M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

- Jde o seznam typových úloh, které se probírají na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písemkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a mohou se lišit i v rámci jednotlivých cvičení jednoho vyučujícího.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky" autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004). Dalšími příklady přispěli doc. Čadek, dr. Kruml (oba v roce 2019), doc. Šilhan (2020) a doc. Klíma (2019-2020).

Aktuální verze sbírky ze dne 10. listopadu 2021.

1 Úvodní hodina - zápis množin

Cvičení konaná 14. a 15. 9. 2021.

Příklad 1.1: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitená třemi.
2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
3. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
4. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
6. Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
7. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Řešení: 1) $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$*, 2)* $\{8k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$*, 3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 3\} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$*, resp.* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{3}\} = (\sqrt{3}, \infty)$*, 4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 3x\} = (0,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3x\}$ *– pro záporná* x *totiž platí* $3x < 0 < x^2$*, 5)* $\{[3y, y] \mid y \in \mathbb{R}\} = \{[x, \frac{x}{3}] \mid x \in \mathbb{R}\}$ *– přímka se směrnicí* $\frac{1}{3}$ *procházející počátkem, 6)* $\{[x,y] \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 3y > 0\}$ *– výseč v prvním kvadrantu mezi kladnou částí osy* x *a přímkou* $y = \frac{1}{3}x$*, 7)* $\{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+y^2=z^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, x^2+z^2=y^2\} \cup \{[x,y,z] \mid x,y,z \in \mathbb{N}, y^2+z^2=x^2\}$.

Příklad 1.2: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitená 5.
2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitená 17.
3. Množinu všech reálných čísel x, která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.
4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.
5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.
6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.
7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

Řešení: 1) $\{10k+5 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$, *2) 2)* $\{17k \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, |k| < 6\} = \{\pm 17, \pm 34, \pm 51, \pm 68, \pm 85\}$, *3)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 > 0\} = \mathbb{R}$, *4)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^3 < x^2\} = (0, 1)$, *5)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\} = \{[x, kx] \mid x, k \in \mathbb{N}\}$, *6)* $\{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \mid y, y \mid x\} = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| = |y|\} = \{[x, x] \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x, -x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$, *7)* $\{[x, y, x + y, xy(x + y)] \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1.3: Napište formální definice:

1. Celé číslo a je sudé.
2. Celé číslo a je liché.
3. Celé číslo a je dělitelné třemi.
4. Celé číslo a není dělitelné třemi.
5. Celé číslo a je dělitelné číslem b.

Řešení: 1) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 2k$. 2) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 2k + 1$. 3) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 3k$. 4) Neexistuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 3k$. 5) Existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = k \cdot b$.

Příklad 1.4: Dokažte platnost následujících tvrzení pro libovolná celá čísla a a b.

1. Z čísel a, b a $a + b$ je aspoň jedno sudé.
2. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a - b$ je sudé.
3. Číslo $a + b$ je sudé právě tehdy, když je sudé číslo $a - b$.

4. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a^2 + b^2$ je také sudé.

5. Pokud je $a + b$ liché, pak $a^2 + b^2$ je také liché.

6. Číslo $a^2 + a$ je sudé číslo.

7. Číslo $a^3 - a$ je dělitelné 3.

8. Číslo $a^4 - a^2$ je dělitelné 4.

Řešení: 1) Pokud a nebo b je sudé, tvrzení platí. Pokud jsou obě lichá, tj. $a = 2k + 1$ *a* $b = 2\ell + 1$ *pro vhodná celá čísla* k, ℓ*, potom* $a + b = 2(k + \ell + 1)$ *je sudé a tvrzení opět platí. 2) Protože* $a - b = (a + b) - 2b$*, z předpokladu, že* $a + b$ *je sudé, vidíme, že* $a - b$ *je rozdíl dvou sudých čísel, a tedy sudé číslo. 3) Předchozí je jedna implikace. Pro druhou implikaci „pokud je* $a - b$ *sudé, pak je* $a + b$ *sudé“ se stejným způsobem využije vztah* $a + b = (a - b) + 2b$*. 4) i 5) Lze využít vztah* $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$*. 6) Číslo* $a^2 + a = a(a + 1)$ *je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je sudé. 7) Číslo* $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$ *je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel, z nichž jedno je dělitelné* 3*. 8) Platí* $a^4 - a^2 = a^2(a^2 - 1)$*. Pokud je a sudé, pak je* a^2 *dělitelné* 4*. Pokud je a liché, pak je dělitelné* 4 *číslo* $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$*. (I v jiných podpříkladech lze použít metodu, že se rozebírají možnosti* $a = 2k$ *resp.* $a = 2k + 1$ *apod.)*

Příklad 1.5: Nechť a, b, c, d jsou různá jednociferná kladná celá čísla taková, že 3 dělí $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dokažte, že potom $a^2 + b^2$ není dělitelné 3.

