném čase nulovou výchylku.



Obrázek 27: Kuličky vázané pružinami

Řešení: Pohybová rovnice  $m \frac{d^2 x_p}{dt^2} = k(x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_p)$ , její řešení je tvaru  $x_p = A \sin(p\Theta + \Phi) \sin(\omega t + \varphi)$ , po aplikaci okrajových podmínek dostaneme pro výchylku  $x_p = A \sin(p \frac{n\pi}{N+1}) \sin(\omega_n t + \varphi)$  a pro vlastní frekvence vztahy  $\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , těchto frekvencí je nejvýše  $N$ .



✓47. Homogenní struna délky 2,5 m a hmotnosti 0,01 kg je napjata silou 10 N.

- Najděte frekvenci jejího nejnižšího módu.
- Jestliže strunu vychýlíme příčně a v místě vzdáleném 0,5 m od jednoho konce se jí dotkneme, jaká frekvence zní v tomto případě?

Řešení: Pro výchylku struny platí  $y(x,t) = A \sin\left(\frac{\omega_n x}{v}\right) \sin(\omega_n t)$ , kde  $\omega_n = n\omega_1$ ,  $\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{F}{ml}}$ , tedy (a)  $f_1 = 10\text{Hz}$ , (b)  $s = 5n$ , tedy jsou povoleny frekvence 50Hz, 100Hz, 150Hz...

48. Homogenní tyč je upevněna ve středu a oba její konce jsou volné.

- Najděte frekvence volných podélných kmitů tyče.
- Určete vlnovou délku pro  $n$ -tý mod těchto kmitů.
- Kde se nacházejí uzly pro  $n$ -tý mod těchto kmitů?

Tyč má délku  $L$ , je zhotovena z materiálu, jehož Youngův modul je  $E$  a hustota je  $\rho$ .

Řešení:

- $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
- $\lambda_n = \frac{2L}{2n-1}$
- $x_n = \frac{L}{2(2n-1)} (2n-1 \pm 2k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

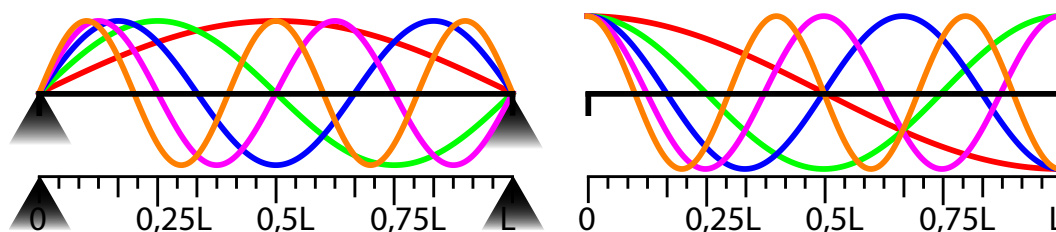
49. Homogenní tyč není upevněna a volně leží na drsném stole. Je rozezněna úderem kladiva ve směru délky tyče.

- Najděte frekvence volných podélných kmitů tyče.
- Určete vlnovou délku pro  $n$ -tý mod těchto kmitů.

Tyč má délku  $L$ , je zhotovena z materiálu, jehož Youngův modul je  $E$  a hustota je  $\rho$ .

Řešení: Taková tyč má volné okraje, okrajové podmínky tedy jsou  $u(0,t) = \pm A$  a  $u(L,t) = \pm A$ .

- $\omega_n = n\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
- $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ . Frekvence je stejná jako u tyče (struny) uchycené na obou koncích, ale rozložení uzlů je jiné - viz obr 28.



Obrázek 28: Vlastní frekvence tyče upnuté na koncích a volné na obou koncích

©50. Dvě stejné struny napjaté identickým napětím kmitají na základní frekvenci 100Hz. Jak se musí změnit napětí jedné struny, aby vznikly 4 rázy za sekundu? Při změně napětí se délka struny nezmění. *klesne 0,9216 krát*



# Kapitola 2

## Vlnění, akustika

### 2.1 Vlnění

Vlněním v látce nebo poli se nazývá šíření kmitavého rozruchu prostorem (látkou nebo polem).

**Vlnová rovnice** popisuje šíření netlumených vln s výchylkou  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  v prostoru:

$$\Delta \vec{u}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor a  $v$  rychlost, jakou se vlny šíří. Veličina  $u(\vec{r}, t)$  může být i skalární.

Pokud se vlnění šíří rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$ , má vlnová rovnice tvar

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

**Řešení vlnové rovnice** (2.2) je superpozicí vlny  $u_+(x, t)$  postupující v kladném směru osy  $x$  a vlny  $u_-(x, t)$  postupující v záporném směru osy  $x$ :

$$u(x, t) = c_+ u_+(x, t) + c_- u_-(x, t) = c_+ U_{0+} \sin(\omega t - kx) + c_- U_{0-} \sin(\omega t + kx), \quad (2.3)$$

kde  $v$  je tzv. fázová rychlost vlnění,  $U_{0+}$ ,  $U_{0-}$  jsou amplitudy a  $\omega$  je úhlová frekvence vlnění. Symbol  $k$  v rovnici značí vlnové číslo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.4)$$

Vlnová délka  $\lambda$  vlnění o periodě  $T$  a frekvenci  $f$  je

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \quad (2.5)$$

---

✓ 51. Ukažte, že rovnice vlny  $u(x, t) = U_0 \sin(kx - \omega t)$  je ekvivalentní kterémukoliv z následujících tvarů:

- (a)  $u(x, t) = U_0 \sin k(x - vt)$
- (b)  $u(x, t) = U_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f \cdot t\right)$
- (c)  $u(x, t) = U_0 \sin \omega\left(\frac{x}{v} - t\right)$
- (d)  $u(x, t) = U_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$

Symboły ve vztazích mají standardní význam.

✓ 52. Je zadána rovnice mechanické vlny  $u(x,t) = 1 \cdot 10^{-3} \sin(8 \cdot 10^3 t - 3x)$  [m]. Údaje délkových veličin jsou v metrech, čas je v sekundách. Porovnáním s obecným tvarem vlny typu  $u(x,t) = U_0 \sin(\omega t - kx)$  určete:

- (a) amplitudu
- (b) kruhovou frekvenci
- (c) frekvenci
- (d) fázovou rychlost
- (e) vlnovou délku
- (f) vlnové číslo.

Řešení: (a)  $U_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  m, (b)  $\omega = 8 \cdot 10^3$  s<sup>-1</sup>, (c)  $f = 1,27$  kHz, (d)  $v = 2667$  ms<sup>-1</sup>, (e)  $\lambda = 2,1$  m, (f)  $k = 3$  m<sup>-1</sup>.

53. Napište rovnici mechanické vlny šířící v záporném směru osy  $z$ , mající amplitudu 50 nm, frekvenci 10 Hz a rychlost šíření 500 m.s<sup>-1</sup>. Může být uvedená vlna vlnou zvukovou?  
 $u(z,t) = 50 \sin(20\pi t + 0.04\pi z)$  [nm], ano

54. Dokažte, že interferencí dvou vln postupujících podél osy  $x$  v opačném směru vznikne stojatá vlna daná vztahem  $u(x,t) = A \sin kx \cdot \sin \omega t$ .

55. S pomocí reproduktoru vytvoříte v místnosti stojatou zvukovou vlnu frekvence 440 Hz. Jaká je vzdálenost sousedního uzlu a kmitny?  
 $\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \frac{c}{440}$  m  $\doteq 0,19$  m pro  $c = 330$  m s<sup>-1</sup>.

✓ 56. Dokažte, že funkce typu  $u(x,t) = u(t \pm \frac{x}{v})$  vyhovuje vlnové rovnici, tj. diferenciální rovnici tvaru  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

✓ 57. Ukažte, že výraz  $u(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$  vyhovuje vlnové rovnici za podmínky, že veličiny  $\omega$  a  $k$  jsou vázány vztahem  $\omega = vk$ .

58. Ukažte, že vlnové rovnici vyhovuje

- (a) rovnice postupné vlny  $u(x,t) = U_0 \sin \omega(t - \frac{x}{v})$
- (b) rovnice stojaté vlny  $u(x,t) = U_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x) \sin \omega t$ .

✓ 59. Najděte rovnici vlnoplochy

- (a) postupné rovinné vlny šířící se v kladném směru osy  $x$  rychlostí  $v$ ,
- (b) postupné kulové vlny šířící se z bodového zdroje rychlostí  $\vec{v}$ ,
- (c) postupné válcové vlny šířící se z lineárního zdroje rychlostí  $\vec{v}$ .

Jakým způsobem se mění amplituda vlnění se vzdáleností? Návod: najděte řešení vlnové rovnice zapsané ve vhodných souřadnicích.

Řešení:

- (a)  $u(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$ ,  $\omega = kv$ , vlnoplocha  $x = konst + \frac{\omega}{k} t$ , (rovina kolmá k ose  $x$ )
- (b)  $u(\vec{r},t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr)$ ,  $\omega = kv$ , vlnoplocha  $r = konst + \frac{\omega}{k} t$  (koule)
- (c)  $u(\vec{r},t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - kr)$ ,  $\omega = kv$ , vlnoplocha  $r = konst + \frac{\omega}{k} t$  (válec).

## 2.2 Fázová a grupová rychlost

**Fázová rychlost**  $v_f$  udává, jakou rychlostí se pohybuje fáze vlnění ( $\omega t \pm kx$ ) prostorem:

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (2.6)$$

**Grupová rychlost**  $v_{gr}$  je rychlost, kterou se v prostoru šíří obálka vlnového balíku

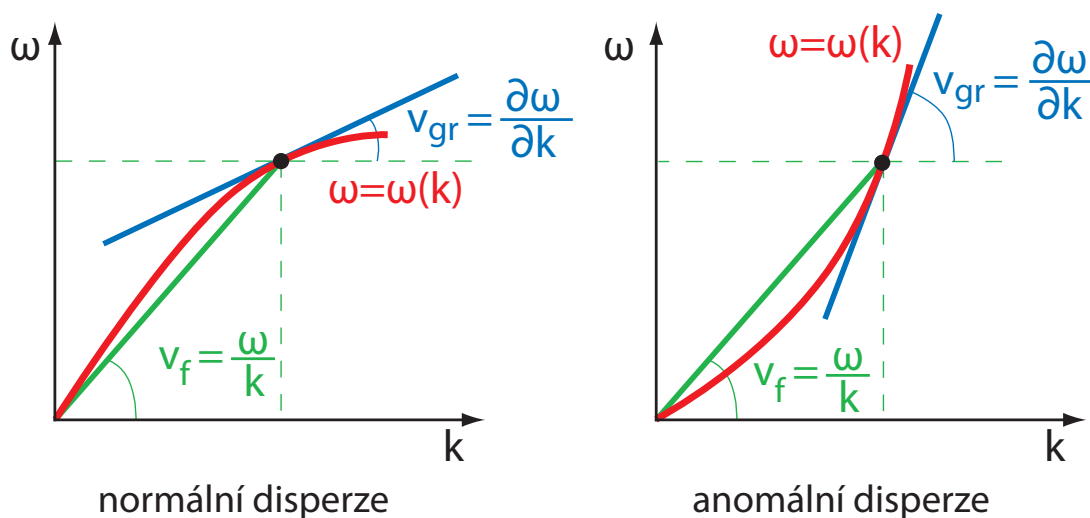
$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (2.7)$$

Souvislost s fázovou rychlostí udává Rayleighův vztah

$$v_{gr} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (2.8)$$

**Normální a anomální disperze:** Úhlová frekvence  $\omega$  je obecně funkcí vlnového čísla:  $\omega = \omega(k)$ . Tento vztah udává disperzi, čili jak se mění úhlová frekvence a rychlosti z ní určené podle vztahů (2.6) a (2.7) s rostoucím vlnovým číslem (vlnovou délkou).

Podle Rayleighova vztahu (2.8) je v případě, kdy fázová rychlost  $v_f$  roste s rostoucí vlnovou délkou  $\lambda$  (tedy klesá s vlnovým číslem  $k$ ), grupová rychlost menší než fázová. Říkáme, že vlnění má **normální disperzi**. Pokud fázová rychlost s rostoucí vlnovou délkou klesá, je grupová rychlost větší než fázová, a říkáme, že vlnění má **anomální disperzi**. Příklady jsou zakresleny na obrázku 29. Pokud prostředí nemá disperzi (fázová rychlost není funkcí vlnového čísla), jsou grupové a fázové rychlosti šíření vlnění shodné.



Obrázek 29: Vlevo: Protože tato disperzní křivka  $\omega = \omega(k)$  (závislost úhlové frekvence  $\omega$  na vlnovém čísle  $k$ ) je vypouklá směrem vzhůru, je grupová rychlost  $v_{gr}$ , která je gradientem této křivky, v každém bodě menší než fázová rychlost  $v_f$ . Vlnění má normální disperzi.

Vpravo: Je-li disperzní křivka  $\omega = \omega(k)$  vypouklá směrem dolů, je grupová rychlost  $v_{gr}$ , která je gradientem této křivky, v každém bodě větší než fázová rychlost  $v_f$ . Vlnění má anomální disperzi.

60. Disperzní vztah pro úhlovou frekvenci vlnění v plazmatu je dán rovnicí

$$\omega^2 = \Pi^2 + c^2 k^2,$$

kde  $\Pi^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$  je konstanta ( $n_e$  je koncentrace elektronů).

- (a) Určete fázovou a grupovou rychlost šíření vlnění v plazmatu.  
 (b) Určete typ disperze.

Řešení:

$$(a) v_f = c \sqrt{1 + \frac{\Pi^2}{c^2 k^2}} > c, v_{gr} = \frac{c^2}{v_f} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\Pi^2}{c^2 k^2}}} < c$$

- (b) Jde o normální disperzi.

- ©61. Ve studovaném prostředí je grupová rychlost  $v_{gr}$  nepřímo úměrná fázové rychlosti  $v_f$ . Jak závisí fázová rychlost tohoto vlnění na frekvenci?

$$v_f = f \sqrt{\frac{a}{f^2 - b^2}} \quad a - \text{konstanta úměrnosti, } b - \text{integrační konstanta}$$

- ✓62. Disperzní vztah pro úhlovou frekvenci vlnění na vodě je dán rovnicí

$$\omega^2(k) = \left( gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh),$$

kde  $h$  je hloubka,  $g$  tíhové zrychlení,  $\rho$  hustota kapaliny a  $\sigma$  její povrchové napětí. Určete fázovou a grupovou rychlost pro

- (a) čistě kapilární vlny a hlubokou vodu,  
 (b) čistě kapilární vlny a mělkou vodu (první člen rozvoje funkce  $\tanh$ ),  
 (c) čistě gravitační vlny a hlubokou vodu,  
 (d) čistě gravitační vlny a mělkou vodu (první člen rozvoje funkce  $\tanh$ ).

Určete, pro jakou hloubku můžeme použít uvedenou aproximaci.

Řešení: Nejprve se podívejme, kdy převládnu gravitační a kdy kapilární vlny – určíme  $k$  tak, aby si byly členy v závorce rovny. Dostaneme  $k^2 = \frac{g\rho}{\sigma}$ , dosazením hodnot pro vodu ( $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\sigma = 0,073 \text{ N.m}^{-1}$ ) získáme vlnovou délku  $\lambda = 17 \text{ mm}$  ( $k = 370 \text{ m}^{-1}$ ). Pro kratší vlnové délky převládají vlny kapilární (tzv. čeření hladiny), pro delší gravitační.

- (a)  $\tanh(kh) \doteq 1$ ,  $v_f = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k}$ ,  $v_{gr} = \frac{3}{2} v_f$ , aproximace platná s výjimkou nejmělkých louží (několik milimetrů),  
 (b)  $\tanh(kh) \approx kh$ ,  $v_f = k \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} h}$ ,  $v_{gr} = 2v_f$ , kapilární vlny jsou anomální bez ohledu na hloubku,  
 (c)  $\tanh(kh) \doteq 1$ ,  $v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$ ,  $v_{gr} = \frac{1}{2} v_f$ , normální disperze,  
 (d)  $\tanh(kh) \approx kh$ ,  $v_f = \sqrt{gh}$ ,  $v_{gr} = v_f$ , v tomto přiblížení bezdisperzní, s dalším členem rozvoje slabá normální disperze ( $\omega \approx \sqrt{gh} (k - \frac{1}{6} h^2 k^2)$ ),  $v_f \approx \sqrt{gh} (1 - \frac{1}{6} h^2 k)$ ,  $v_{gr} \approx \sqrt{gh} (1 - \frac{1}{3} h^2 k)$ .

- ✓63. Odvoďte Rayleighův vztah (2.8) z definičních vztahů (2.6), (2.7) a vztahu pro souvislost vlnového čísla a vlnové délky (2.4).

64. Disperze elektromagnetických vln v horních vrstvách zemské atmosféry (v ionosféře) je dána empirickým vztahem  $v_f = \frac{a}{1 - b\lambda^2}$ , kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty. Najděte grupovou rychlost těchto vln, určete typ disperze.

$$v_{gr} = v \frac{1 - 3b\lambda^2}{1 - b\lambda^2} \text{ anomální}$$

65. V optice je index lomu  $n$  definován jako podíl rychlosti světla ve vakuu  $c$  a fázové rychlosti šíření vlnění v prostředí  $v_f$ . Pokud v materiálu nedochází k výrazné absorpci, lze závislost indexu lomu  $n$  na vlnové délce  $\lambda$  popsat jedním z následujících vztahů:

(a)  $n^2 = 1 + \sum_k \frac{B_k \lambda^2}{\lambda^2 - C_k}$ , kde  $B_k, C_k$  jsou konstanty (Sellmeierův vzorec),

(b)  $n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$ , kde  $A, B, C$  jsou konstanty (Cauchyho vzorec),

Řešte následující úlohy:

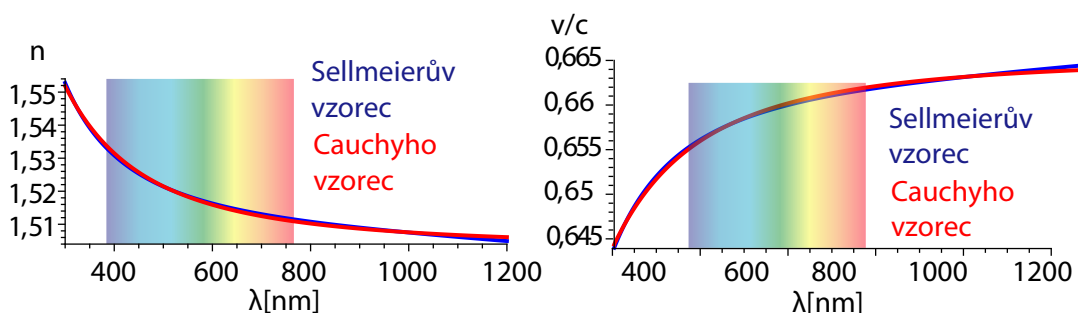
(a) Dokažte, že vzorec (b) lze získat ze vzorce (a) rozvojem podle  $\lambda^{-2}$ .

