M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

- Jde o seznam typových úloh, které se probírají na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písemkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a mohou se lišit i v rámci jednotlivých cvičení jednoho vyučujícího.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky“ autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004). Dalšími příklady přispěli doc. Čadek, dr. Kruml (oba v roce 2019), doc. Šilhan (2020) a doc. Klíma (2019-2020).

Aktuální verze sbírky ze dne 29. září 2021.

1 Úvodní hodina - zápis množin

Cvičení konaná 14. a 15. 9. 2021.

Příklad 1.1: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitená třemi.
2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
3. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
4. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
6. Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
7. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Řešení: 1) $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$*, 2)* $\{8k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$*, 3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 3\} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$*, resp.* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{3}\} = (\sqrt{3}, \infty)$*, 4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 3x\} = (0,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3x\}$ *– pro záporná* x *totiž platí* $3x < 0 < x^2$*, 5)* $\{[3y, y] \mid y \in \mathbb{R}\} = \{[x, \frac{x}{3}] \mid x \in \mathbb{R}\}$ *– přímka se směrnicí* $\frac{1}{3}$ *procházející počátkem, 6)* $\{[x,y] \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 3y > 0\}$ *– výseč v prvním kvadrantu mezi kladnou částí osy* x *a přímkou* $y = \frac{1}{3}x$*, 7)* $\{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+y^2=z^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+z^2=y^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, y^2+z^2=x^2\}$*.*

Příklad 1.2: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitená 5.
2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitená 17.
3. Množinu všech reálných čísel x, která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.
4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.
5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.
6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.
7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

Řešení: 1) $\{10k+5 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$*, 2) 2)* $\{17k \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, |k| < 6\} = \{\pm 17, \pm 34, \pm 51, \pm 68, \pm 85\}$*, 3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 > 0\} = \mathbb{R}$*, 4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^3 < x^2\} = (0, 1)$*, 5)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\} = \{[x, kx] \mid x, k \in \mathbb{N}\}$*, 6)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \mid y, y \mid x\} = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| = |y|\} = \{[x, x] \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x, -x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$*, 7)* $\{[x, y, x + y, xy(x + y)] \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$*.*

Příklad 1.3: Napište formální definice:

1. Celé číslo a je sudé.
2. Celé číslo a je liché.
3. Celé číslo a je dělitelné třemi.
4. Celé číslo a není dělitelné třemi.
5. Celé číslo a je dělitelné číslem b.

Řešení: 1) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 2k$*. 2) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 2k + 1$*. 3) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 3k$*. 4) Nexistuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = 3k$*. 5) Existuje* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $a = k \cdot b$*.*

Příklad 1.4: Dokažte platnost následujících tvrzení pro libovolná celá čísla a a b.

1. Z čísel a, b a $a + b$ je aspoň jedno sudé.
2. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a - b$ je sudé.
3. Číslo $a + b$ je sudé právě tehdy, když je sudé číslo $a - b$.

4. Pokud je $a+b$ sudé, pak a^2+b^2 je také sudé.

5. Pokud je $a+b$ liché, pak a^2+b^2 je také liché.

6. Číslo a^2+a je sudé číslo.

7. Číslo a^3-a je dělitelné 3.

8. Číslo a^4-a^2 je dělitelné 4.

Řešení: 1) Pokud a nebo b je sudé, tvrzení platí. Pokud jsou obě lichá, tj. $a=2k+1$ a $b=2\ell+1$ pro vhodná celá čísla k,ℓ, potom $a+b=2(k+\ell+1)$ je sudé a tvrzení opět platí. 2) Protože $a-b=(a+b)-2b$, z předpokladu, že $a+b$ je sudé, vidíme, že $a-b$ je rozdíl dvou sudých čísel, a tedy sudé číslo. 3) Předchozí je jedna implikace. Pro druhou implikaci „pokud je $a-b$ sudé, pak je $a+b$ sudé“ se stejným způsobem využije vztah $a+b=(a-b)+2b$. 4) i 5) Lze využít vztah $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. 6) Číslo $a^2+a=a(a+1)$ je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je sudé. 7) Číslo $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je dělitelné 3. 8) Platí $a^4-a^2=a^2(a^2-1)$. Pokud je a sudé, pak je a^2 dělitelné 4. Pokud je a liché, pak je dělitelné 4 číslo $a^2-1=(a-1)(a+1)$. (I v jiných podpříkladech lze použít metodu, že se rozebírají možnosti $a=2k$ resp. $a=2k+1$ apod.)