Řešení: Po dělení 3 dává druhá mocnina celého čísla n zbytek 0 (v případě, kdy n je dělitelné 3*) nebo* 1 *(v případě, kdy n není dělitelné* 3*). Protože jsou naše jednociferná čísla různá, nemohou být všechna čtyři dělitelná* 3*. Je tedy dělitelné* 3 *právě jedno z nich. Součet* $a^2 + b^2$ *tak po dělení* 3 *dává zbyek* 1 *nebo* 2*.*

Příklad 1.6: V následujících příkladech zapište množinu M bodů v rovině, a pak určete výčtem prvků množinu všech dvojic celých čísel x a y takových, že $[x, y] \in M$.

1. M je obdélník, jehož tři vrcholy jsou $[-2, -2]$, $[-2, 0]$ a $[1, -2]$.

2. M je trojúhelník ABC, kde $A = [3, 2]$, $B = [1, -2]$ a $C = [-1, 1]$.

3. M je množina bodů $[x, y]$ v kruhu se středem $(8, 3)$ a poloměrem 4, pro které navíc platí $x \leq y$.

4. M je průnik trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek $[0, 0]$ a body $[0, 4]$ a $[4, 0]$, s množinou všech bodů $[x, y]$, pro které platí $(x - y - 2)^2 = 9$.

5. M je tvořena body (x, y) rovnoběžníku, jehož tři vrcholy jsou $[0, 0]$, $[-6, 0]$ a $[4, 3]$, které zároveň leží pod přímkou $y = x + 1$.

Pozn.: Body obdélníku, trojúhelníku atd. míníme body, které jsou buď „uvnitř“ nebo „na hranici“ tohoto útvaru. Rozmyslete si, jak by se řešení lišilo v případě, kdybychom uvažovali pouze „vnitřní“ body.

Řešení: 1) $M = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 1, -2 \le y \le 0\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[-2,-2],[-2,-1],[-2,0],[-1,-2],[-1,-1],[-1,0],[0,-2],[0,-1],[0,0],[1,-2],[1,-1],[1,0]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, -2 < x < 1, -2 < y < 0\}$, $M' \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[-1,-1],[0,-1]\}$. *2)* $M = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, 3x+2y \ge -1, 2x-y \le 4, x-4y \ge -5\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[-1,1],[0,0],[0,1],[1,-2],[1,-1],[1,0],[1,1],[2,0],[2,1],[3,2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, 3x+2y > -1, 2x-y < 4, x-4y > -5\}$, $M' \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[0,0],[0,1],[1,-1],[1,0],[1,1],[2,1]\}$. *3)* $M = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 \le 16, x \le y\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[5,5],[6,6]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, (x-8)^2+(y-3)^2 < 16, x \le y\}$, $M' \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[5,5],[6,6]\}$. *4)* $M = \{[x,x+1] \mid 0 \le x \le \frac{3}{2}\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[0,1],[1,2]\}$. *Vnitřní body:* $M' = \{[x,x+1] \mid 0 < x < \frac{3}{2}\}$, $M' \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[1,2]\}$. *5)* $M = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, 3x \le 4y, y-x < 1, 0 \le y \le 3\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[0,0],[1,1],[2,2],[3,3]\}$. *Vnitřní body:* $M = \{[x,y] \mid x,y \in \mathbb{R}, 3x < 4y, y-x < 1, 0 < y < 3\}$, $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[1,1],[2,2]\}$.

Příklad 1.7: Nechť M je množina bodů v rovině, které jsou uvnitř (tj. nikoli na stranách) čtverce se středem v bodě $[4,3]$, stranou délky 2, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami x a y. Napište množinu M formálně (tj. body roviny o souřadnicích, které splňují vhodné nerovnosti). Určete dále všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které množina M obsahuje.