(b) Dokažte, že disperze plynů a skel je normální, protože konstanty  $B_k, C_k$  jsou pro ně kladná reálná čísla.

Řešení:

(a)  $A = 1 + \sum_k B_k, B = \sum_k B_k C_k, C = \sum_k B_k C_k^2$ .

(b) viz 30.



Obrázek 30: Vlevo: Sellmeierův a Cauchyho vzorec pro vlnové délky z viditelné oblasti pro korunové sklo BK7. Pro oba vzorce klesá index lomu s vlnovou délkou.

Vpravo: Rychlost světla v prostředí určená ze Sellmeierova a Cauchyho vzorce ( $v_f = \frac{c}{n}$ ). Zřejmě je  $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0$ , fázová rychlost s rostoucí vlnovou délkou roste, tedy grupová je menší než fázová, disperze je normální.

## 2.3 Vlnění a energie

**Střední hodnota intenzity vlnění**  $I$  je energie, která projde za jednu sekundu jednotkou plochy kolmou na směr šíření vlnění

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho v}, \quad (2.9)$$

kde  $P$  je tlaková amplituda při šíření zvuku.

✓ 66. Ze zákona zachování energie odvod'te vztah pro závislost intenzity  $I$  a amplitudy  $A$  vlnění šířícího se v neabsorbujícím prostředí na vzdálenosti  $r$  od

- (a) bodového zdroje
- (b) nekonečně dlouhého lineárního zdroje
- (c) nekonečně velkého plošného zdroje.

Výsledky porovnejte s výsledky příkladu -odkaz-odkaz.

Řešení:  $P$  označme zářivý výkon zdroje,  $l$  jednotkovou délku zdroje, pak

$$(a) I = \frac{P}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}, A \sim \frac{1}{r}$$

$$(b) I = \frac{P}{2\pi r l} \sim \frac{1}{r}, A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$(c) I = \frac{P}{l^2} = \text{konstanta}^2, A = \text{konstanta}.$$

67. Lineární zdroj emituje rozptínající se válcové vlnoplochy. Určete, jak závisí intenzita a amplituda vlnění na vzdálenosti od zdroje, šíří-li se vlnění v neabsorbujícím prostředí.

$$I \sim \frac{1}{r} \quad A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

68. Střední vyzařovací výkon mobilního telefonu je 0,25 W. Jaká je intenzita ve vzdálenosti

(a) 10 cm od antény

(b) 1 km od antény

V obou případech pro jednoduchost předpokládejte, že anténa je bodový zdroj, který vyzařuje izotropně.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}, (a) I = 2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}, (b) I = 2 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

## 2.4 Dopplerův princip

Pohybuje-li se zdroj o frekvenci  $f$  rychlostí  $v_z$  a pozorovatel rychlostí  $v_p$  (rychlosti počítáme kladně ve směru od zdroje k pozorovateli), pak pro frekvenci  $f_p$  signálu, přijímaného pozorovatelem, platí tzv. Dopplerův vztah

$$f_p = \frac{c - v_p}{c - v_z} f, \quad (2.10)$$

kde  $c$  je rychlost šíření vlnění v klidném prostředí.

69. Píšťala lokomotivy vydává tón o frekvenci  $f = 450 \text{ Hz}$ . Jede-li lokomotiva kolem pozorovatele rychlostí  $v = 20 \text{ ms}^{-1}$ , jaký tón slyší

(a) při příjezdu

(b) při odjezdu

lokomotivy? Rychlost zvuku za daných podmínek je  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$ .

Řešení:

$$(a) f_1 = \frac{c}{c-v} f = 478 \text{ Hz}$$

$$(b) f_2 = \frac{c}{c+v} f = 425 \text{ Hz}$$

70. Vlak jede v klidném vzduchu rychlostí  $v = 30 \text{ ms}^{-1}$  po přímé dvoukolejné trati. Frekvence zvuku, kterou vydává píšťala lokomotivy, je  $f_0 = 500 \text{ Hz}$ . Jaká je délka zvukové vlny

(a) před lokomotivou

(b) za lokomotivou?

Jakou frekvenci má zvuk, který slyší pozorovatel stojící u trati

(c) před lokomotivou,



(d) za lokomotivou?

Jaká bude frekvence zvuku, který uslyší cestující ve druhém vlaku, který jede po druhé koleji rychlostí  $u = 15 \text{ ms}^{-1}$ , jestliže

(e) druhý vlak se blíží k prvnímu,

(f) druhý vlak se od prvního vzdaluje?

(g) Jak se změní každá z předcházejících odpovědí, jestliže vane vítr rychlostí  $V = 9 \text{ ms}^{-1}$  stejným směrem, jako jede první lokomotiva?

Rychlost zvuku počítejte  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$ .

Řešení:

(a)  $\lambda_1 = \frac{c-v}{f_0} = 0,62 \text{ m}$

(b)  $\lambda_2 = \frac{c+v}{f_0} = 0,74 \text{ m}$

(c)  $f_1 = \frac{c}{c-v} f_0 = 548 \text{ Hz}$

(d)  $f_2 = \frac{c}{c+v} f_0 = 459 \text{ Hz}$

(e)  $f_3 = \frac{c-u}{c+v} f_0 = 439 \text{ Hz}$

(f)  $f_4 = \frac{c+u}{c-v} f_0 = 573 \text{ Hz}$

(g)  $\lambda'_1 = \frac{c+V-v}{f_0} = 0,64 \text{ m}$ ,  $\lambda'_2 = \frac{c-V+v}{f_0} = 0,72 \text{ m}$ ,

$f'_1 = \frac{c+V}{\lambda'_1} = 548 \text{ Hz}$ ,  $f'_2 = \frac{c-V}{\lambda'_2} = 459 \text{ Hz}$ ,

$f'_3 = \frac{c+V+u}{c+V-v} f_0 = 574 \text{ Hz}$ ,  $f'_4 = \frac{c-V-u}{c-V+v} f_0 = 439,19 \text{ Hz}$ .

✓71. Netopýr letí ke stěně rychlostí  $6 \text{ ms}^{-1}$  a vysílá ultrazvukové vlnění frekvence  $45\,000 \text{ Hz}$ . Jaká je frekvence zvuku  $f'$ , který se odráží od zdi? Jakou frekvenci rázů  $\Delta f$  slyší netopýr? Rychlost zvuku počítejte  $c = 340 \text{ ms}^{-1}$ .  $f' = \frac{c}{c-u} f_0 = 45\,808 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f = 0,5(f' - f_0) = f_0 \frac{u}{c-u} = 808 \text{ Hz}$

## 2.5 Hladina zvuku B

v decibelech je

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (2.11)$$

kde  $I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$  je prahová intenzita referenčního tónu o frekvenci  $f_0 = 1\,000 \text{ s}^{-1}$ .

✓72. Intenzita zvuku příslušná několika nezávislým zdrojům zvuku je rovna součtu intenzit jednotlivých zdrojů.

(a) Jak vzroste hladina intenzity proti hladině intenzity zvuku vydávaného jedněmi houslemi, začnou-li hrát současně dvoje housle?

(b) Je-li hladina intenzity jedněch houslí 40 dB, kolika houslí je zapotřebí, aby hladina intenzity vzrostla na 60 dB?

$$B_2 - B_1 = 3,01 \text{ dB} \quad n = 100$$

73. Hladinu intenzity tónu počítáme podle vztahu  $B = 10 \log \frac{I}{I_0}$ , kde  $I_0$  je prahová intenzita tónu 1000 Hz a má hodnotu  $10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ . Kolikrát bude větší intenzita tónu, jemuž odpovídá hladina intenzity 60 decibelů?  $\frac{I}{I_0} = 10^6$

74. Okno, jehož plocha je  $S = 1 \text{ m}^2$ , je otevřeno na ulici. Pouliční hluk má v rovině okna hladinu intenzity 80 dB. Jak veliký akustický výkon vstupuje zvukovými vlnami do pokoje?  
 $P = 10^{-4} \text{ W}$

## 2.6 Elektromagnetické vlny

Soustava Maxwellových rovnic:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

kde

$\vec{E}$  – vektor intenzity elektrického pole elektromagnetické vlny,

$\vec{H}$  – vektor intenzity magnetického pole elektromagnetické vlny,

$\vec{D}$  – vektor elektrické indukce,

$\vec{B}$  – vektor magnetické indukce,

$\vec{j}$  – vektor proudové hustoty,

$\rho$  – hustota prostorového náboje,

$\epsilon, \mu$  – permitivita a permeabilita prostředí, ve kterém se elektromagnetická vlna šíří.

Relativní permitivita  $\epsilon_r$  a relativní permeabilita  $\mu_r$  jsou zavedeny vztahy:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (2.13)$$

kde  $\epsilon_0$  a  $\mu_0$  jsou příslušné veličiny vakuu:  $\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^2$ .

**Elektromagnetické vlny v dielektriku.** Nejčastěji studujeme šíření světla v homogenním izotropním a neabsorbujícím prostředí – v dielektriku. Pro toto prostředí je hustota prostorového náboje  $\rho = 0$  a vektor proudové hustoty  $\vec{j} = 0$ . Řešením soustavy rovnic (2.12) s omezeními  $\rho = 0$  a  $\vec{j} = 0$  získáme vlnové rovnice pro vektory intenzity elektrického a magnetického pole v elektromagnetické vlně.

$$\Delta \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Fázová rychlost šíření vlnění v prostředí je

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (2.15)$$

ve vakuu

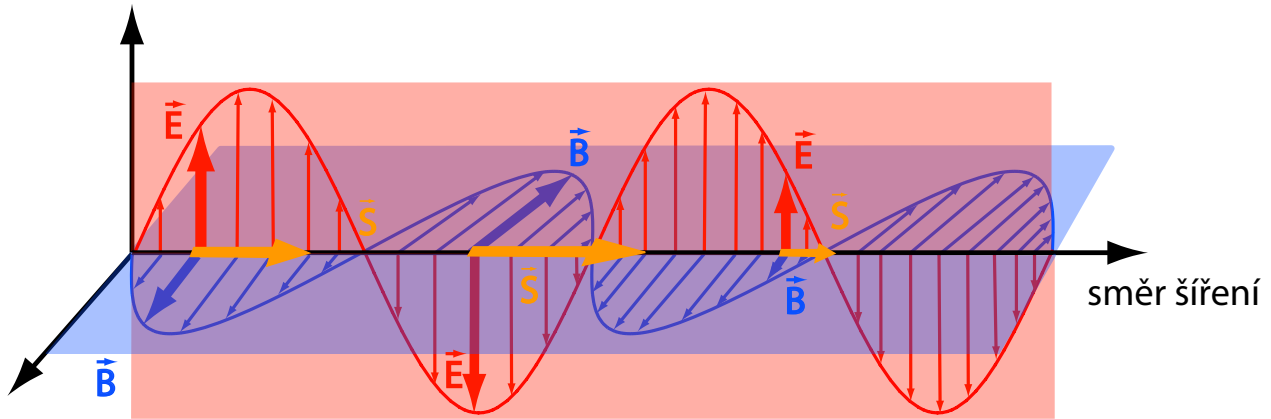
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}. \quad (2.16)$$

**Index lomu** je poměr rychlosti  $c$  šíření elektromagnetických vln ve vakuu k rychlosti  $v$  šíření v daném prostředí

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \doteq \sqrt{\epsilon_r}. \quad (2.17)$$

Je zřejmé, že  $n \geq 1$ ,  $n = 1$  pouze pro vakuum.

**Energie elektromagnetického vlnění** Vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  jsou navzájem kolmé a kmitají kolmo na normálu vlnoplochy, tj. kolmo na paprsek určující směr šíření (viz obr. 31).



Obrázek 31: Šíření elektromagnetické vlny

Přenesenou energii charakterizuje Poyntingův vektor  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2.18)$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru  $\langle \vec{S} \rangle$  v průběhu jedné periody je dána vztahem ( $\vec{E}_0$  a  $\vec{H}_0$  jsou amplitudy elektrické a magnetické intenzity)

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \vec{n}_0 \quad (2.19)$$

a je to tzv. hustota zářivého toku.

### Polarizované světlo

Nepolarizované světlo: vektor elektrické intenzity  $\vec{E}$  elektromagnetické vlny kmitá v rovině kolmé na směr šíření, mění nepravidelně fázi i směr.

Elipticky polarizované světlo: koncový bod vektoru  $\vec{E}$  opisuje v rovině kolmé na směr šíření elipsu, v prostoru se pohybuje po eliptické šroubovici.

Kruhově (lineárně) polarizované světlo: koncový bod vektoru  $\vec{E}$  opisuje kružnici (přímku).

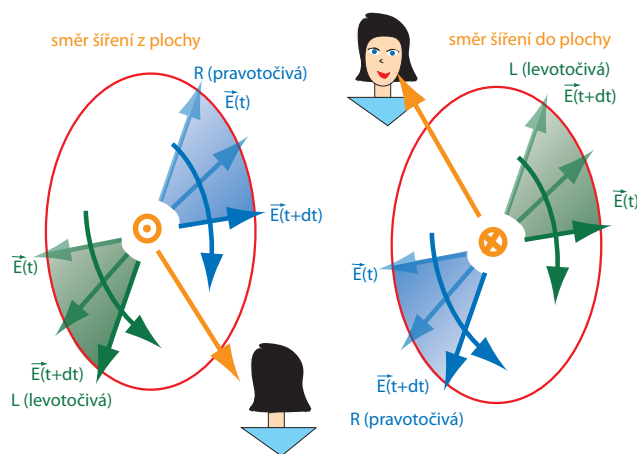
Točivost (helicita, smysl polarizace) elipticky polarizované vlny:

- pravotočivá (R) - vektor se otáčí ve směru hodinových ručiček
- levotočivá (L) - vektor se otáčí proti směru hodinových ručiček

Pozorovatel se dívá směrem ke zdroji (viz obr. 32).

✓75. Dokažte, že pro elektromagnetickou vlnu lze poměr amplitudy elektrického a magnetického vektoru vyjádřit vztahem

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$



Obrázek 32: Pravotočivá a levotočivá polarizace

- ✓ 76. Harmonická rovinná elektromagnetická vlna má elektrický vektor vertikální a šíří se ve směru osy  $x$ . Její frekvence je  $f = 5 \cdot 10^6$  Hz a amplituda  $E_0 = 0,04$  Vm $^{-1}$ . Napište výrazy pro elektrický vektor  $\vec{E}$ , magnetický vektor  $\vec{H}$  a Poyntingův vektor  $\vec{S}$  této vlny. Vypočítejte rovněž střední hodnotu Poyntingova vektoru  $\langle \vec{S} \rangle$ .

Řešení:  $E_y(x, t) = 0,04 \sin \Phi$      $H_z(x, t) = 1,06 \cdot 10^{-4} \sin \Phi$      $S_x(x, t) = 4,24 \cdot 10^{-6} \sin^2 \Phi$   
 $\Phi = 3,14 \cdot 10^7 t - 0,105x$      $\langle \vec{S}(x, t) \rangle = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$

77. Vypočítejte Poyntingův vektor a jeho střední hodnotu pro rovinnou elektromagnetickou vlnu, která se šíří ve vakuu ve směru osy  $x$ .

Řešení:  $\vec{S}(x, t) = \vec{i} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[ E_{0y}^2 \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_y \right] + E_{0z}^2 \cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_z \right] \right]$      $\langle \vec{S}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( E_{0y}^2 + E_{0z}^2 \right)$

78. Dvě elektromagnetické vlny téže frekvence  $f$  a téže amplitudy  $E_0$  jsou lineárně polarizovány ve směru osy  $y$ , přičemž jedna vlna se šíří ve směru osy  $x$ , druhá ve směru osy  $z$ . Určete v závislosti na čase  $t$  a souřadnicích  $x, z$  výrazy pro následující veličiny:

- výsledné elektrické pole
- výsledné magnetické pole
- Poyntingův vektor  $\vec{S}$  a jeho časovou střední hodnotu

Řešení:

- $E_y = E_0 [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t - kz)], \quad E_x = E_z = 0$
- $H_z = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - kx), \quad H_x = -E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - kz), \quad H_y = 0$
- $S_x = E_y H_z, \quad S_y = 0, \quad S_z = -E_y H_x \quad \langle \vec{S} \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2} [1 + \cos k(x - z)] [\vec{i} + \vec{k}]$

79. Elektrický vektor rovinné elektromagnetické vlny je ve vakuu dán vztahem  $E_x = 0, E_y = 0,5 \cos [2\pi \cdot 10^8 (t - \frac{x}{c})], E_z = 0$ .

- Určete vlnovou délku, stav polarizace a směr šíření této vlny.
- Vypočtěte magnetický vektor dané vlny.

Řešení:

(a)  $\lambda = 3 \text{ m}$ , vlna polarizovaná v rovině  $xy$  se šíří v kladném směru osy  $x$

(b)  $B(x, t) = B_z(x, t) = \frac{E_y(x, t)}{c}$

80. Určete podmínky, za kterých obecně elipticky polarizovaná vlna přechází

(a) v lineárně polarizovanou vlnu

(b) v kruhově polarizovanou vlnu.

Řešení:

(a) Při fázovém posuvu  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

(b) Při fázovém posuvu  $\pm\frac{\pi}{2}$  a při splnění podmínky  $E_{0x} = E_{0y}$

81. Popište stav polarizace a orientaci vlny  $\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) + \vec{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi)$ .  
*Elipsoidicky polarizovaná levotočivá*

82. Popište polarizaci těchto dvou vln:

(a)  $\vec{E}_1 = E_0 \left[ \vec{i} \cos(kz - \omega t) + \vec{j} \sin(kz - \omega t) \right]$

(b)  $\vec{E}_2 = E_0 \left[ \vec{i} \sin(kz - \omega t) + \vec{j} \cos(kz - \omega t) \right]$ .