Příklad 1.5: Nechť a,b,c,d jsou různá jednociferná kladná celá čísla taková, že 3 dělí $a^2+b^2+c^2+d^2$. Dokažte, že potom a^2+b^2 není dělitelné 3.

Řešení: Po dělení 3 dává druhá mocnina celého čísla n zbytek 0 (v případě, kdy n je dělitelné 3) nebo 1 (v případě, kdy n není dělitelné 3). Protože jsou naše jednociferná čísla různá, nemohou být všechna čtyři dělitelná 3. Je tedy dělitelné 3 právě jedno z nich. Součet a^2+b^2 tak po dělení 3 dává zbyek 1 nebo 2.

Příklad 1.6: V následujících příkladech zapište množinu M bodů v rovině, a pak určete výčtem prvků množinu všech dvojic celých čísel x a y takových, že $[x,y]\in M$.

1. M je obdélník, jehož tři vrcholy jsou $[-2,-2]$, $[-2,0]$ a $[1,-2]$.

2. M je trojúhelník ABC, kde $A=[3,2]$, $B=[1,-2]$ a $C=[-1,1]$.

3. M je množina bodů $[x,y]$ v kruhu se středem $(8,3)$ a poloměrem 4, pro které navíc platí $x\le y$.

4. M je průnik trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek $[0,0]$ a body $[0,4]$ a $[4,0]$, s množinou všech bodů $[x,y]$, pro které platí $(x-y-2)^2=9$.

5. M je tvořena body (x,y) rovnoběžníku, jehož tři vrcholy jsou $[0,0]$, $[-6,0]$ a $[4,3]$, které zároveň leží pod přímkou $y=x+1$.

Pozn.: Body obdélníku, trojúhelníku atd. míníme body, které jsou buď „uvnitř" nebo „na hranici" tohoto útvaru. Rozmyslete si, jak by se řešení lišilo v případě, kdybychom uvažovali pouze „vnitřní" body.

Řešení: 1) $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0\}, M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-2, -2], [-2, -1], [-2, 0], [-1, -2], [-1, -1], [-1, 0], [0, -2], [0, -1], [0, 0], [1, -2], [1, -1], [1, 0]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, -2 < x < 1, -2 < y < 0\}, M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-1, -1], [0, -1]\}$. *2)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x+2y \geq -1, 2x-y \leq 4, x-4y \geq -5\}, M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[-1, 1], [0, 0], [0, 1], [1, -2], [1, -1], [1, 0], [1, 1], [2, 0], [2, 1], [3, 2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x + 2y > -1, 2x - y < 4, x - 4y > -5\}, M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 0], [0, 1], [1, -1], [1, 0], [1, 1], [2, 1]\}$. *3)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 \leq 16, x \leq y\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[5, 5], [6, 6]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 < 16, x \leq y\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[5, 5], [6, 6]\}$. *4)* $M = \{[x, x+1] \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$, $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 1], [1, 2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x, x+1] \mid 0 < x < \frac{3}{2}\}$, $M' \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[1, 2]\}$. *5)* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x \leq 4y, y - x < 1, 0 \leq y \leq 3\}, M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. *Vnitřní body:* $M = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, 3x < 4y, y - x < 1, 0 < y < 3\}, M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[1, 1], [2, 2]\}$.

Příklad 1.7: Nechť M je množina bodů v rovině, které jsou uvnitř (tj. nikoli na stranách) čtverce se středem v bodě $[4, 3]$, stranou délky 2, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami x a y. Napište množinu M formálně (tj. body roviny o souřadnicích, které splňují vhodné nerovnosti). Určete dále všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které množina M obsahuje.