Řešení: Délka uhlopříčky je $2\sqrt{2}$*, proto jsou vrcholy čtverce v bodech* $[4-\sqrt{2},3],[4,3+\sqrt{2}],[4+\sqrt{2},3],[4,3-\sqrt{2}]$*. Směrové vektory stran jsou* $(1,1)$ *a* $(1,-1)$ *a jsou na sebe kolmé, proto mají přímky procházející stranou rovnici buď* $x-y=d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1,1)$*), nebo* $x+y=d$ *(pro dvojici stran se směrnicí* $(1,-1)$*), kde vhodné* d *se dopočítá dosazením vrcholů. Dvojice nerovností* $x-y > 1-\sqrt{2}$, $x-y < 1+\sqrt{2}$ *(ostré nerovnosti zde jsou, protože nás zajímá vnitřek čtverce bez stran) lze vyjádřit ekvivalentně podmínkou* $|x-y-1| < \sqrt{2}$*. Podobně dostaneme pro druhou dvojici stran, resp. přímek, podmínku* $|x+y-7| < \sqrt{2}$*. Proto* $M = \{[x,y]; |x-y-1| < \sqrt{2}, |x+y-7| < \sqrt{2}\}$*. Dále* $M \cap \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{[4,3],[3,3],[5,3],[4,2],[4,4]\}$

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 21. a 22. 9. 2021.

Příklad 2.1: Nechť $T = [r,s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2,-1]$, $B = [-1,3]$ a $C = [5,7]$. Určete hodnoty r a s.

Řešení: $r = 2$, $s = 3$.

Příklad 2.2: Nechť $S = 72\,cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu r.

Řešení: $k = 15$.

Příklad 2.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.

Řešení: $M = (-\frac{4}{3}, 2)$.

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2+i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.

Řešení: $z^2 = -7 + 24i$.

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2\log x + 3{,}5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Řešení: $k = \frac{1}{10}$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = \frac{\pi}{4}$ *(jediné řešení v daném intervalu).*

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Řešení: $8 \cdot 9^3 \cdot 4$.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k\ :\ 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.

Řešení: $c = 8$.

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Řešení: Průměr: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. *Za dodatečného předpokladu* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *je medián roven* $a_{\frac{n+1}{2}}$ *pro liché (nepárne)* n, *resp.* $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ *pro sudé (párne)* n. *Pro čtveřici 1,1,1,5 je medián 1 a průměr 2. Pro čtveřici 1,5,5,5 je medián 5 a průměr 4.*

Příklad 2.10: Pro n-tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Řešení: V platné nerovnosti $(a_1-a_2)^2 \geq 0$ přičteme (kladné číslo) $4a_1a_2$ k oběma stranám a dostaneme $(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$. Po odmocnění (opět se využije, že jsou obě a_1 i a_2 kladná čísla) a podělení dvěma dostaneme nerovnost $A(a_1,a_2) \geq G(a_1,a_2)$. Pokud v této nerovnosti dosadíme $a_1 = \frac{1}{b_1}$ a $a_2 = \frac{1}{b_2}$, potom po podělení oběma stranami dostaneme $G(b_1,b_2) \geq H(b_1,b_2)$. Z postupu je jasné, že pro $a_1 \neq a_2$ lze psát nerovnosti ostré. Rovnost tedy nastává právě pro dvojice $a_1 = a_2$, kdy $A(a_1,a_2) = G(a_1,a_2) = H(a_1,a_2) = a_1$.

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Řešení: $H(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

Řešení: To, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$ lze ukázat stejně jako v řešení příkladu 2.10. Elementárně lze nerovnost $A \geq G$ dokazovat indukcí, kde pro $n = 2$ jsme již provedli v příkladě 2.10. Indukční krok je poměrně jednoduchý pro $n = 2k$, kdy se sečtou nerovnosti $A(a_1,a_2) \geq G(a_1,a_2) = b_1$, $A(a_3,a_4) \geq G(a_3,a_4) = b_2$, ..., $A(a_{n-1},a_n) \geq G(a_{n-1},a_n) = b_k$, a potom se použije nerovnost $A(b_1,b_2,\ldots,b_k) \geq G(b_1,\ldots,b_n)$. Z nerovnosti pro $n = 2k$ (kde jsme využili indukční předpoklad pro 2 a k), lze volbou $a_{2k} = A(a_1,\ldots,a_{2k-1})$ dokázat nerovnost pro $2k-1$. (Poznamenejme, že s jistými znalostmi z matematické analýzy lze dostat nerovnost také takto: e^x je konvexní funkce na intervalu $(0,\infty)$, proto platí (Jensenova) nerovnost $e^{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n})$, kde levá strana lze psát jako $\sqrt[n]{e^{x_1}\cdot\cdots\cdot e^{x_n}}$. Po substutuci $e^{x_i} = a_i$ dostnaneme požadovanou nerovnost.)