Řešení: Kruhově polarizované vlny: (a) pravotočivá (b) levotočivá

✓ 83. Popište co nejuplněji stav polarizace následujících elektromagnetických vln:

(a)  $\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_0 \cos(kz - \omega t) - \vec{j}E_0 \cos(kz - \omega t)$

(b)  $\vec{E}(z, t) = -\vec{i}E_0 \sin 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - ft \right) + \vec{j}E_0 \sin 2\pi \left( \frac{z}{\lambda} - ft \right)$

(c)  $\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_0 \sin(\omega t - kz) + \vec{j}E_0 \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{4})$

(d)  $\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_0 \cos(\omega t - kz) + \vec{j}E_0 \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$ .

Řešení:

(a) Lineárně polarizovaná vlna, rovina kmitů vektoru  $\vec{E}(z, t)$  svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $-45^\circ$

(b) Lineárně polarizovaná vlna, rovina kmitů vektoru  $\vec{E}(z, t)$  svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $135^\circ$

(c) Levotočivá elipticky polarizovaná vlna

(d) Pravotočivá kruhově polarizovaná vlna.

84. Napište výraz pro lineárně polarizovanou vlnu s úhlovou frekvencí  $\omega$ , která se šíří v kladném směru osy  $z$  tak, že rovina jejích kmitů svírá s rovinou  $zx$  úhel  $\alpha = 30^\circ$ .  
 $\vec{E}(z, t) = E_0(0,886\vec{i} + 0,5\vec{j}) \cos(kz - \omega t + \alpha_0)$

85. Napište výraz pro pravotočivou kruhově polarizovanou vlnu, šířící se ve směru osy  $z$  tak, že v počátku souřadnic a v čase  $t = 0$  má její elektrický vektor směr opačný než kladný smysl osy  $x$ .  
 $\vec{E} = -E_0\vec{i} \cos(\omega t - kz) + E_0\vec{j} \sin(\omega t - kz)$

✓ 86. Napište výrazy pro elektrické pole následujících vln:

- (a) Lineárně polarizovaná vlna postupující ve směru osy  $x$ . Vektor intenzity elektrického pole svírá úhel  $30^\circ$  s osou  $y$ .
- (b) Pravotočivá elipticky polarizovaná vlna postupující ve směru osy  $y$ . Hlavní osa elipsy leží ve směru osy  $z$  a je rovna dvojnásobku malé osy.
- (c) Lineárně polarizovaná vlna postupující v rovině  $xy$ . Směr šíření vlny svírá úhel  $45^\circ$  s osou  $x$  a směr polarizace je totožný se směrem osy  $z$ .

Řešení:

$$(a) \vec{E}_0(x, t) = 0,5E_0(\sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}) \sin(\omega t - kx)$$

$$(b) \vec{E}_0(y, t) = E_0(\vec{i} \cos(\omega t - ky) - 2\vec{k} \sin(\omega t - ky))$$

$$(c) \vec{E}_0(x, y, t) = E_0\vec{k}(\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - ky))$$

- ⊙87. Dokažte, že elipticky polarizovaná vlna může vzniknout superpozicí dvou kruhově polarizovaných vln - jedné pravotočivé a druhé levotočivé. Najděte výrazy pro dvě kruhově polarizované vlny, jejichž složením vznikne pravotočivá elipticky polarizovaná vlna, šířící se podél osy  $z$  tak, že hlavní poloosa elipsy leží v ose  $y$ .
- ⊙88. Dokažte analyticky, že na elipticky polarizované světlo lze nahlížet jako na superpozici lineárně a kruhově polarizovaného světla.
- ⊙89. Ukažte, že dvě lineárně polarizované vlny, jejichž kmitosměry jsou na sebe kolmé, nemohou interferovat (viz teorie k podkapitole 3.3 Interference).

# Kapitola 3

## Optika

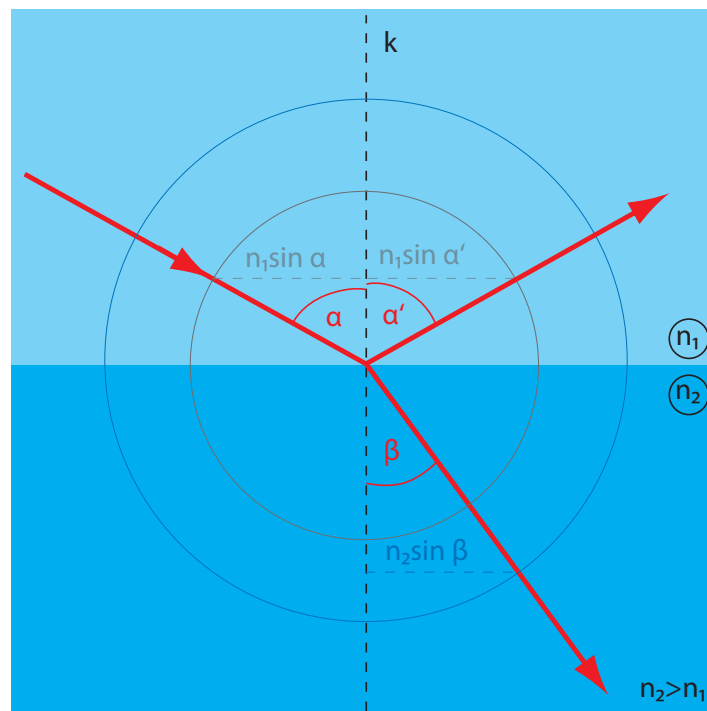
### 3.1 Základní zákony šíření světla

**Fermatův princip** Světelný paprsek se šíří prostorem po minimální optické dráze. Optickou drahou  $L$  světelného paprsku (v homogenním prostředí) rozumíme součin délky jeho geometrické dráhy  $s$  a indexu lomu  $n$ :

$$L = ns. \quad (3.1)$$

**Zákon odrazu** Při dopadu paprsku na rozhraní dvou optických prostředí se světelný paprsek odráží tak, že odražený paprsek leží v rovině dopadu (tj. v rovině určené dopadajícím paprskem a kolmicí dopadu  $k$  - obr. 33) a úhel dopadu  $\alpha$  se rovná úhlu odrazu  $\alpha'$ :

$$\alpha = \alpha'. \quad (3.2)$$



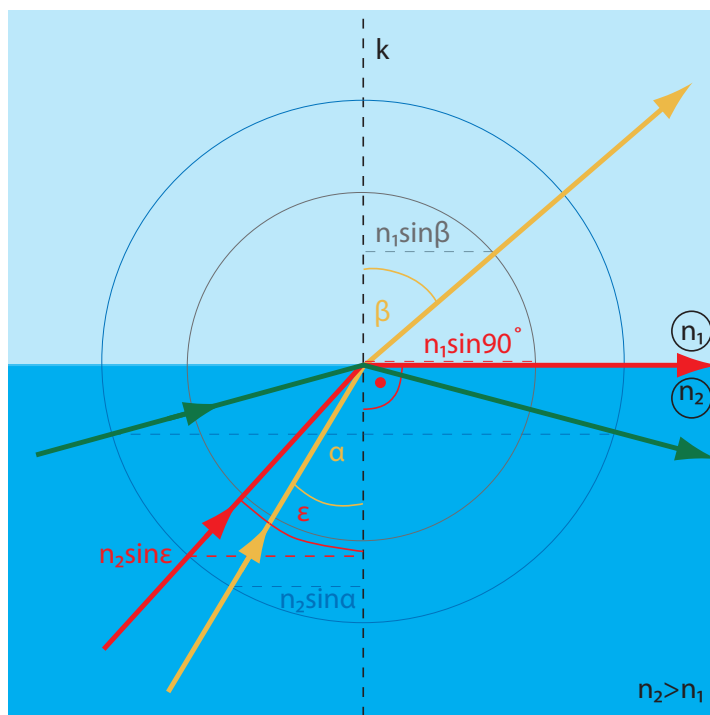
Obrázek 33: Odraz a lom světla na rozhraní dvou optických prostředí (kružnice mají poloměry  $n_1$  a  $n_2$ ,  $n_1 < n_2$ ).

**Zákon lomu** Při dopadu paprsku na rozhraní dvou průhledných izotropních dielektrik se světelný paprsek láme tak, že lomený paprsek leží v rovině dopadu a platí Snelliův zákon

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (3.3)$$

kde  $\alpha$  je úhel dopadu,  $\beta$  úhel lomu (obr. 33) a  $n_1, n_2$  jsou indexy lomu prostředí 1 a 2. Je-li  $n_1 < n_2$ , nazýváme prostředí 1 opticky řidším, prostředí 2 opticky hustším.

**Totální odraz** Při dopadu světelného paprsku z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího pro jistý úhel dopadu, tzv. mezní úhel  $\varepsilon$ , je úhel lomu  $\frac{\pi}{2}$ , tj. paprsek lomený leží v rovině rozhraní obou optických prostředí (obr. 34). Pro mezní úhel  $\varepsilon$  platí



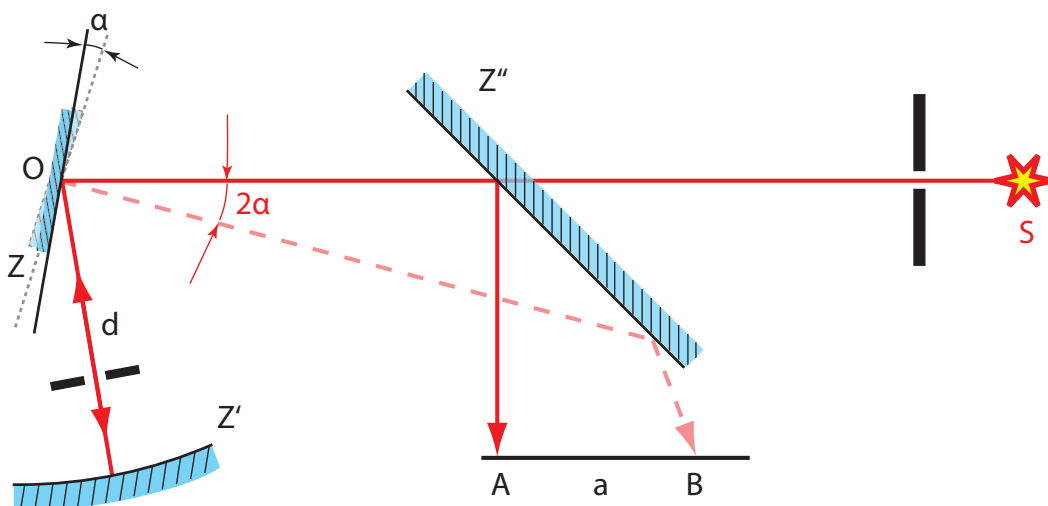
Obrázek 34: Totální odraz světla (zeleně), mezní úhel červeně

$$\sin \varepsilon = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.4)$$

Pro všechny úhly dopadu  $\alpha > \varepsilon$  se světelný paprsek neláme do druhého prostředí, nastává úplný (totální) odraz.

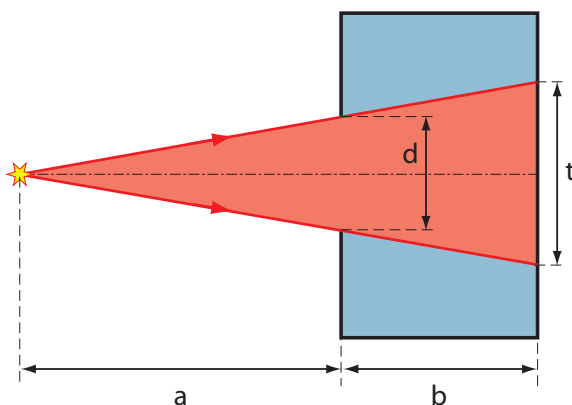
- ✓ 90. Ve Fizeauově pokusu měření rychlosti světla bylo použito ozubeného kola se 720 zuby, rovinné zrcadlo bylo od tohoto kola vzdáleno o 8 630 m. Při jaké minimální úhlové rychlosti otáčení ozubeného kola vymizelo poprvé světlo pro pozorovatele?  $\omega_{min} = 75,8 \text{ s}^{-1}$
91. Ve Fizeauových měřeních rychlosti světla pokračoval Cornu, který užil Fizeauova zařízení, avšak vzdálenost mezi zrcadly zvětšil na 22,9 km. Jeho ozubené kolo mělo 180 zubů při průměru 40 mm. Najděte úhlovou rychlost, se kterou by se muselo ozubené kolo otáčet, aby světlo propuštěné jednou mezerou se vrátilo mezerou následující.  $\omega = 228,6 \text{ s}^{-1}$
92. Při Foucaultově pokusu měření rychlosti světla konalo zrcadlo 48 000 otáček za minutu. Vzdálenost otočného zrcadla od pevného kulového zrcadla byla  $d = 4 \text{ m}$  (obr. 35) a úhel  $\alpha$ , o který se pootočilo zrcadlo v době, za kterou vykonal paprsek dráhu  $2d$ , byl roven  $1,324 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ . Určete z těchto hodnot rychlost šíření světla ve vakuu.  $c = 3,037 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$





Obrázek 35: Foucaultovo uspořádání experimentu pro měření rychlosti světla

93. Dírková komora o hloubce  $b = 0,3$  m zobrazuje předměty vzdálené více než  $a = 2,7$  m (obr. 36). Jaký může být maximální průměr vstupního otvoru  $d$ , aby zobrazení bodového předmětu odpo-



Obrázek 36: Dírková komora

vídala kruhová ploška, jejíž průměr nepřesáhne velikost  $t = 1$  mm? (Při řešení problému nepřihlížejte k ohybovému jevu.)

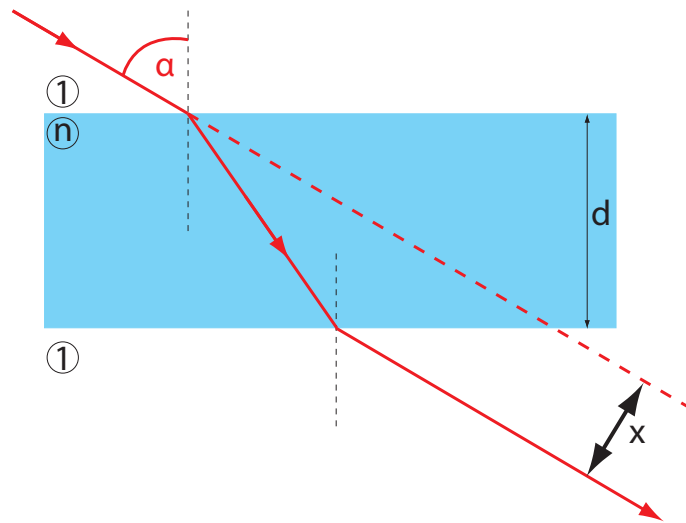
$$d = \frac{a}{a+b}t = 0,9 \text{ mm}$$

- ✓ 94. Paprsek světla se postupně odráží na třech navzájem kolmých zrcadlech. Jaký je směr odraženého paprsku?  
*opačný než směr dopadajícího*
- ✓ 95. Jak vysoké musí být svislé rovinné zrcadlo a v jaké výšce nad podlahou má být umístěna jeho horní hrana, aby se v něm vzpřímený člověk výšky  $h$  viděl právě celý?  
*výška zrcadla  $0.5h$ , horní hrana ve výšce  $h$*
96. Jakou minimální výšku musí mít rovinné zrcadlo, které je nakloněno dopředu tak, že s horizontální rovinou svírá úhel  $\alpha$ , aby se v něm vzpřímený člověk výšky  $h$ , jehož oko je v kolmé vzdálenosti  $a$  od zrcadla, viděl celý?

$$x = \frac{ah \sin \alpha}{h \cos \alpha + 2a}$$

97. Ukažte, že při rovnoběžném posunutí rovinného zrcadla o vzdálenost  $x$  podél normály se obraz posune o vzdálenost  $2x$ .

98. Dokažte, že paprsek světla odražený od rovinného zrcadla se otočí o úhel  $2\vartheta$ , jestliže se zrcadlo otočí o úhel  $\vartheta$  kolem osy kolmé k rovině dopadu.
99. V jaké výšce  $H$  nad povrchem Země se nachází upoutaný balón, vidíme-li z místa pozorování jeho odraz ve vodě pod depresním úhlem  $\alpha$  a balón sám pod elevačním úhlem  $\beta$ ? Pozorovací místo je ve výšce  $h$  nad hladinou vody. Výšku  $H$  určete nejprve obecně, pak pro hodnoty  $\alpha = 39^\circ 48'$ ,  $\beta = 33^\circ 41'$ ,  $h = 10$  m. 
$$H = h \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = 90,23 \text{ m}$$
100. Vypočítejte příčné posunutí paprsku prošlého skrz planparalelní destičku tloušťky  $d$  o indexu lomu  $n$  (obr 37). Paprsek dopadá pod úhlem dopadu  $\alpha$ . 
$$x = d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$



Obrázek 37: Příčné posunutí paprsku v planparalelní desce

101. Na skleněnou destičku s indexem lomu  $n = 1,5$  dopadá světelný paprsek. Pod jakým úhlem dopadl, jestliže lomený paprsek svírá s paprskem odraženým na rozhraní úhel  $\gamma = 60^\circ$ ?  $\alpha = 79,1^\circ$
102. Pod jakým úhlem musí paprsek dopadnout na rozhraní vakuum – sklo, aby odražený a lomený paprsek svíraly úhel  $90^\circ$ ? Index lomu skla je  $n$ .  $\alpha = \arctg n$
103. Svislá tyč je ponořena 2 metry ve vodě uprostřed bazénu, dotýká se dna a ještě půl metru vyčnívá nad vodu. Slunce je právě  $45^\circ$  nad obzorem. Jak dlouhý je stín tyče na dně bazénu?  $x = 1,75$  m
104. Korková zátka plave na klidné hladině rybníka hlubokého 1,6 m. Kde se nachází stín zátky na dně rybníka, když Slunce právě zapadá? Ve vzdálenosti 1,81 m od paty kolmice vedené od středu zátky ke dnu rybníka.
105. Pozorovatel stojí na okraji vodního bazénu s hloubkou vody  $h = 2,81$  m a sleduje předmět ležící na jeho dně. V jaké hloubce  $h'$  se vytvoří obraz pozorovaného předmětu, je-li směr, ve kterém pozorovatel vidí obraz, odchýlen od kolmice k vodní hladině o úhel  $60^\circ$ ?  $h' = 1,38$  m
106. Vrstva éteru tloušťky  $d = 20$  mm ( $n = 1,36$ ) plave na vrstvě vody tloušťky  $d' = 40$  mm ( $n' = 1,33$ ). Jaká je zdánlivá vzdálenost hladiny éteru ode dna nádoby, díváme-li se do nádoby kolmo?  $h' = 44,8$  mm

- ✓ 107. Malý předmět je na dně jezera v hloubce 2 metrů. Pozorovatel na čluhu přímo nad ním jej pozoruje. Za předpokladu paraxiálních paprsků vypočtete, v jaké hloubce pod hladinou jej vidí.  
 $h = 1,5 \text{ m}$

108. Na stolku mikroskopu je skleněná destička 3 mm tlustá. Nejprve zaostříme mikroskop na horní povrch destičky, potom snížíme tubus mikroskopu a zaostříme na její spodní povrch. Abychom snadno zaostřili, jsou na horním i spodním povrchu destičky vyryté značky. Tubus přitom snížíme o 2 mm. Vypočtete index lomu destičky.  $n = 1,5$

109. Světelný paprsek dopadá na rovinné rozhraní dvou průhledných prostředí o indexech lomu 1,60 a 1,40. Paprsek přechází z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího. Úhel dopadu je  $\alpha = 30^\circ$ . Vypočtete:

- (a) úhel lomu,  
(b) deviace paprsku.