Řešení: Délka uhlopříčky je $2\sqrt{2}$, *proto jsou vrcholy čtverce v bodech* $[4 - \sqrt{2}, 3], [4, 3 + \sqrt{2}], [4+\sqrt{2}, 3], [4, 3-\sqrt{2}]$. *Směrové vektory stran jsou* $(1, 1)$ *a* $(1, -1)$ *a jsou na sebe kolmé, proto mají přímky procházející stranou rovnici buď* $x - y = d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1, 1)$*), nebo* $x + y = d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1, -1)$*), kde vhodné* d *se dopočítá dosazením vrcholů. Dvojice nerovností* $x - y > 1 - \sqrt{2}$, $x - y < 1 + \sqrt{2}$ *(ostré nerovnosti zde jsou, protože nás zajímá vnitřek čtverce bez stran) lze vyjádřit ekvivalentně podmínkou* $|x - y - 1| < \sqrt{2}$. *Podobně dostaneme pro druhou dvojici stran, resp. přímek, podmínku* $|x + y - 7| < \sqrt{2}$. *Proto* $M = \{[x, y]; |x-y-1| < \sqrt{2}, |x+y-7| < \sqrt{2}\}$. *Dále* $M \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{[4, 3], [3, 3], [5, 3], [4, 2], [4, 4]\}$

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 21. a 22. 9. 2021.

Příklad 2.1: Nechť $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s.

Řešení: $r = 2$, $s = 3$.

Příklad 2.2: Nechť $S = 72\, cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu r.

Řešení: $k = 15$.

Příklad 2.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.

Řešení: $M = (-\frac{4}{3}, 2)$.

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2+i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.

Řešení: $z^2 = -7 + 24i$.

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2\log x + 3{,}5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Řešení: $k = \frac{1}{10}$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = \frac{\pi}{4}$ *(jediné řešení v daném intervalu).*

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Řešení: $8 \cdot 9^3 \cdot 4$.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k\ :\ 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = 8$.

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Řešení: Průměr: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. *Za dodatečného předpokladu* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *je medián roven* $a_{\frac{n+1}{2}}$ *pro liché (nepárne) n, resp.* $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ *pro sudé (párne) n. Pro čtveřici 1,1,1,5 je medián 1 a průměr 2. Pro čtveřici 1,5,5,5 je medián 5 a průměr 4.*

Příklad 2.10: Pro n-tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Řešení: V platné nerovnosti $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ přičteme (kladné číslo) $4a_1a_2$ k oběma stranám a dostaneme $(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$. Po odmocnění (opět se využije, že jsou obě a_1 i a_2 kladná čísla) a podělení dvěma dostaneme nerovnost $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2)$. Pokud v této nerovnosti dosadíme $a_1 = \frac{1}{b_1}$ a $a_2 = \frac{1}{b_2}$, potom po podělení oběma stranami dostaneme $G(b_1, b_2) \geq H(b_1, b_2)$. Z postupu je jasné, že pro $a_1 \neq a_2$ lze psát nerovnosti ostré. Rovnost tedy nastává právě pro dvojice $a_1 = a_2$, kdy $A(a_1, a_2) = G(a_1, a_2) = H(a_1, a_2) = a_1$.

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Řešení: $H(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

Řešení: To, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$ lze ukázat stejně jako v řešení příkladu 2.10. Elementárně lze nerovnost $A \geq G$ dokazovat indukcí, kde pro $n = 2$ jsme již provedli v příkladě 2.10. Indukční krok je poměrně jednoduchý pro $n = 2k$, kdy se sečtou nerovnosti $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) = b_1$, $A(a_3, a_4) \geq G(a_3, a_4) = b_2$, $\ldots$, $A(a_{n-1}, a_n) \geq G(a_{n-1}, a_n) = b_k$, a potom se použije nerovnost $A(b_1, b_2, \ldots, b_k) \geq G(b_1, \ldots, b_n)$. Z nerovnosti pro $n = 2k$ (kde jsme využili indukční předpoklad pro 2 a k), lze volbou $a_{2k} = A(a_1, \ldots, a_{2k-1})$ dokázat nerovnost pro $2k - 1$. (Poznamenejme, že s jistými znalostmi z matematické analýzy lze dostat nerovnost také takto: e^x je konvexní funkce na intervalu $(0, \infty)$, proto platí (Jensenova) nerovnost $e^{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$, kde levá strana lze psát jako $\sqrt[n]{e^{x_1} \cdot \cdots \cdot e^{x_n}}$. Po substutuci $e^{x_i} = a_i$ dostnaneme požadovanou nerovnost.)

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 29. 9. 2021.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B. O zobrazení do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot zadaných funkcí. Dále načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru) a zda je rostoucí, resp. klesající.

1. $f(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = |3x + 1| - x$,
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,

4. $f(x) = x^2 + 2x + 3$,
5. $f(x) = \log_{10}(x + 2)$,
6. $f(x) = 2^{x-3}$,
7. $f(x) = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$,
8. $f(x) = 3 \cos x$,
9. $f(x) = \tan(-x)$.