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 29. 9. 2021.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B. O zobrazení do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot zadaných funkcí. Dále načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru) a zda je rostoucí, resp. klesající.

1. $f(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = |3x + 1| - x$,
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,

4. $f(x) = x^2 + 2x + 3$,

5. $f(x) = \log_{10}(x + 2)$,

6. $f(x) = 2^{x-3}$,

7. $f(x) = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$,

8. $f(x) = 3 \cos x$,

9. $f(x) = \tan(-x)$.

Řešení: 1) $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní a rostoucí. 2) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{1}{3}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 3) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 4) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [2, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 5) $D(f) = (-2, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$, injektivní, surjektivní, rostoucí. 6) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \infty)$, injektivní, není surjektivní, rostoucí. 7) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [\frac{9}{2}, \infty)$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 8) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [-3, 3]$, není injektivní, není surjektivní, není rostoucí, není klesající. 9) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$, není injektivní, je surjektivní, není rostoucí, není klesající.

Příklad 3.2: Funkce f je dána následujícím předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2 - 1) - 1}.$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot.

Řešení: $D(f) = (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{11}, -1) \cup (1, \sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

1. $y = 2f(x)$,

2. $y = \frac{1}{3} \cdot f(x)$,

3. $y = -f(x)$,

4. $y = f(-x)$,

5. $y = f(x + 3)$,

6. $y = f(x - 2)$,

7. $y = f(x) - 4$,

8. $y = f(x) + 6$,
9. $y = f(3x)$,
10. $y = f(\frac{x}{2})$.

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Řešení: 1) Graf se „roztáhne na dvojnásobek“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 2) Graf se „smrskne na třetinu“ ve směru osy y. Bude rostoucí. 3) Graf je zrcadlově převrácený podle osy y. Bude klesající. 4) Graf je zrcadlově převrácený podle osy x. Bude klesající. 5) Graf je posunutý ve směru osy x o 3 doleva. Bude rostoucí. 6) Graf je posunutý ve směru osy x o 2 doprava. Bude rostoucí. 7) Graf je posunutý ve směru osy y o 4 dolů. Bude rostoucí. 8) Graf je posunutý ve směru osy y o 6 nahoru. Bude rostoucí. 9) Graf se „smrskne“ ve směru osy x v poměru 1:3. Bude rostoucí. 10) Graf se „roztáhne“ ve směru osy x v poměru 2:1. Bude rostoucí.

Příklad 3.4: S využitím úlohy 3.3 rozložte následující funkce jako složení "jednodušších" funkcí.

1. $f(x) = |3x - 8| + 2$,
2. $g(x) = \frac{3}{x+5} + 2$,
3. $h(x) = \log_{10}(2x + 3) - 5$.

Nakreslete grafy těchto funkcí. Rozhodněte, zda jsou funkce rostoucí, resp. klesající, případně dejte příklad vhodných intervalů, na kterých je funkce rostoucí, resp. klesající.

Řešení: 1) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = x - 8$, $f_3(x) = |x|$, $f_4(x) = x + 2$. Funkce f je rostoucí na intervalu $[\frac{8}{3}, \infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty, \frac{8}{3}]$. 2) $g = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, kde $g_1(x) = x + 5$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = 3x$, $g_4(x) = x + 2$. Funkce g je klasající na intervalech $(-\infty, -5)$ a $(-5, \infty)$. 3) $h = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, kde $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = x + 3$, $h_3(x) = \log_{10}(x)$, $h_4(x) = x - 5$. Funkce h je rostoucí na celém definičním oboru $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Příklad 3.5: Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H(f) = (0, \pi/2)$ a předpokládejme, že $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru.

a) Dokažte, že pak funkce $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru.

b) Rozhodněte o chování funkce $g(x) = \frac{\cos(x-\pi/2)}{f(x)}$ na intervalu $(0, \pi/2)$. Možné odpovědi jsou, že funkce $g(x)$ je na tomto intervalu buď rostoucí nebo klesající nebo se takto chová jen na části daného intervalu nebo monotonie závisí na volbě funkce $f(x)$. Odpověď je vždy třeba dokázat.