Řešení:

- (a)  $\beta = 34,85^\circ$ ,  
(b)  $\delta = 4,85^\circ$ .

110. Hranol ze skla má index lomu 1,5 a vrcholový úhel  $60^\circ$ . Určete

- (a) deviace paprsku dopadajícího pod úhlem  $40^\circ$ ,  
(b) minimální deviace a odpovídající úhel dopadu.

Řešení:

- (a)  $\delta = 38,5^\circ$ ,  
(b)  $\delta_{min} = 37,2^\circ$  pro úhel dopadu  $\alpha_{min} = 48,6^\circ$

111. Světelný paprsek dopadá ze vzduchu na vodní kapku kulovitého tvaru, láme se do ní a po odrazu v kapce část paprsků z ní vystupuje ven. Vypočítejte úhel, pod kterým musí paprsek dopadnout, aby odchylka vystupujícího červeného paprsku byla vzhledem k dopadajícímu paprsku minimální. Jak velká bude tato odchylka, je-li index lomu vodní kapky pro červenou barvu  $n_c = 1,331$ ?

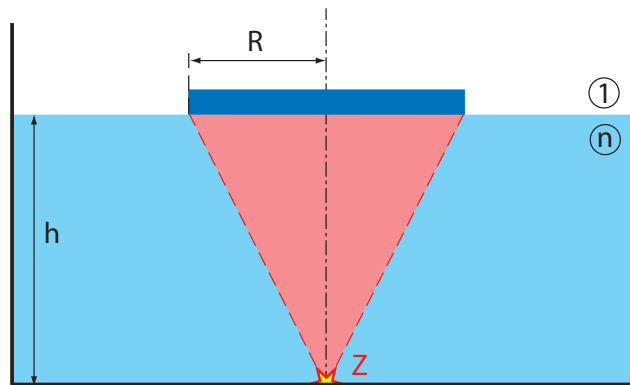
Řešení:  $\alpha_{min} = \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 59^\circ 32'$ ,  $\delta_c = 4\beta_c - 2\alpha_{min}$ , kde  $\beta_c$  je úhel lomu

112. Paprsek dopadá na horní stěnu krychle pod úhlem  $60^\circ$  a přitom se na boční stěně právě odráží pod mezním úhlem. Jaký je index lomu hranolu?  $\frac{\sqrt{7}}{2} \doteq 1,32$

- ✓ 113. Na dně nádoby naplněné vodou do výšky  $h = 10 \text{ cm}$  je bodový zdroj světla. Na hladině plave neprůhledná destička kruhového tvaru tak, že její střed je přesně nad zdrojem světla (obr. 38). Jak velký musí mít destička poloměr, aby nad hladinu nepronikl žádný paprsek?  
 $R = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} = 11,3 \text{ cm}$

114. Potápěč je ponořen v čisté vodě a dívá se směrem vzhůru. Jeho oči jsou v hloubce  $h$  pod povrchem vody.

- (a) Jak se jeví potápěči prostor nad povrchem vody?  
(b) Jak velká část vodního prostoru je pro něj průhledná?



Obrázek 38: Zdroj na dně nádoby

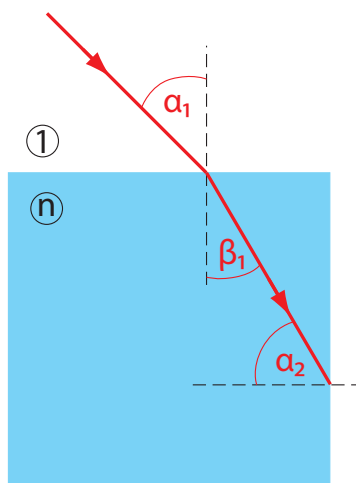
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $h = 1,5$  m a index lomu vody  $n = 1,33$ .

Řešení:

(a) Vidí prostor uvnitř rotačního kužele s vrcholovým úhlem  $97,5^\circ$ .

(b) Poloměr průhledné části povrchu je  $R = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} = 1,7$  m

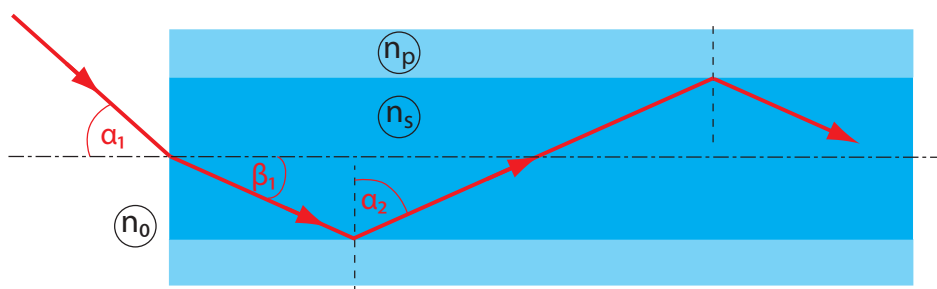
115. Světlo dopadá na horní hranu skleněné krychle pod úhlem  $\alpha = 45^\circ$  (obr. 39). Index lomu skla je  $n = 1,414$ . Bude paprsek na svislé stěně krychle totálně odražen? *Ano*



Obrázek 39: Lom světla v skleněné krychli

- ✓ 116. Na obr. 40 je tenké skleněné vlákno (index lomu  $n_s$ ) s ochranným povlakem z umělé hmoty (index lomu  $n_p < n_s$ ). Existuje jistý maximální úhel dopadu  $\alpha$  na vybroušenou čelní plošku, kolmou k ose vlákna, takový, že vškeré světlo dopadající pod úhly dopadu  $\alpha_1 < \alpha$  se totálně odrazí na stěnách vlákna a prakticky se beze ztrát šíří vlákem v libovolném směru (na tom je založena tzv. vlákenná optika). Dokažte, že platí

$$\sin \alpha = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_s^2 - n_p^2}.$$



Obrázek 40: Optické vlákno

117. Optické vlákno má válcové jádro z flintového skla (index lomu  $n_1 = 1,66$ ) a je obaleno tenkou vrstvou ze skla korunového (index lomu  $n_2 = 1,52$ ). Pod jakým maximálním úhlem musí dopadnout světlo na čelní kolmo vybroušenou plochu vlákna, aby se uvnitř vlákna šířilo totálním odrazem? 41,85°
- ©118. S jakým nejmenším poloměrem může být svinuto optické vlákno, jehož jádro má průměr 0,05 mm, aniž by docházelo k podstatnějším světelným ztrátám? Index lomu jádra je 1,66 a index lomu pláště 1,52. 0,54 mm

## 3.2 Optické zobrazování

Pracovat budeme výhradně s **centrovanou optickou soustavou**, kdy středy křivosti všech lámavých ploch leží na jedné ose. Omezíme se přitom na **paraxiální prostor**, tj. na takovou oblast v blízkosti optické osy, ve které můžeme s dobrým přiblížením nahradit všechny funkce  $\tan \alpha$  a  $\sin \alpha$  velikostí úhlu  $\alpha$ , vyjádřenou v radiánech (prakticky pro  $\alpha \leq 2^\circ$ ). Znaménková konvence bude uvedena u konkrétních příkladů.

**Příčné ( $m$ ) a úhlové ( $g$ ) zvětšení** optického systému je definováno vztahy

$$m = \frac{y'}{y} \quad g = \frac{\tau'}{\tau}, \quad (3.5)$$

kde  $y$  je příčná velikost předmětu a  $\tau$  jí příslušející zorný úhel,  $y'$  příčná velikost obrazu a  $\tau'$  jí příslušející zorný úhel.

### Odraz na kulových zrcadlech

Pro zobrazení v paraxiálním prostoru kulového zrcadla platí vztah

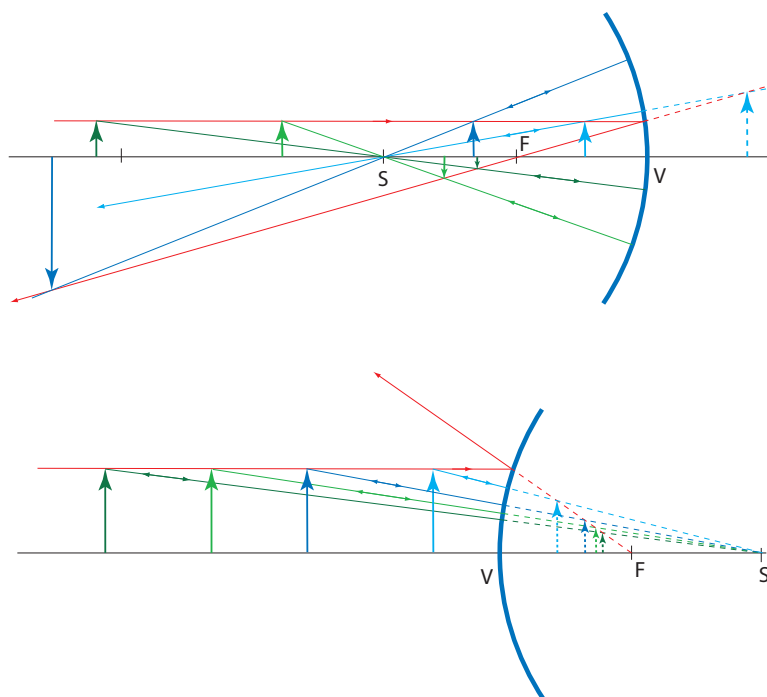
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}, \quad (3.6)$$

přitom vzdálenosti předmětu  $a$  a jeho obrazu  $b$  od vrcholu zrcadla měříme před zrcadlem kladně a za zrcadlem záporně. U konkávního (dutého) zrcadla je poloměr křivosti  $r$  a ohnisková vzdálenost  $f$  kladná, u konvexního (vypuklého) zrcadla jsou  $r$  i  $f$  záporné. Vlastnosti obrazů vytvořených zrcadly jsou na obr. 41.

### Tenká čočka

Pro zobrazení v paraxiálním prostoru tenké čočky platí vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (3.7)$$



Obrázek 41: Zobrazení dutým (nahore) a vypuklým (dole) zrcadlem

Vzdálenost předmětu  $a$  od optického středu čočky před čočkou a vzdálenost obrazu  $b$  od optického středu čočky za čočkou považujeme za kladnou, v opačném případě za zápornou. U spojky je ohnisková vzdálenost  $f$  kladná, u rozptylky záporná. Vlastnosti obrazů vytvořených čočkami jsou na obr. 42.

### Grafická konstrukce obrazu

Při grafické konstrukci obrazu postupujeme tzv. třípaprskovou metodou zobrazení mimoosového předmětu v paraxiálním prostoru (obr. 43)

- paprsek spojující zobrazovaný bod s optickým středem čočky nemění po průchodu čočkou svůj směr - (1),
- paprsek vedený zobrazovaným bodem rovnoběžně s optickou osou se po průchodu čočkou láme do obrazového ohniska - (2),
- paprsek, spojující zobrazovaný bod s předmětovým ohniskem, jde po průchodu čočkou rovnoběžně s optickou osou v obrazovém prostoru - (3).

Jestliže konstrukcí získáme v obrazovém prostoru rozbíhavý (divergentní) svazek paprsků, znamená to, že vznikl zdánlivý obraz. Tento vytvoříme protažením paprsků proti směru jejich šíření až do společného průsečíku.

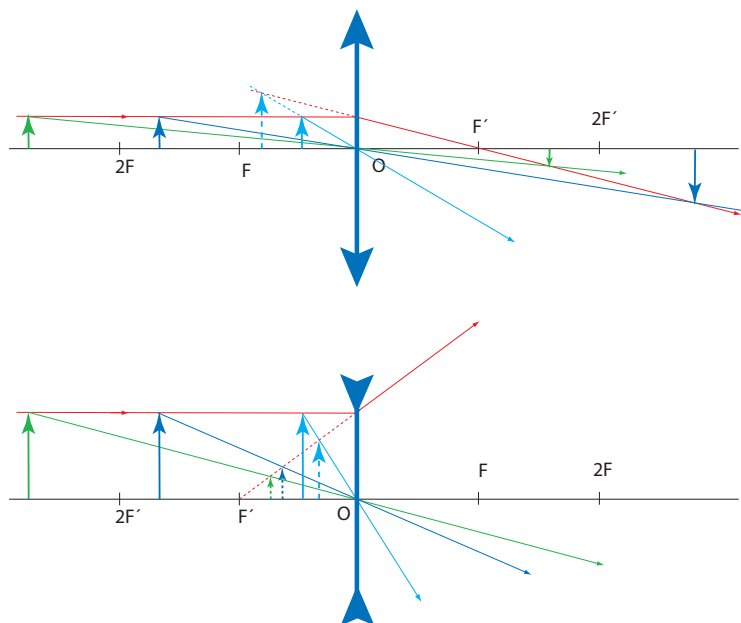
### Optické přístroje

#### Lupa (viz obr. 44)

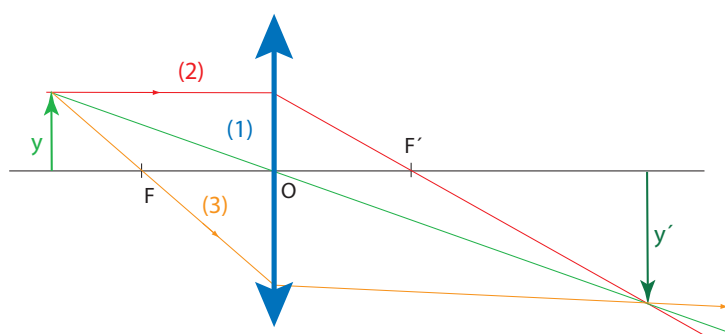
Předmět umístíme mezi lupu a předmětové ohnisko do takové polohy, aby obraz vznikl v konvenční zrakové vzdálenosti  $L$  od oka. Pro zvětšení lupy dostáváme pomocí ohniskové vzdálenosti  $f$

$$Z = \frac{L}{f} + 1 \doteq \frac{L}{f} \quad (f \ll L) \quad (3.8)$$

#### Mikroskop (viz obr. 45)



Obrázek 42: Zobrazení spojkou (nahore) a rozptylkou (dole)



Obrázek 43: Zobrazovací paprsky pro čočku

Okulárem pozorujeme obraz, vytvořený objektivem. Zvětšení mikroskopu je dáno vztahem

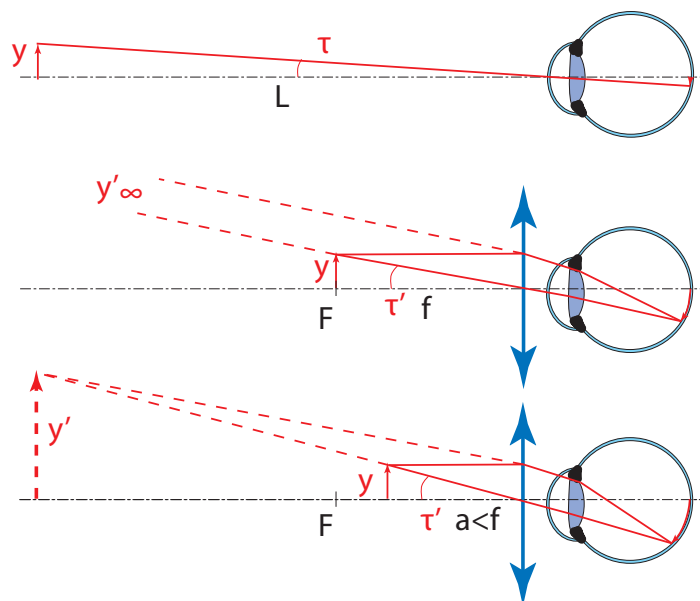
$$Z = \frac{\Delta}{f_{obj}} \frac{L}{f_{ok}}, \quad (3.9)$$

kde  $\Delta$  je tzv. optický interval (vzdálenost ohniska objektivu od ohniska okuláru) a  $f_{obj}$  ( $f_{ok}$ ) jsou ohniskové vzdálenosti objektivu (okuláru).