Řešení: 1) $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní a rostoucí. 2) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{1}{3}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 3) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 4) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [2, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 5) $D(f) = (-2, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní, rostoucí. 6) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$, injektivní, není surjektivní, rostoucí. 7) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{9}{2}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 8) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [-3, 3]$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 9) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$, není injektivní, je surjektivní, není rostoucí, není klesající.

Příklad 3.2: Funkce f je dána následujícím předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2 - 1) - 1}\,.$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot.

Řešení: $D(f) = (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{11}, -1) \cup (1, \sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

1. $y = 2f(x)$,
2. $y = \frac{1}{3} \cdot f(x)$,
3. $y = -f(x)$,
4. $y = f(-x)$,
5. $y = f(x + 3)$,
6. $y = f(x - 2)$,
7. $y = f(x) - 4$,

8. $y = f(x) + 6$,
9. $y = f(3x)$,
10. $y = f(\frac{x}{2})$.

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Řešení: 1) Graf se „roztáhne na dvojnásobek“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 2) Graf se „smrskne na třetinu“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 3) Graf je zrcadlově převrácený podle osy y. Bude klesající. 4) Graf je zrcadlově převrácený podle osy x. Bude klesající. 5) Graf je posunutý ve směru osy x o 3 doleva. Bude rostoucí. 6) Graf je posunutý ve směru osy x o 2 doprava. Bude rostoucí. 7) Graf je posunutý ve směru osy y o 4 dolů. Bude rostoucí. 8) Graf je posunutý ve směru osy y o 6 nahoru. Bude rostoucí. 9) Graf se „smrskne“ ve směru osy x v poměru 1:3. Bude rostoucí. 10) Graf se „roztáhne“ ve směru osy x v poměru 2:1. Bude rostoucí.

Příklad 3.4: S využitím úlohy 3.3 rozložte následující funkce jako složení "jednodušších" funkcí.

1. $f(x) = |3x - 8| + 2$,
2. $g(x) = \frac{3}{x+5} + 2$,
3. $h(x) = \log_{10}(2x + 3) - 5$.

Nakreslete grafy těchto funkcí. Rozhodněte, zda jsou funkce rostoucí, resp. klesající, případně dejte příklad vhodných intervalů, na kterých je funkce rostoucí, resp. klesající.

Řešení: 1) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = x - 8$, $f_3(x) = |x|$, $f_4(x) = x + 2$. Funkce f je rostoucí na intervalu $[\frac{8}{3}, \infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty, \frac{8}{3}]$. 2) $g = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, kde $g_1(x) = x + 5$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = 3x$, $g_4(x) = x + 2$. Funkce g je klasající na intervalech $(-\infty, -5)$ a $(5, \infty)$. 3) $h = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, kde $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = x + 3$, $h_3(x) = \log_{10}(x)$, $h_4(x) = x - 5$. Funkce h je rostoucí na celém definičním oboru $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Příklad 3.5: Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H(f) = (0, \pi/2)$ a předpokládejme, že $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru.

a) Dokažte, že pak funkce $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru.

b) Rozhodněte o chování funkce $g(x) = \frac{\cos(x-\pi/2)}{f(x)}$ na intervalu $(0, \pi/2)$. Možné odpovědi jsou, že funkce $g(x)$ je na tomto intervalu buď rostoucí nebo klesající nebo se takto chová jen na části daného intervalu nebo monotonie závisí na volbě funkce $f(x)$. Odpověď je vždy třeba dokázat.

Řešení: a) Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, taková že* $x_1 < x_2$*, máme* $f(x_1) > f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *je klesající funkce na celém definičním oboru* $\mathbb{R}$*), z čehož vyplývá, že* $\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$ *(neboť* $\cos x$ *je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *klesající). b) Označme* $h(x) = \cos(x - \pi/2)$*, což je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *funkce rostoucí a kladná; pak pro* $x_1 < x_2$ *z nerovností* $h(x_1) < h(x_2)$ *a* $f(x_1) > f(x_2)$ *dostaneme* $h(x_1)f(x_2) < h(x_2)f(x_1)$ *a odtud* $h(x_1)/f(x_1) < h(x_2)f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *nabývá pouze kladných hodnoty). Tedy* $\cos(x - \pi/2)/f(x)$ *je rostoucí funkce na* $(0, \pi/2)$*.*