**Dalekohled** (viz obr. 46)

Ohnisko objektivu splývá s ohniskem okuláru, tzn. že optický interval  $\Delta = 0$ . Zvětšení dalekohledu určíme pomocí ohniskové vzdálenosti objektivu  $f_{obj}$  a ohniskové vzdálenosti okuláru  $f_{ok}$ , resp. užitím průměru  $d$  vstupní pupily (průměr objímky objektivu) a průměru  $d'$  výstupní pupily

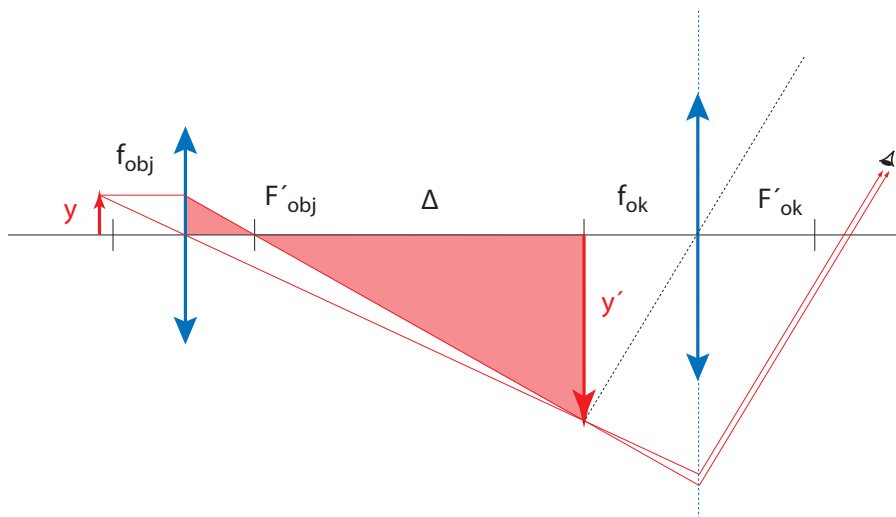
$$Z = \frac{f_{obj}}{f_{ok}} = \frac{d}{d'}. \quad (3.10)$$



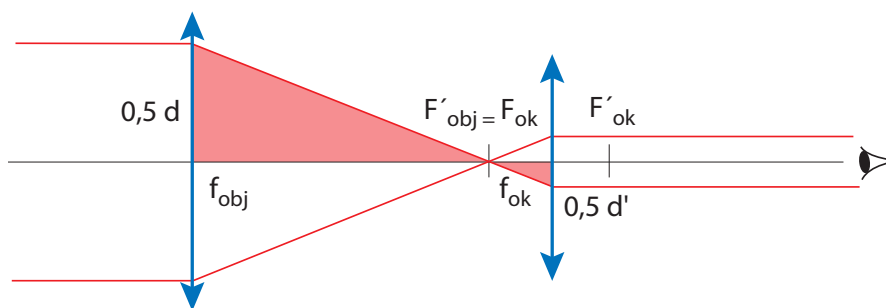
Obrázek 44: Lupa

119. Svíčka stojí 60cm před dutým zrcadlem. Když ji přiblížíme k zrcadlu o 10cm, zvětší se vzdálenost obrazu od zrcadla o 80cm. Jaká je ohnisková vzdálenost zrcadla?  
 $f = 40\text{cm}$  nebo  $85,7\text{cm}$
120. Jestliže se předmět, který byl původně ve vzdálenosti 60cm od konkávního zrcadla, posune o 10cm blíže k němu, pak vzdálenost předmětu a jeho obrazu vzroste 2,5 krát. Určete ohniskovou vzdálenost zrcadla.  
 $f = 40\text{cm}$  nebo  $37,5\text{cm}$
- ✓ 121. Konkávní zrcadlo vytváří reálný převrácený obraz, který je třikrát větší než předmět a nachází se ve vzdálenosti 28cm od předmětu. Najděte ohniskovou vzdálenost zrcadla.  $f = 10,5\text{cm}$
- ✓ 122. Konkávní zrcadlo na holení má ohniskovou vzdálenost rovnou 15cm. Najděte optimální vzdálenost osoby od zrcadla, je-li pro pozorování okem nejvhodnější vzdálenost 25cm od pozorovaného objektu. Jaké bude v tomto případě zvětšení?  
 $a = 8\text{cm}$ ,  $m = 2,125$
123. Předmět leží 30cm vlevo od konvexního kulového zrcadla o poloměru křivosti 20cm. Najděte polohu obrazu (a) výpočtem (b) graficky.  
 (a)  $-7,5\text{cm}$  (b) viz obr. 41, vypuklé zrcadlo, tmavozelený předmět
- ✓ 124. Zdroj je zafixován ve vzdálenosti  $L$  od stínítka. Vypočítejte, do jaké vzdálenosti od zdroje je třeba umístit tenkou spojku s ohniskovou vzdáleností  $f$ , aby se na stínítku vytvořil reálný obraz zdroje. Najděte podmínku, kdy je úloha řešitelná.  
 Řešení:  $a = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - fL}$ , tato poloha existuje, jen když  $L \geq 4f$
125. Dokažte, že nejmenší vzdálenost mezi předmětem a jemu příslušejícím obrazem, vytvořeným spojkou o ohniskové vzdálenosti  $f$ , je rovna  $4f$ .
126. Jaká je ohnisková vzdálenost tenké spojky a jaké zvětšení poskytuje, když předmět vzdálený od ní 20cm se zobrazí za čočkou ve vzdálenosti 35cm?  
 $12,73\text{cm}$ ;  $-1,75$
127. Spojka o ohniskové vzdálenosti 42cm dává třikrát zvětšený zdánlivý obraz předmětu. Najděte polohu předmětu a jeho obrazu.  
 $28\text{cm}$   $-84\text{cm}$





Obrázek 45: Mikroskop



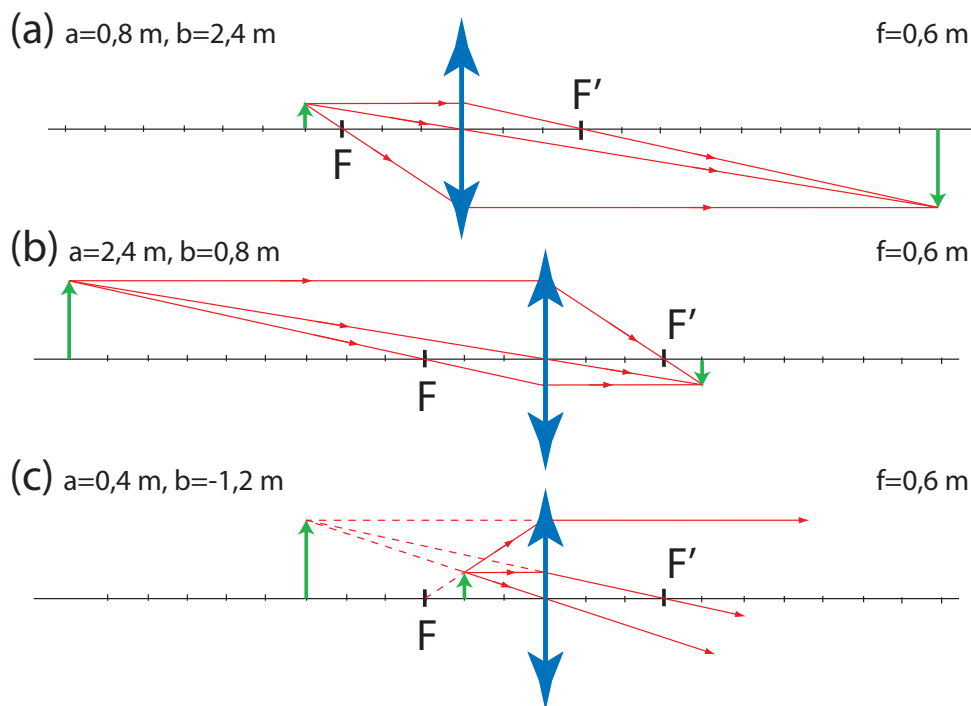
Obrázek 46: Keplerův dalekohled

128. Tenká dvojnásobná čočka optické mohutnosti  $D$  vytvoří obraz se zvětšením  $m$ . Vypočítejte, v jaké vzdálenosti od ní má být předmět a kde se vytvoří jeho obraz.  $a = \frac{m-1}{mD}$   $b = \frac{1-m}{D}$
- ✓ 129. Spojka vytvoří obraz svítícího zdroje na stínítku ve vzdálenosti 1 m od zdroje. Když čočku posuneme o 20 cm blíže ke stínítku (při zafixované poloze zdroje a stínítku), vznikne na stínítku znovu obraz zdroje. Jaká je ohnisková vzdálenost čočky? 24 cm
- ✓ 130. Spojka zobrazí předmět na stínítku tak, že výška obrazu je 9 cm. Když pohybujeme čočkou ke stínítku, aniž bychom měnili polohu předmětu a stínítku, vznikne znovu ostrý obraz předmětu tak, že jeho výška je 4 cm. Vypočítejte skutečnou výšku předmětu. 6 cm
131. Spojka má ohniskovou vzdálenost 0,60 m. Najděte polohu předmětu, jehož obraz je
- skutečný a třikrát zvětšený
  - skutečný a třikrát zmenšený
  - zdánlivý a třikrát zvětšený.

Konstrukci ve všech třech případech zakreslete.

Řešení: (a) 0,8 m (b) 2,4 m (c) 0,4 m, konstrukce viz obr. 47

132. Ohnisková vzdálenost lupy je 125 mm.



Obrázek 47: Zobrazení spojkou: (a) obraz skutečný a třikrát zvětšený, (b) obraz skutečný a třikrát zmenšený, (c) obraz zdánlivý a třikrát zvětšený.

(a) Jaké je její zvětšení, jestliže obraz vznikne v nekonečnu?

(b) Jaké je zvětšení lupy, jestliže obraz vznikne 25 cm před okem?

(a) 2 (b) 3

### 3.3 Interference

Při skládání dvou světelných vln je výsledná intenzita v určitém bodě prostoru dána vztahem

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi, \quad (3.11)$$

kde  $\varphi$  je rozdíl fází obou vln (viz obr. 48).

**Nekoherentní zdroje** Jedná-li se o vlnění ze dvou nezávislých zdrojů, pak fázový rozdíl se mění zcela nahodile a časová střední hodnota výrazu  $\cos \varphi$  je rovna nule. Průměrná intenzita je součtem intenzit obou zdrojů

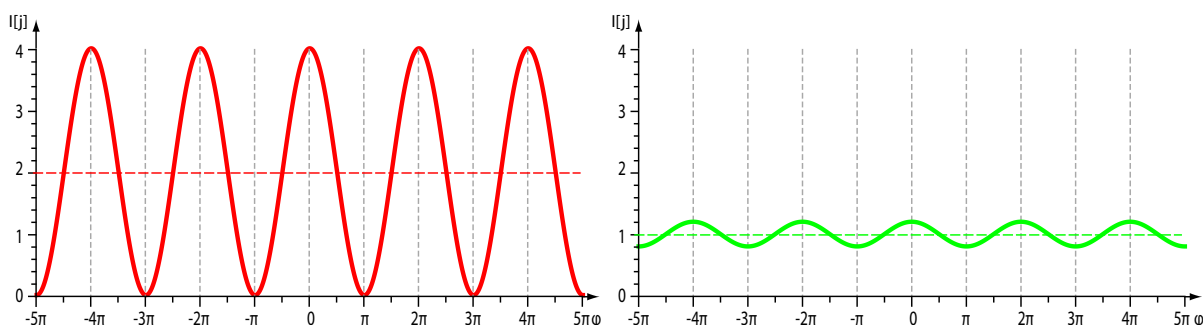
$$I = I_1 + I_2 \quad (3.12)$$

a mluvíme o skládání nekoherentních vln.

**Koherentní zdroje** Pro koherentní vlnění je fázový rozdíl  $\varphi$  stálý a vede k jevům interference. Poslední člen v rovnici (3.11) se nazývá interferenční. V závislosti na něm se výsledná intenzita může měnit v rozmezí hodnot

$$I = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (3.13)$$

Z rovnice (3.11) vyplývá, že pokud fázový rozdíl splňuje podmínku



Obrázek 48: Interference dvou koherentních zdrojů světla podle vztahu (3.11); červeně pro intenzity zdrojů  $I_1 = I_2 = 1$ , zeleně pro  $I_1 = 1, I_2 = 0,01$  (čárkovaná čára naznačuje součet  $I_1 + I_2$ ). Viditelnost červené křivky je 1, zelené 0,2.

$$\varphi = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.14)$$

pak nastává interferenční maximum (konstruktivní interference), je-li

$$\varphi = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.15)$$

nastává interferenční minimum (destruktivní interference).

Pro charakteristiku interferenčního jevu zavádíme tzv. **viditelnost**  $V$

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (3.16)$$

kde  $I_{max}$  jsme označili intenzitu maxima interferenčního jevu a  $I_{min}$  intenzitu jeho minima. Viditelnost interferenčních proužků může sloužit jako míra koherence.

**Částečná koherence** Skutečné případy interference bývají pouze částečně koherentní. Dobou koherence  $\tau_0$  rozumíme čas, po který se ve vlně zachovává konstantní fáze. Dráha, kterou vlnění urazí za čas  $\tau_0$ , je tzv. koherenční délka  $l$

$$l = c\tau_0. \quad (3.17)$$

Šířka frekvenčního intervalu  $\Delta\nu$  daného zdroje je nepřímo úměrná době koherence

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_0}. \quad (3.18)$$

**Získávání koherentních paprsků** Klasické způsoby získávání koherentních paprsků, schopných trvalé interference, jsou:

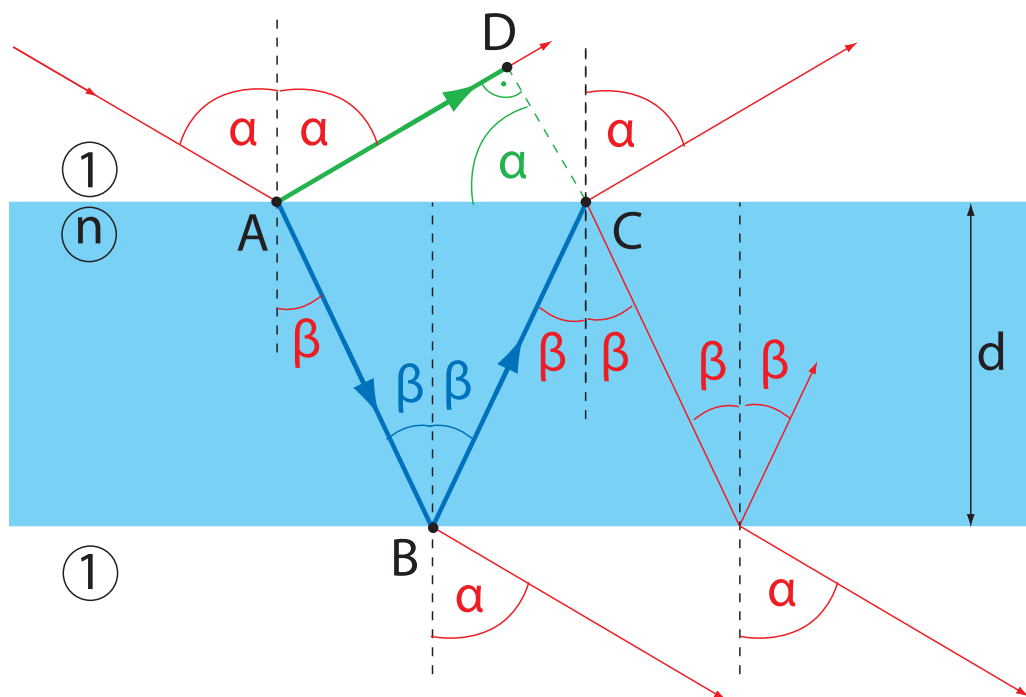
- **dělení vlnoplochy** (pokusy Youngovy, Newtonovy, Fresnelovy atd.)
- **dělení amplitudy** (interferenční jevy na tenkých vrstvách).

133. Dva stejné světelné zdroje jsou umístěny velmi blízko u sebe. Kolikrát se zvětší intenzita ve směru osy spojnice obou zdrojů, přidáme-li k nim ještě jeden stejný zdroj? Řešte pro

- a) koherentní zdroje kmitající ve fázi,
- b) zcela nekoherentní zdroje.

(a) 2,25, (b) 1,5

134. Pro proměření interferenčního obrazce při Youngově pokusu byl použit CCD čip umístěný ve vzdálenosti 38,5 cm od dvojštěrbiny. Bylo zjištěno, že první maximum je od hlavního (nultého) maxima vzdáleno o 63 pixelů. Jaká je vlnová délka použitého světla? Vzdálenost štěrbin je 0,47 mm a vzdálenost sousedních pixelů 9  $\mu\text{m}$ .  $\lambda = 692 \text{ nm}$
- ✓ 135. Vypočítejte vzdálenost prvního, druhého a třetího maxima od centrálního maxima při Youngově pokusu, a to pro fialové světlo vlnové délky 400 nm a pro červené světlo vlnové délky 700 nm. Vzdálenost středů štěrbin je 0,1 mm, kolmá vzdálenost stínítka od štěrbin je 0,5 m.  
 $x_f = 2; 4; 6; \dots \text{ mm}$       $x_c = 3, 5; 7, 0; 10, 5; \dots \text{ mm}$
136. Při Youngově pokusu vznikly na stínítku umístěném ve vzdálenosti 1,2 m od štěrbin interferenční proužky, jejichž vzdálenost je 1,5 mm. Určete vlnovou délku použitého světla, je-li vzdálenost středů štěrbin 0,45 mm.  $\lambda = 562 \text{ nm}$
137. Při Youngově pokusu je vzdálenost štěrbin  $d = 0,6 \text{ mm}$ . Na stínítku ve vzdálenosti 5 m jsou interferenční maxima vzdálena o  $x = 4 \text{ mm}$ .
- (a) Jaká je vlnová délka světla použitého světla?  
 (b) Jak se změní rozložení intenzity na stínítku, provedeme-li pokus ve stejném uspořádání pod vodou?
- Řešení:
- (a)  $\lambda = 480 \text{ nm}$  - modré světlo  
 (b) interferenční maxima budou vzdálena o  $x = 3 \text{ mm}$
- ✓ 138. Odvoďte hodnotu dráhového rozdílu mezi paprsky interferujícími na tenké vrstvě tloušťky  $d$ , je-li index lomu vrstvy  $n = 1,46$ . Úhel dopadu paprsků je  $\alpha$ . Řešte pro prošlé a odražené světlo. Jaký bude fázový rozdíl paprsků? Vrstva je obklopena prostředím o nižším indexu lomu.  
*viz obr. 49, na odraz  $\varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \beta + \pi$ , na průchod  $\varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \beta$ .*
- ✓ 139. Tenká vrstvička vody ( $n_v = 1,33$ ) má tloušťku 320 nm. Jaké bude její zbarvení ve vzduchu (na odraz), je-li osvětlena kolmo bílým světlem?  
*Ve viditelné oblasti leží pouze maximum pro  $\lambda = 567 \text{ nm}$  - žlutá barva*
140. Najděte tloušťku mýdlové blány ( $n = 1,33$ ), na níž by se odráželo žluté světlo vlnové délky  $\lambda = 600 \text{ nm}$ . Předpokládejte kolmý dopad a odraz prvního řádu. Jaká je vlnová délka tohoto světla v mýdlové vrstvě?  $d = 113 \text{ nm}$       $\lambda = 451 \text{ nm}$
141. Ukažte, že na skleněné destičce o indexu lomu  $n$ , pokryté tenkou vrstvou o indexu lomu  $n_v = \sqrt{n}$  tloušťky  $\frac{\lambda}{4}$ , dochází při kolmém dopadu světla vlnové délky  $\lambda$  k destruktivní interferenci paprsků odražených od horní a dolní plochy omezující tenkou vrstvou. (Tohoto způsobu se používá ke snížení odrazivosti čoček a desek optických přístrojů a taková vrstva se nazývá antireflexní vrstvou.)
142. Určete tloušťku dielektrické antireflexní vrstvy na skleněném objektivu tak, aby minimum odrazivosti prvního řádu nastalo při vlnové délce 546 nm (zelená čára Hg). Předpokládejte přibližně kolmý dopad světla na povrch objektivu a stejnou odrazivost na obou rozhraních vrstvy. Index lomu vrstvy je 1,72.  $d = 159 \text{ nm}$
143. Mýdlová blána má index lomu  $n = 1,35$ . Monochromatické světlo o vlnové délce  $\lambda = 550 \text{ nm}$  dopadá kolmo na mýdlovou blánu, jejíž tloušťka se vlivem působení síly tíže klínovitě zvětšuje.
- (a) Jaká tloušťka blány odpovídá prvnímu jasnému proužku v odraženém světle?

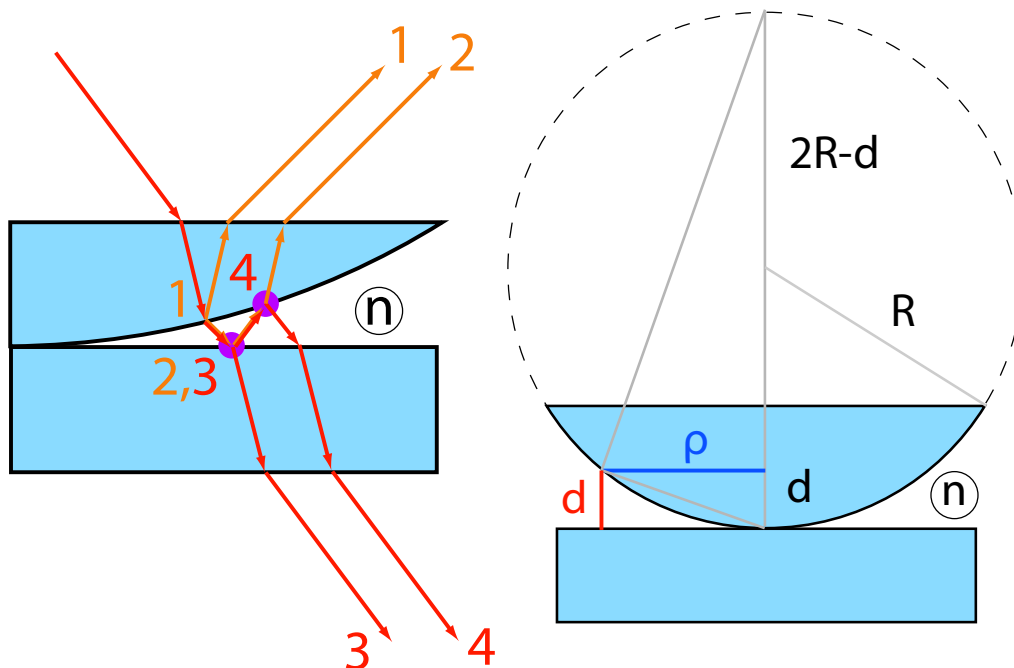


Obrázek 49: Dráhový rozdíl paprsků 1 a 2 je roven  $\Delta = n(|AB| + |BC|) - |AD| = 2nd \cos \beta$ , pro odraz je k tomuto výrazu potřeba přičíst  $\frac{\lambda}{2}$ .

- (b) Jaká tloušťka blány odpovídá druhému jasnému proužku?  
 (c) Je-li vzdálenost těchto dvou sousedních proužků právě 3 mm, jaký je vrcholový úhel této klínové vrstvy?

(a) 204nm      (b) 408nm      (c)  $4 \cdot 10^{-3}$  rad ( $14''$ )

144. Dvě vybroušené rovinné destičky jsou na sobě položeny tak, že se na jednom konci dotýkají a na druhém ve vzdálenosti  $a = 10$  cm je vložen staniolový lístek tloušťky  $h = 0,02$  mm. Určete vzdálenost dvou sousedních interferenčních maxim, když kolmo na vrstvu dopadá monochromatický svazek světla o vlnové délce 589 nm. 1,4725 mm
145. Dvě skleněné destičky dlouhé 0,10 m položíme na sebe. Na jedné straně mezi ně vložíme kovový proužek, jehož výška je 0,1 mm, tak, že mezi oběma deskami se vytvoří tenký vzduchový klín. Sklo je osvětleno shora světlem vlnové délky 546 nm. Kolik tmavých interferenčních proužků budeme pozorovat v odraženém světle na 1 cm délky? 36,63 proužků/cm
- ✓ 146. Položíme-li plankonvexní čočku konvexní plochou na rovinnou skleněnou desku a systém osvětlíme shora monochromatickým světlem, vzniknou Newtonovy interferenční kroužky, které pozorujeme v odraženém světle (viz obr 50). Ukažte, že poloměr světlých Newtonových kroužků, vznikajících na plankonvexní čočce s poloměrem křivosti  $R$ , se dá vyjádřit vztahem  $\rho^2 = (2m + 1) \frac{\lambda R}{2}$ , poloměr tmavých kroužků  $\rho^2 = m\lambda R$ , kde  $m = 0, 1, 2, \dots$  a  $\lambda$  vlnová délka použitého světla.
147. Plankonvexní skleněná čočka o poloměru křivosti  $R$  je položena svou konvexní plochou na rovinnou skleněnou desku o tloušťce  $D = 1$  cm. Celek je osvětlen shora monochromatickým světlem (o vlnové délce  $\lambda$ ). Stanovte poloměr světlých interferenčních proužků v prošlém světle.  $\rho^2 = m\lambda R$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$



Obrázek 50: Newtonova skla – vpravo zakreslena konstrukce a způsob, jak určit poloměr  $\rho$  interferenčního kroužku pomocí tloušťky vzduchové mezery  $d$  a poloměru křivosti čočky  $R$  ( $2R \gg d$ ), vlevo chod paprsků interferujících na odraz (1,2) a na průchod (3,4). V místech označených fialovými kroužky dochází při odrazu na skle ke změně fáze o  $\pi$ .

148. Plankonvexní čočka má poloměr křivosti kulové plochy  $R = 4$  m. Tuto čočku položíme konvexní plochou na rovinnou skleněnou desku a systém osvětlíme monochromatickým světlem. Poloměr prvního jasného Newtonova interferenčního kroužku v prošlém světle je  $\rho_1 = 1$  mm.

- (a) Jaká je vlnová délka použitého monochromatického světla?  
 (b) Jaký bude poloměr prvního světlého kroužku, vyplníme-li prostor mezi čočkou a deskou vodou ( $n_v = 1,33$ )?

(a) 250 nm (b) 0,86 mm

©149. Vyjádřete vztah 3.17 pro koherenční délku vlny pomocí šířky spektrální čáry  $\Delta\lambda$  odpovídající její frekvenční šířce  $\Delta\nu$ .

$$l = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$$

©150. Vypočítejte koherenční délku odpovídající světlu výbojky s koherenční dobou  $\tau_0 = 10^{-9}$  s. Vypočítejte spektrální šířku  $\Delta\lambda$  tohoto světla, je-li  $\lambda = 600$  nm.  $l = 0,3$  m  $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-12}$  m

©151. Klínová vrstva je osvětlena bílým světlem z bodového zdroje. Odhadněte interval její tloušťky, pro který je na vrstvě možné okem pozorovat interferenční obrazec. Jak se výsledek změní, použijeme-li monochromatický zdroj čáry  $H_\beta$  ( $\lambda = 488$  nm, pološířka čáry (celá šířka v polovině výšky) 0.02 nm)?

polovina z hodnot 1,8  $\mu$ m, 12 mm

### 3.4 Ohyb

Při pozorování chování světla v blízkosti neprůhledných překážek zjišťujeme, že se světlo šíří i do oblasti geometrického stínu – dochází k ohybu světelných paprsků. Z metodických důvodů rozlišujeme ohyb rovinných světelných vln (Fraunhoferova difrakce) a ohyb kulových vln (Fresnelova difrakce), my se budeme zabývat Fraunhoferovým ohybem.

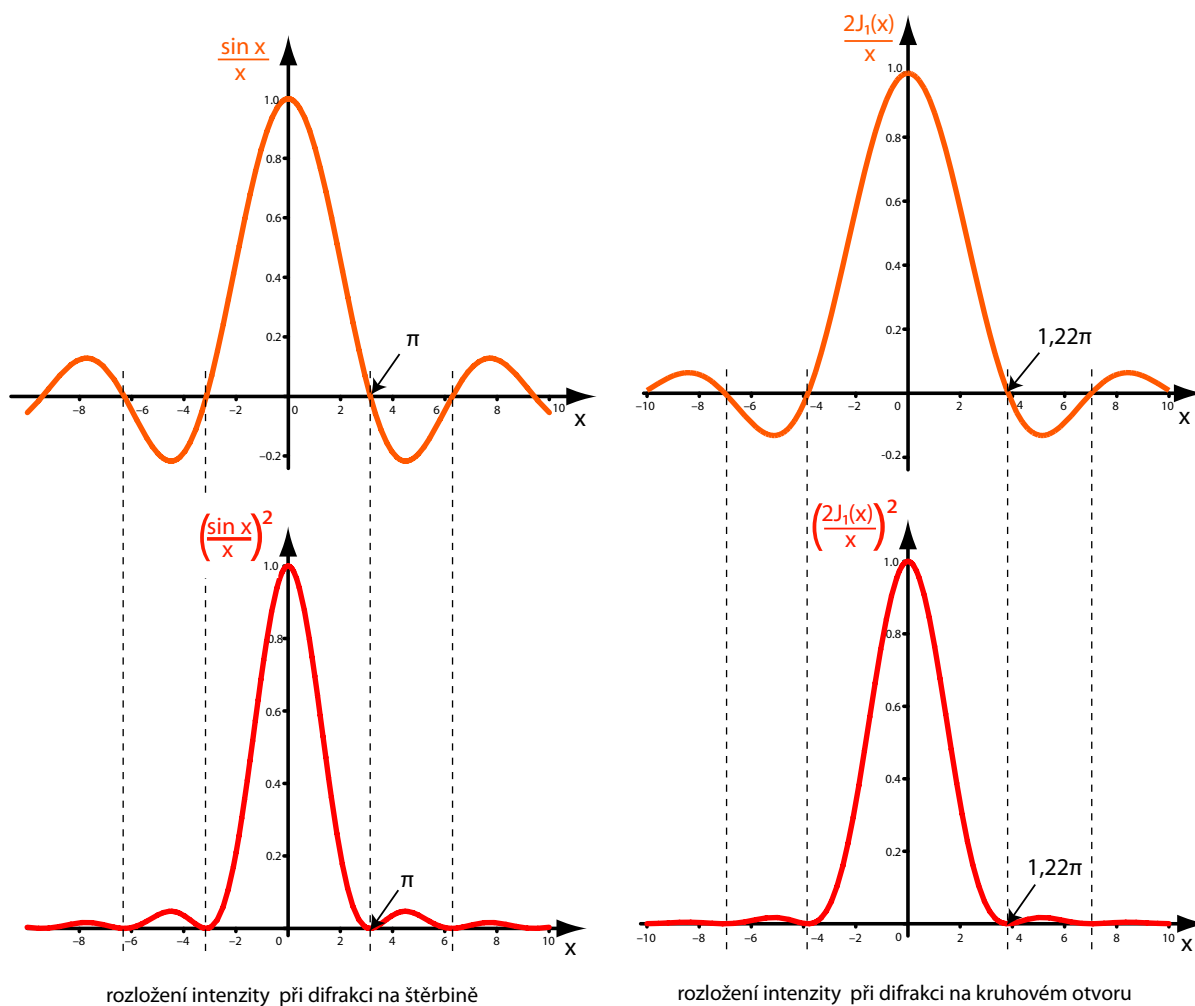
#### Ohyb na obdélníkové štěrbině

Dopadá-li na obdélníkovou, velmi dlouhou štěrbinu šířky  $b$  rovinná monochromatická vlna vlnové délky  $\lambda$ , jejíž vlnový vektor  $\vec{k}$  je kolmý k rovině štěrbinu, pak intenzita světla po průchodu štěrbinou v místě, určeném směrem odklonu  $\alpha$ , je dána vztahem

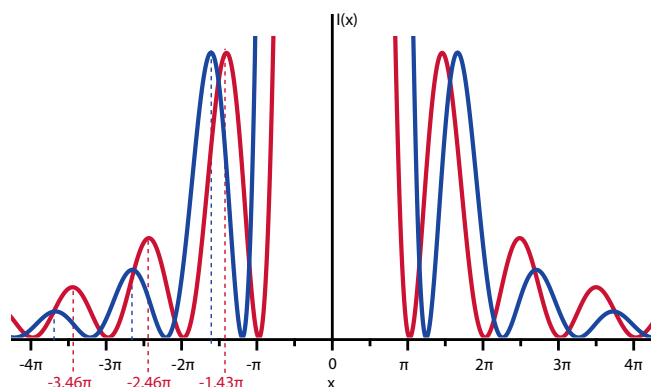
$$I = I_0 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad (3.19)$$

kde  $x = kb \sin(\alpha)/2$  a  $I_0$  je intenzita světla uprostřed středního světelného proužku, tj. pro  $\alpha = 0$ . Grafické znázornění závislosti intenzity  $I$  na směru odklonu  $\alpha$  je ukázáno na obr. 54 vlevo. Poloha tmavých proužků (ohybových minim) je určena podmínkou

$$b \sin \alpha = m\lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.20)$$



Obrázek 51: Difrakce na obdélníkové štěrbině (vlevo) a na kruhovém otvoru (vpravo).



Obrázek 52: Polohy maxim a minim pro ohyb na šterbině (červeně) a kruhovém otvoru (modře). Křivky jsou vykresleny tak, že intenzity prvních ohybových maxim jsou stejné.

### Ohyb na obdélíkovém otvoru

Intenzita  $I$  při ohybu na obdélíkovém otvoru, jehož rozměry jsou  $b$  a  $c$ , je dána vztahem

$$I = I_0 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2, \quad (3.21)$$

kde  $x = kb \sin(\alpha)/2$  a  $y = kc \sin(\beta)/2$ .

### Ohyb na kruhovém otvoru

Intenzita světla  $I$  při ohybu na kruhovém otvoru průměru  $D$  ve směru, který svírá s osou otvoru úhel  $\alpha$ , je dána vztahem

$$I = I_0 \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (3.22)$$

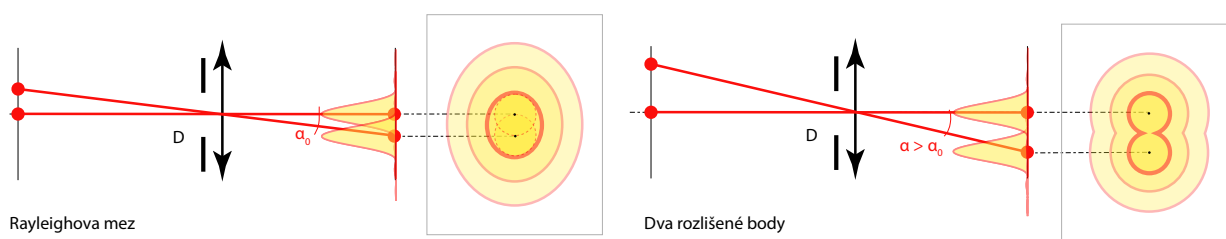
kde  $x = kD \sin(\alpha)/2$  a výraz  $J_1(x)$  reprezentuje Besselovu funkci prvního druhu řádu jedna. Pro ohybový obrazec (obr. 54 vpravo) dostáváme, že jeho středová světla ploška má úhlový poloměr dán vztahem

$$\sin \alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (3.23)$$

který pro  $D \gg \lambda$  přechází ve tvar

$$\alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3.24)$$

**Rayleighovo rozlišovací kritérium** Dva objekty jsou na hranici rozlišení, jestliže centrální difrakční maximum jednoho padne do prvního minima druhého – viz obr. 53.



Obrázek 53: Rozlišení



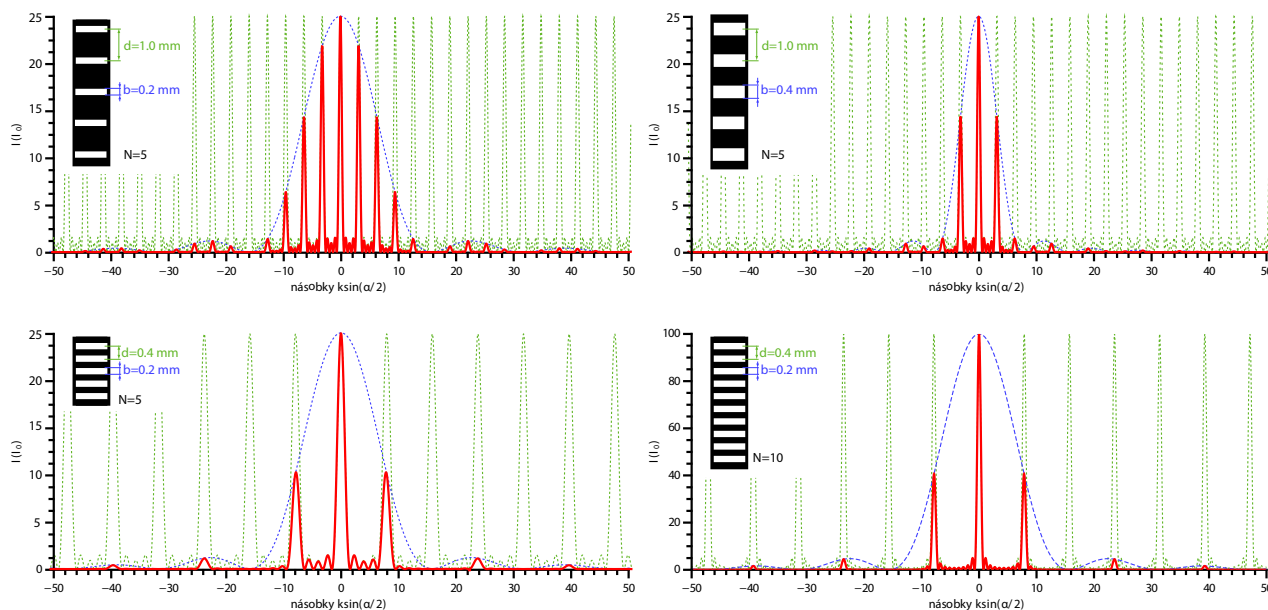
**Difrakční mřížka** je soustava  $N$  štěrbin stejné šířky  $b$ . Vzdálenost mezi středy sousedních štěrbin  $d$  se nazývá mřížková konstanta. Intenzita difrakčního obrazce je při kolmém dopadu světla dána vztahem

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2[kb \sin(\alpha)/2]}{[kb \sin(\alpha)/2]^2} \cdot \frac{\sin^2[Nkd \sin(\alpha)/2]}{\sin^2[kd \sin(\alpha)/2]}, \quad (3.25)$$

kde první zlomek je tzv. difrakční (otvorový) faktor a druhý zlomek tzv. interferenční (mřížkový) faktor. Pro kolmý dopad světelného záření vlnové délky  $\lambda$  je poloha tzv. hlavních maxim dána vztahem

$$d \sin \alpha = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.26)$$

Hlavní maxima, která padnou do minim otvorového faktoru, nejsou pozorována.



Obrázek 54: Difrakce na mřížkách s různým počtem štěrbin  $N$ , s různou šířkou štěrbin  $b$  a různými vzdálenostmi středů štěrbin  $d$ . Vždy zeleně: „čistá“ interference daná druhým členem součinu v 3.25, modře: „čistá“ difrakce daná prvním členem součinu v 3.25 vynásobená  $N^2$ , červeně: výsledný obrazec daný 3.25. Intenzita v posledním obrázku je 4x větší než v předchozích, což je způsobeno zvětšením počtu štěrbin.

Důležitým parametrem mřížek používaných pro spektrální analýzu je úhlová disperze

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \alpha}, \quad (3.27)$$

kde  $m$  je řád difrakčního maxima a  $d$  je mřížková konstanta.

Rozlišovací schopnost mřížky s celkovým počtem vrypů  $N$  pro řád maxima  $m$  je definována

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN, \quad (3.28)$$

kde  $\Delta\lambda$  je vzdálenost vlnových délek, které mřížka právě ještě rozliší.

152. Rovnoběžný svazek monochromatického světla o vlnové délce 450 nm dopadá kolmo na štěrbinu šířky 1 mm. Těsně za štěrbinou je umístěna čočka s ohniskovou vzdáleností 1 m. Na stínítku, umístěném v ohniskové rovině čočky, se vytvoří ohybový obraz. Určete vzdálenost minima prvního, druhého a třetího řádu od hlavního maxima.  
 $x_1 = 0,45 \text{ mm}$      $x_2 = 0,9 \text{ mm}$      $x_3 = 1,35 \text{ mm}$

153. Obdélníková štěrbiná je osvětlena světlem vlnové délky 500 nm. Rozměry štěrbiná jsou 1 mm x 3 mm. Jaké jsou rozměry hlavního maxima v difrakčním obrazci vytvořeném na stínítku rovnoběžném s rovinou štěrbiná a vzdáleném od ní 50 m? Světlo dopadá na štěrbinu kolmo.  
50 × 17 mm
- ✓ 154. Fraunhoferova difrakce vzniká na štěrbině šířky 0,4 mm a je zviditelněna na stínítku v ohniskové rovině čočky. Ohnisková vzdálenost použité čočky je 1 m a štěrbiná je osvětlena dvěma vlnovými délkami  $\lambda_1, \lambda_2$ . Bylo zjištěno, že čtvrté minimum pro vlnovou délku  $\lambda_1$  splývá s pátým minimem pro vlnovou délku  $\lambda_2$  a je přesně 5 mm od hlavního maxima. Určete obě vlnové délky.  
 $\lambda_1 = 500 \text{ nm}, \lambda_2 = 400 \text{ nm}$
155. Rovnoběžný svazek monochromatického světla o vlnové délce  $\lambda = 600 \text{ nm}$  prochází štěrbinou, jejíž šířka je 0,2 mm, a je zaostřen čočkou na stínítko. První minimum leží 3 mm od hlavního maxima. Určete ohniskovou vzdálenost použité čočky.  
 $f' = 1,0 \text{ m}$
156. Najděte poloviční úhlovou šířku středního světlého pruhu při Fraunhoferově ohybu na štěrbině šířky  $a = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ , je-li osvětlena monochromatickým světlem vlnové délky (a) 400 nm, (b) 700 nm.  
(a)  $16,6^\circ$  (b)  $30^\circ$
- ⊙ 157. Dokažte, že maxima při difrakci na obdélníkovém otvoru nejsou ekvidistantně vzdálena. *Maxima leží pod úhly  $\alpha$  splňujícími rovnicí  $\text{tg} \alpha = \alpha$ .*
- ✓ 158. Oční pupila má průměr 3 mm. Za použití Rayleighova kritéria určete:
- (a) Na jakou vzdálenost rozliší oko dvě rovnoběžné čáry narýsované na listě papíru ve vzdálenosti 50 cm.
- (b) Na jakou vzdálenost může oko za ideálních podmínek rozlišit přední světla automobilu, jehož reflektory jsou 180 cm od sebe?
- Pro výpočty berte vlnovou délku viditelného světla rovnu 550 nm. (a) 2,23 km, (b) 8,05 km
159. Astronaut je v kosmické lodi na oběžné dráze kolem Země ve výšce 160 km. Jak velké musí být předměty na zemském povrchu, aby je pouhým okem rozlišil? Předpokládejte, že oční pupila má průměr 4 mm a oko je nejcitlivější na vlnovou délku 550 nm.  
*Asi 27 m*
- ⊙ 160. V dírkové komoře (camera obscura) je fotografická deska vzdálena od čelní stěny o 10 cm. Jak veliký musí být otvor, abychom získali ve viditelném světle ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) snímek Slunce s nejlepším rozlišením?  
 $D = 0,13 \text{ mm}$
- ✓ 161. Při ohybu laserového světla na difrakční mřížce bylo zjištěno, že v difrakčním obrazci chybí sudá interferenční maxima. Určete šířku a vzdálenost štěrbin.  
 $b = d/2$
162. Při difrakci na mřížce detekujeme intenzivní spektrální čáru ve směru, odpovídající vlnové délce 506 nm. Je možné, že záření má ve skutečnosti jinou vlnovou délku?  
*ano*
- ✓ 163. Difrakční mřížka má hustotu vrypů 50 vr/mm. Určete, pod jakým úhlem bude ležet první hlavní maximum pro vlnovou délku 10  $\mu\text{m}$  a s jakým řádem maxima vlnové délky 500 nm se bude překrývat.  
 $\alpha = 30^\circ, m = 20$
164. Určete nejvyšší řád spektra, ve kterém můžeme ještě pozorovat červenou čáru 700 nm pomocí optické mřížky, která má na 1 mm 300 vrypů.  
 $m = 4$
165. Jakou mřížkou (tj. s jakým počtem vrypů na mm) musíme vybavit spektrometr, požadujeme-li, aby rozlišil jednotlivé komponenty sodíkového dubletu 588,9950 nm a 589,5924 nm? Spektrometr používá mřížky 72 × 72 mm. Rozliší je standardně rozšířená mřížka 1200 gr/mm? 14 gr/mm, *ano*

166. Mřížka obsahující 400 vrypů/mm je 4 cm dlouhá. Vypočtěte její rozlišovací schopnost ve spektru prvního řádu. Rozliší tato mřížka obě čáry sodíkového dubletu (589,0 a 589,6 nm)?  
 $\Delta\lambda_{min} = 0,037 \text{ nm}$      $\mathcal{R} = 16000$     rozliší
- ✓ 167. Navrhněte difrakční mřížku, pro kterou by leželo maximum třetího řádu vlnové délky 600 nm ve směru odchýleném o  $30^\circ$  od přímého směru. Rozlišovací schopnost mřížky musí být taková, že dokáže rozlišit dvě blízké vlnové délky, lišící se o 0,05 nm. Vypočtěte: (a) vzdálenost vrypů mřížky, (b) její rozlišovací schopnost, (c) minimální počet vrypů, (d) minimální rozměr mřížky.  
 (a)  $3,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$     (b) 12000    (c) 4000    (d) 1,4 cm
- ©168. Odvoďte teoretickou rozlišovací schopnost  $\mathcal{R}$  optické mřížky s  $N$  vrypy. Použijte Rayleighovo kritérium, pro jednoduchost uvažujte mřížku na průchod a kolmý dopad paprsků.  
 $\mathcal{R} = mN$ ,  $m$  – difrakční řád

### 3.5 Šíření světla na rozhraní

Na rozhraní dvou optických prostředí s indexy lomu  $n_1$  a  $n_2$  se světlo částečně odráží, částečně láme do druhého prostředí. Paprsky dopadající, odražený a lomený leží spolu s dopadovou normálou v tzv. rovině dopadu (směr  $p$ ). Rovina kolmá k rovině dopadu je tzv. polarizační rovina (směr  $s$ ).

**Fresnelovy amplitudy** Pro amplitudy odražené a lomené vlny na rozhraní dvou dielektrik platí

$$\begin{aligned}
 r_p &= \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \\
 r_s &= \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \\
 t_p &= \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta}, \\
 t_s &= \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta},
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

kde  $r$  jsou amplitudy vlny odražené,  $t$  amplitudy vlny lomené, indexy  $p$  ( $s$ ) značí složku příslušných amplitud v rovině dopadu (v polarizační rovině) (viz 55).

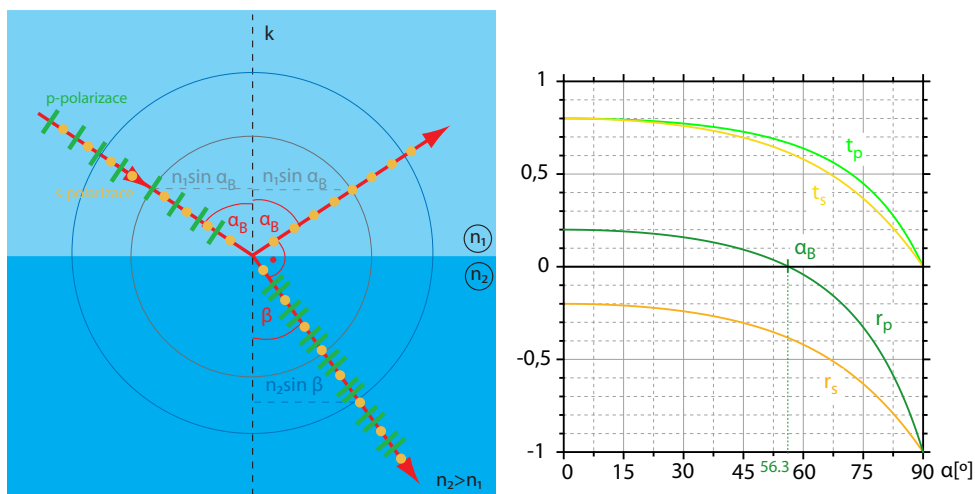
Závislost velikosti Fresnelových amplitud odraženého i lomeného světla na úhlu dopadu  $\alpha$  pro případ dopadu světla z vakua do skla ( $n_2 = 1,50$ ) je ukázán na obr. 55. Je zřejmé, že existuje úhel dopadu  $\alpha_B$ , pro který je  $r_p = 0$ . Znamená to, že světlo dopadající na rozhraní pod úhlem  $\alpha_B$  je po odrazu dokonale lineárně polarizováno tak, že elektrický vektor odražené vlny kmitá v rovině kolmé k rovině dopadu. Úhlu  $\alpha_B$  říkáme Brewsterův úhel a platí pro něj vztah

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}.
 \tag{3.30}$$

169. Určete úhel dopadu a lomu světelného paprsku, je-li paprsek odražený od skleněné destičky ( $n = 1,50$ ) zcela polarizován.     $\alpha = 56,3^\circ$      $\beta = 33,7^\circ$

170. Vypočtěte Brewsterův úhel pro následující případy:

- (a) světlo dopadá ze vzduchu na sklo s indexem lomu 1,6.  
 (b) světlo vychází ze skla s indexem lomu 1,6 do vzduchu.



Obrázek 55: Polarizace odrazem při dopadu pod Brewsterovým úhlem pro rozhraní vzduch a sklo (index lomu 1,5) - chod paprsků a závislost průběhu Fresnelových koeficientů na úhlu dopadu  $\alpha$ .

(c) rozhlasová vlna dopadá na hladinu vody, jejíž index lomu pro uvažovaný kmitočet je roven 9.

- (a)  $58^\circ$       (b)  $32^\circ$       (c)  $83,7^\circ$

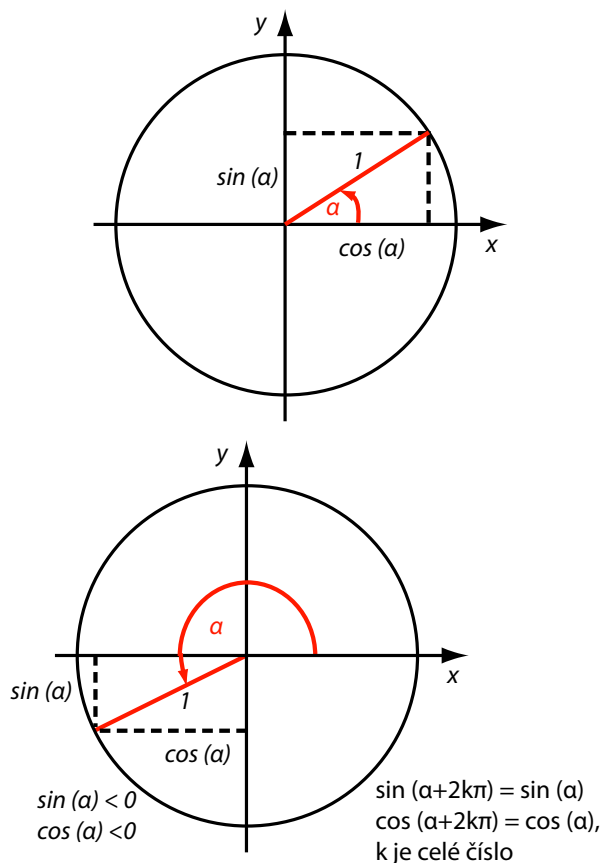
171. Mezní úhel pro světelný paprsek na rozhraní vzduch – jisté prostředí je  $45^\circ$ . Najděte Brewsterův úhel pro dopad ze vzduchu.  $35,3^\circ$

# Kapitola 4

## Matematický dodatek

### 4.1 Goniometrické funkce

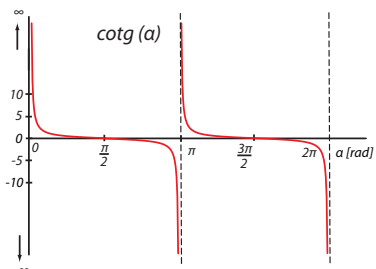
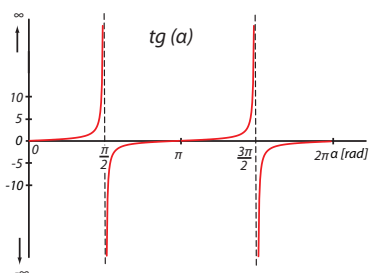
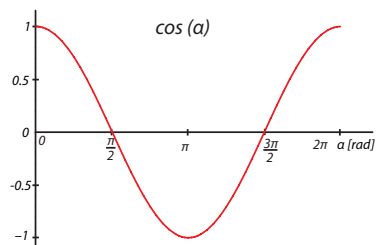
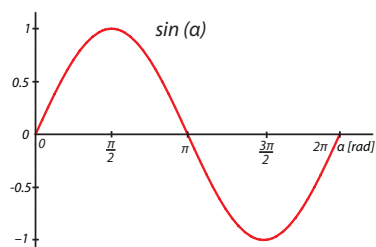
Zavedení funkcí pomocí jednotkové kružnice:



Základní hodnoty goniometrických funkcí:

| $\alpha$              | 0        | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$     | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$   |
|-----------------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------|------------------|----------|
| $\sin(\alpha)$        | 0        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0         | -1               | 0        |
| $\cos(\alpha)$        | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1        | 0                | 1        |
| $\text{tg}(\alpha)$   | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$        | 0         | $-\infty$        | 0        |
| $\text{cotg}(\alpha)$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | $-\infty$ | 0                | $\infty$ |

Grafy goniometrických funkcí:



Základní vlastnosti goniometrických funkcí:

- periodičita:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 2k\pi) & \operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 2k\pi) & \operatorname{cotg}(\alpha) &= \operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) \\ k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- lichost a sudost:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) & \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}(\alpha) \\ \operatorname{cotg}(-\alpha) &= -\operatorname{cotg}(\alpha) \end{aligned}$$

- vzájemné posunutí:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) & \operatorname{tg}(\alpha) &= -\operatorname{cotg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha) &= \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) & \operatorname{cotg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{aligned}$$

- goniometrická jednička

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

- dvojnásobný argument

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

- poloviční argument

$$\left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \quad \left| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

- součtové vzorce

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

- vzorce pro součet funkcí

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

- derivace:

$$\begin{aligned} (\sin(\alpha))' &= \cos(\alpha) & (\cos(\alpha))' &= -\sin(\alpha) \\ (\arcsin(\alpha))' &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} & (\arccos(\alpha))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \end{aligned}$$

- integrály:

$$\int \sin(\alpha) d\alpha = -\cos(\alpha) \quad \int \cos(\alpha) d\alpha = \sin(\alpha)$$

- další integrály obsahující sinus a kosinus

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin(2\alpha) \\ \int \cos^2(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) \\ \int \sin(\alpha)\cos(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

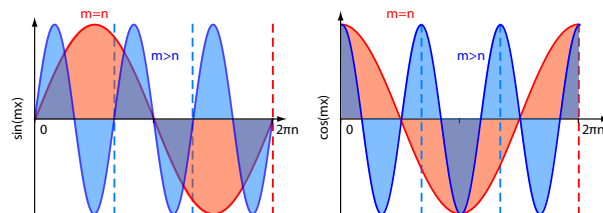
- pro  $m, n$  celé kladné,  $m \neq n$  lze vyčíslit následující integrály

$$\begin{aligned} \int \sin(m\alpha) d\alpha &= -\frac{1}{m}\cos(m\alpha) \\ \int \cos(m\alpha) d\alpha &= \frac{1}{m}\sin(m\alpha) \\ \int \sin(m\alpha)\cos(n\alpha) d\alpha &= -\frac{\cos((m+n)\alpha)}{2(m+n)} - \frac{\cos((m-n)\alpha)}{2(m-n)} \\ \int \sin(m\alpha)\sin(n\alpha) d\alpha &= -\frac{\sin((m-n)\alpha)}{2(m-n)} + \frac{\sin((m+n)\alpha)}{2(m+n)} \\ \int \cos(m\alpha)\cos(n\alpha) d\alpha &= \frac{\sin((m-n)\alpha)}{2(m-n)} + \frac{\sin((m+n)\alpha)}{2(m+n)} \\ \int \sin^n(\alpha) d\alpha &= -\frac{1}{n}\cos(\alpha)\sin^{n-1}(\alpha) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(\alpha) d\alpha \\ \int \cos^n(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{n}\sin(\alpha)\cos^{n-1}(\alpha) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

- jisté určité integrály jsou nulové, například

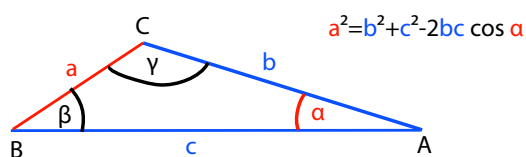
$$\int_0^{2n\pi} \sin(m\alpha) d\alpha = 0 \quad \int_0^{2n\pi} \cos(m\alpha) d\alpha = 0$$

pro  $m \geq n$  přirozené.



## 4.2 Věty určující vztahy mezi rozměry stran a úhlů v trojúhelníku

Kosinová věta:

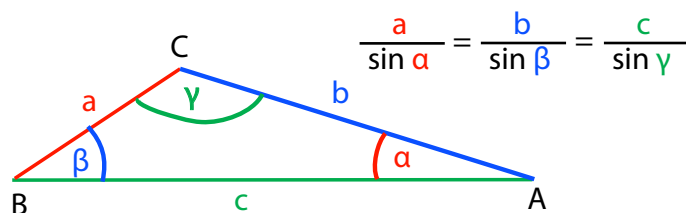


varianty pro další strany dostaneme cyklickou záměnou

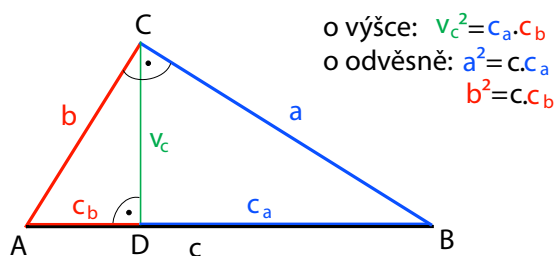


$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Sinová věta:



Euklidovy věty:



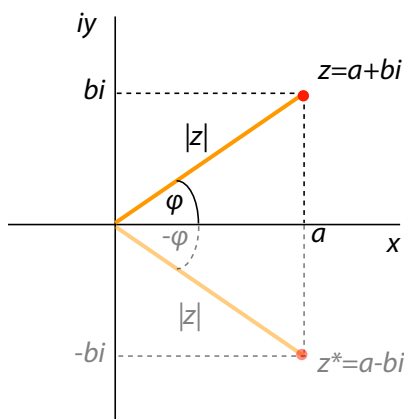
### 4.3 Komplexní čísla

Jednotlivé tvary komplexního čísla  $z$  a čísla komplexně Důležité vztahy:  
k němu sdruženého  $z^*$ :

• algebraický:  $z = a + bi$   
 $z^* = a - bi$

• goniometrický  $z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$   
 $z^* = |z|(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))$

• exponenciální  $z = |z|e^{i\varphi}$   
 $z^* = |z|e^{-i\varphi}$



• komplexní jednotka

$$i^2 = -1$$

• velikost komplexního čísla

$$|z|^2 = z \cdot z^*$$

• Eulerův vztah

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

• cosinus a sinus z Eulerova vztahu

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

### 4.4 Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální funkce:

( $p, q$  jsou reálná čísla,  $a \neq 1$  reálné kladné číslo)

•  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

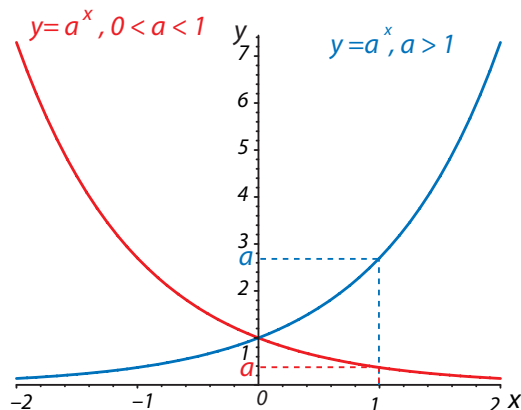
•  $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

•  $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

•  $(a^p)^q = a^{p \cdot q} = (a^q)^p$

•  $a^1 = a \quad a^0 = 1$

•  $a^{-\infty} = 0 \quad a^\infty = \infty \quad a > 1$



Logaritmické funkce:

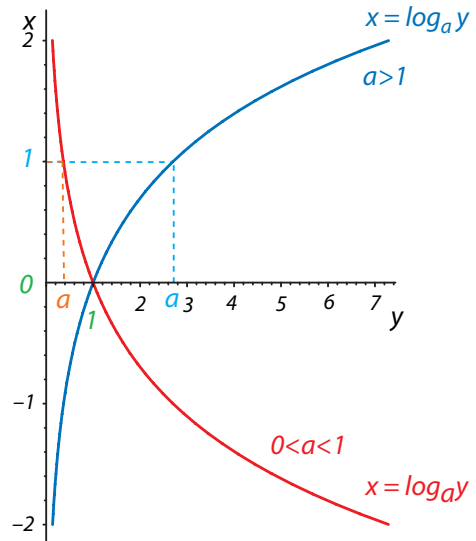
$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$$

( $p, q$  jsou reálná čísla,  $m, n, a \neq 1$  jsou čísla celá kladná)

•  $\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$

•  $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

- $\log_a(p^n) = n \log_a p$     $\log_a \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log_a p$
- $p = a^{\log_a p}$     $p = \log_a a^p$
- $\log_a a = 1$     $\log_a 1 = 0$
- $\log_a 0 = -\infty$     $\log_a \infty = \infty$     $a > 1$
- $p = q \cdot 10^{\pm n}, 1 < q < 10 \Rightarrow$   
 $\log_{10} p = \pm n + \log_{10} q = \pm n, \dots$  ( $\log_{10} q < 1$ )

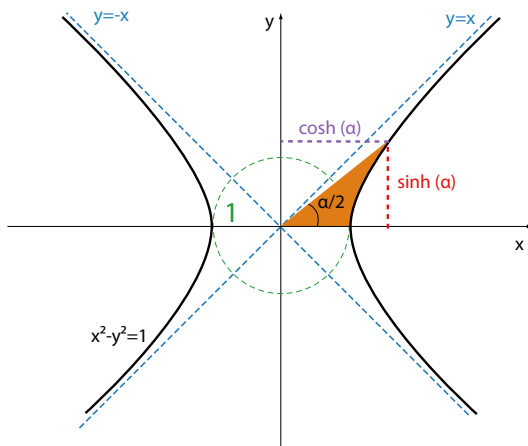


## 4.5 Hyperbolické funkce

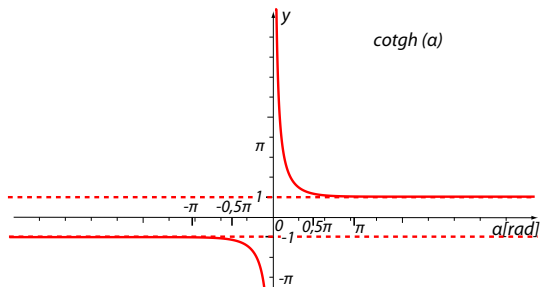
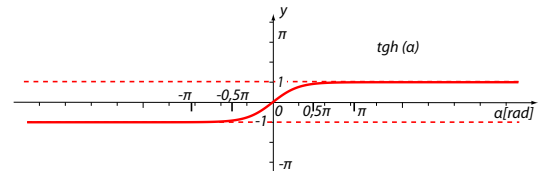
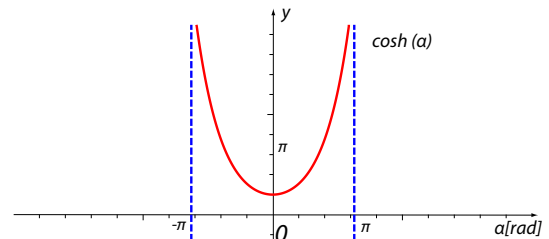
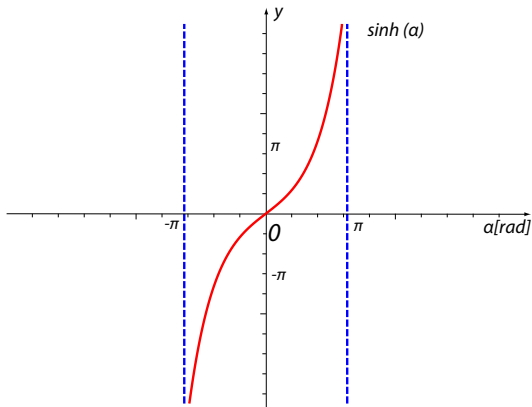
Zavedení funkcí

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{tgh}(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)} \quad \operatorname{cotgh}(\alpha) = \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)}$$



Grafy hyperbolických funkcí



Základní vlastnosti hyperbolických funkcí:

- periodičita:

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha) &= \sinh(\alpha + i2k\pi) & \operatorname{tgh}(\alpha) &= \operatorname{tgh}(\alpha + ik\pi) \\ \cosh(\alpha) &= \cosh(\alpha + i2k\pi) & \operatorname{cotgh}(\alpha) &= \operatorname{cotgh}(\alpha + ik\pi) \\ k &\in \mathbb{Z} & i^2 &= -1 \end{aligned}$$



- lichost a sudost:
 
$$\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha) \quad \cosh(-\alpha) = \cosh(\alpha)$$

$$\operatorname{tgh}(-\alpha) = -\operatorname{tgh}(\alpha)$$

$$\operatorname{cotgh}(-\alpha) = -\operatorname{cotgh}(\alpha)$$
- základní vztah
 
$$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$$
- souvislost s goniometrickými funkcemi ( $i^2 = -1$ ):
 
$$\sinh(\alpha) = -i \sin(i\alpha) \quad \cosh(\alpha) = \cos(i\alpha)$$

$$\operatorname{tgh}(\alpha) = -i \operatorname{tg}(i\alpha) \quad \operatorname{cotgh}(\alpha) = i \operatorname{cotg}(i\alpha)$$

- derivace:
 
$$(\sinh(\alpha))' = \cosh(\alpha) \quad (\cosh(\alpha))' = \sinh(\alpha)$$
- integrály:
 
$$\int \sinh(\alpha) d\alpha = \cosh(\alpha) \quad \int \cosh(\alpha) d\alpha = \sinh(\alpha)$$

## 4.6 Rozvoj funkcí v řadu

Taylorův rozvoj funkce  $f(x)$  kolem hodnoty  $a$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Konkrétně:

- $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $\operatorname{tgh}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$

## 4.7 Diferenciál funkce jedné proměnné

Diferenciál funkce  $y = f(x)$  je součin z derivace a diferenciálu nezávisle proměnné

$$df(x) = f'(x)dx \quad dy = y'dx.$$

Pro diferencování platí tedy stejná pravidla jako pro derivování.

## 4.8 Základy vektorového počtu – gradient, divergence, rotace, Laplaceův operátor

Vektorové identity:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{rot} \vec{w}$$

Kartézské souřadnice  $(x, y, z)$ :

- Hamiltonův operátor nabra:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$
- gradient skalární funkce  $u = f(x, y, z)$ :

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

- divergence vektorového pole  $\vec{v}(x, y, z) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- rotace vektorového pole  $\vec{v}(x, y, z)$ :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

- Laplaceův operátor delta:  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$

Cylindrické souřadnice  $(r, \phi, z)$  ( $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $z$ ):

- Hamiltonův operátor nabra:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$
- gradient skalární funkce  $u = f(r, \phi, z)$ :

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$$

- divergence vektorového pole  $\vec{v}(r, \phi, z) = (v_r(r, \phi, z), v_\phi(r, \phi, z), v_z(r, \phi, z))$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- rotace vektorového pole  $\vec{v}(r, \phi, z)$ :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\phi & v_z \end{vmatrix}$$

- Laplaceův operátor delta:  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

**Sférické souřadnice**  $(r, \phi, \theta)$  ( $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ ):

- Hamiltonův operátor nabla:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta$

- gradient skalární funkce  $u = f(r, \phi, \theta)$ :

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta$$

- divergence vektorového pole  $\vec{v}(r, \phi, \theta) =$

$$(v_r(r, \phi, \theta), v_\phi(r, \phi, \theta), v_z(r, \phi, \theta)) :$$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_z)}{\partial \theta}$$

- rotace vektorového pole  $\vec{v}(r, \phi, \theta)$ :

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \frac{-1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \sin \theta \vec{e}_\phi & r \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ v_r & r \sin \theta v_\phi & r v_\theta \end{vmatrix}$$

- Laplaceův operátor delta:  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ .

## 4.9 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty (a případnou pravou stranou)

Homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnicí tvaru

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (4.1)$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla, čárky značí první a druhou derivaci reálné funkce  $y(x)$  podle proměnné  $x$ .

Postupujeme tak, že napíšeme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (4.2)$$

z níž vypočteme kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$ . Podle druhu kořenů dostáváme řešení:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \quad y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda & \quad y(x) = e^{\lambda x} (A + Bx) \\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta & \quad y(x) = e^{\alpha x} (Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}), \end{aligned}$$

$A, B$  jsou libovolné reálné (v případě třetím komplexně sdružené) konstanty.

Ve třetím uvedeném řešení lze závorku nahradit jedním z tvarů (další použitá písmena jsou reálné konstanty)

$$Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) = Y_0(\sin(\beta x + \varphi)).$$

Nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnicí tvaru

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (4.3)$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla, čárky značí první a druhou derivaci reálné funkce  $y(x)$  podle proměnné  $x$  a  $f(x)$  je funkce proměnné  $x$ .

Postupujeme tak, že nejprve najdeme řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice 4.1 (na pravé straně položíme místo  $f(x)$  nulu), které označíme  $y_0(x)$ . Pak najdeme

partikulární řešení  $\varphi(x)$  nehomogenní rovnice 4.3. Celkové řešení nehomogenní diferenciální rovnice je pak součtem řešení homogenního a partikulárního:

$$y(x) = y_0(x) + \varphi(x).$$

Partikulární řešení  $\varphi(x)$  můžeme v některých případech hledat tak, že jej předpokládáme v obecném tvaru stejném jako má člen  $f(x)$  na pravé straně rovnice 4.3, toto řešení dosadíme spolu s jeho první a druhou derivací do této rovnice a metodou neurčitých koeficientů stanovíme neznámé konstanty v řešení.

Nejčastěji tak postupujeme v případě těchto funkcí  $f(x)$  (velká i malá písmena uvedená v rovnicích jsou konstanty):

|  |   |
|--|---|
| • $f(x) = C$   | • $\varphi(x) = m$  |
| • $f(x) = Ax^2 + Bx + C$   | • $\varphi(x) = mx^2 + nx + p$  |
| • $f(x) = Ae^{qx}$   | • $\varphi(x) = mx^r e^{qx}$ ,<br>$x^r$ se vyskytuje, je-li $q$<br>$r$ -násobným kořenem 4.2  |
| • $f(x) = A \cos(px) + B \sin(px)$   | • $\varphi(x) = m \cos(px) + n \sin(px)$ ,  |
| • $f(x) = e^{qx}$<br>[ $P_s(x) \cos(px) + Q_t(x) \sin(px)$ ],<br>$P_s(x), Q_t(x)$ ,<br>jsou polynomy stupně $s, t$ | • $\varphi(x) = x^r e^{qx}$<br>[ $A_u(x) \cos(px) + B_u(x) \sin(px)$ ],<br>$A_u(x), B_u(x)$<br>jsou polynomy stupně $\max(s, t)$ ,<br>$x^r$ se vyskytuje,<br>je-li $q + pi$ ( $q - pi$ )<br>$r$ -násobným kořenem 4.2 . |

# Literatura

- [1] Janča J., Kapička V., Kučířek J., Stejskalová V., *Cvičení z obecné fyziky III a IV*, SPN Praha 1986
- [2] Máca B., *Cvičení z fyziky pro nefyzikální obory*, SPN Praha 1988 - zde je možné najít řadu příkladů k procvičování analogických příkladů z [1]
- [3] Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fyzika, část 2*, VUTIUM a Prometheus, Brno, Praha 2000
- [4] Syrový A., *Sbírka příkladů z fyziky*, SNTL Praha 1971
- [5] Hajko V. a kol., *Fyzika v příkladoch*, Alfa Bratislava 1983
- [6] Main I. G., *Kmity a vlny ve fyzice*, Academia, Praha 1990