Řešení: a) Pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, taková že* $x_1 < x_2$*, máme* $f(x_1) > f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *je klesající funkce na celém definičním oboru* $\mathbb{R}$*), z čehož vyplývá, že* $\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$ *(neboť* $\cos x$ *je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *klesající). b) Označme* $h(x) = \cos(x - \pi/2)$*, což je na intervalu* $(0, \pi/2)$ *funkce rostoucí a kladná; pak pro* $x_1 < x_2$ *z nerovností* $h(x_1) < h(x_2)$ *a* $f(x_1) > f(x_2)$ *dostaneme* $h(x_1)f(x_2) < h(x_2)f(x_1)$ *a odtud* $h(x_1)/f(x_1) < h(x_2)f(x_2)$ *(neboť* $f(x)$ *nabývá pouze kladných hodnoty). Tedy* $\cos(x - \pi/2)/f(x)$ *je rostoucí funkce na* $(0, \pi/2)$*.*

4 Maximální intervaly monotonie funkcí

Cvičení konaná 5. a 6. 10. 2021.

Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I“.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce f rostoucí“.
3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.
4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I.

Řešení: 1) Funkce f *je rostoucí na intervalu* I *jestliže* $(\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$*. 2)* I *je maximální interval, kde je funkce* f *rostoucí, jestliže (i) funkce* f *je rostoucí na* I *a (ii) pro libovolný interval* J *obsahující množinu* I*, na kterém je* f *rostoucí, platí* $J = I$*. 3) Ad 3.1: 3.1.1: Rostoucí na celém definičním oboru* $D(f) = \mathbb{R}$*. 3.1.2: Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je* $[-\frac{1}{3}, \infty)$*. Maximální interval, kde je funkce klesající, je* $(-\infty, -\frac{1}{3}]$*. 3.1.3: Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou* $(-\infty, 1)$ *a* $(1, \infty)$*. 3.1.4: Maximální interval, kde je funkce klesající, je* $(-\infty, -1]$*. Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je* $[-1, \infty)$*. 3.1.5: Rostoucí na celém definičním oboru* $D(f) = (-2, \infty)$*. 3.1.6: Rostoucí na celém definičním oboru* $D(f) = \mathbb{R}$*. 3.1.7: Maximální interval, kde je funkce klesající, je* $(-\infty, -\frac{1}{2}]$*. Maximální interval, kde je funkce rostoucí, je* $[-\frac{1}{2}, \infty)$*. 3.1.8: Maximální intervaly, kde je funkce rostoucí, jsou* $I_k = [(2k-1)\pi, 2k\pi]$*, kde* k *je libovolné celé číslo. Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou* $J_k = [2k\pi, (2k+1)\pi]$*, kde* k *je libovolné celé číslo. 3.1.9: Maximální intervaly, kde je funkce klesající, jsou* $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$*, kde* k *je libovolné celé číslo. Ad 3.2: Funkce je sudá a stačí si tedy rozmyslet v kladné části definičního oboru. Maximální intervaly, kde je* f *je klesající jsou* $(1, \sqrt{11})$ *a* $(\sqrt{11}, \infty)$*, Proto maximální intervaly, kde je*

f rostoucí, jsou $(-\infty, -\sqrt{11})$ a $(-\sqrt{11}, -1)$. Ad 3.4: Intervaly zmíněné v řešení příkladu 3.4 jsou maximální intervaly, kde je funkce monotónní. 4) Tvrzení: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$ taková, že $H_I(g) = \{g(x); x \in I\} \subseteq J$, potom $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I. Důkaz: pokud $x_1, x_2 \in I$ takové, že $x_1 < x_2$, potom (protože g je rostoucí na I) $g(x_1) < g(x_2)$. Odtud (protože $g(x_1), g(x_2) \in J$ a f je rostoucí na J) dostáváme $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$.

Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2}) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.

Řešení: Maximální intervaly monotonie: pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je f klesající na intervalu $I_k = [\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}]$ a rostoucí na intervalu $J_k = [\frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{2}]$. Množina všech řešení rovnice $f(x) = 0$ je je $\{\frac{2}{3}\pi k + \frac{11}{18}\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2}{3}\pi k + \frac{7}{18}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, 6 řešení leží v intervalu $(0, 2\pi)$, a to $\frac{7}{18}\pi$, $\frac{11}{18}\pi$, $\frac{19}{18}\pi$, $\frac{23}{18}\pi$, $\frac{31}{18}\pi$ a $\frac{35}{18}\pi$.

Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

Řešení: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $H(f) = (0, \infty)$. Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ a klesající na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$. [Graf zhruba vypadá jako hyperbola, která má levou větev překlopenou do druhého kvadrantu a posunutou o 1 směrem nahoru, a obě větve posunuté doprava, neboť funkce není definovaná v bodě $\frac{1}{2}$ – pro doplnění uveďme, že $\lim_{x\to-\infty} = 1$, $\lim_{x\to 1/2} = \infty$, $\lim_{x\to\infty} = 0$.]

Příklad 4.4: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = f(x) + g(x)$,
2. $h(x) = f(x) - g(x)$,
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $h(x) = -g(x)$,
5. $h(x) = g(x) \cdot g(x)$,
6. $h(x) = |g(x)|$,

7. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Řešení: 1) Rostoucí. 2) Volbou $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ (případně naopak) vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Nejde ani přirozeně opravit/doplnit. 3) Volbou $f(x) = x$, $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Lze opravit: pokud $H(f) \subseteq (0, \infty), H(g) \subseteq (0, \infty)$, pak je h rostoucí. 4) Klesající. 5) viz 3. 6) Volbou $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Rozumný předpoklad na doplnění $H(g) \subseteq (0, \infty)$, aby h bylo rostoucí, tvrzení trivializuje, protože potom $g = h$. Podobně $H(g) \subseteq (-\infty, 0)$ vede ke klesající funkci popsané předpisem v části 4. 7) Volbou $g(x) = x$ vidíme, že h není rostoucí, ani klesající. Lze opravit: pokud $H(g) \subseteq (0, \infty)$, pak je h klesající.

Příklad 4.5: Nechť g je rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(g)$ a nechť $c \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = g(x) + c$,
2. $h(x) = c - g(x)$,
3. $h(x) = c \cdot g(x)$.

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na paramatru c.

Řešení: 1) Rostoucí. 2) Klesající. 3) Pro $c > 0$ je h rostoucí; pro $c < 0$ je h klesající. (Pro $c = 0$ je h konstantní funkce.)

Příklad 4.6: Udejte příklad rostoucích funkcí f a g s definičním oborem $\mathbb{R}$ takových, že funkce h, daná předpisem $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, je klesající funkce na celém definičním oboru $D(h) = \mathbb{R}$.

Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí f, g a h. Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).

Řešení: $f(x) = g(x) = \frac{-1}{2^x}$, $h(x) = \frac{1}{4^x}$.

Příklad 4.7: Nechť f je rostoucí funkce na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$ s oborem hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Uvažujme dále funkci g danou předpisem $g(x) = x \cdot f(x)$. Dokažte, že funkce g je rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$.

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad $H(f) = (0, \infty)$, a dále krok, kde se využije předpoklad, že I obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, takové, že $H(f)$ obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce

$g(x) = x \cdot f(x)$ není rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$. Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce f v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

Řešení: Pro libovolné $x_1, x_2 \in I$, splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$. Protože $x_1 > 0$ dostáváme $x_1 \cdot f(x_1) < x_1 \cdot f(x_2)$. Z $x_1 < x_2$ dostáváme také, vzhledem k předpokladu $f(x_2) > 0$, nerovnost $x_1 \cdot f(x_2) < x_2 \cdot f(x_2)$. Tedy celkem $g(x_1) = x_1 \cdot f(x_1) < x_1 \cdot f(x_2) < x_2 \cdot f(x_2) = g(x_2)$.

Protipříklady: (i) $f(x) = x - 2$ (zde $H(f)$ obsahuje záporná čísla), přitom $g(0) = 0$, $g(1) = -1$, (ii) $f(x) = 2^x$ (zde $I = D(f) = \mathbb{R}$)), přitom $g(-2) = -\frac{1}{2} = g(-1)$.

5 Kvadratické funkce

Cvičení konaná 12. a 13. 10. 2021.

Příklad 5.1: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte "vzoreček" pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Řešení: $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$. Odtud při označení $D = b^2 - 4ac$ dostaneme $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$ a dále vzoreček $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Parabola je otočená („otevřená") nahoru pro kladná a, resp. dolů pro záporná a. „Vrchol" paraboly je v bodě $[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}]$, tj. minimum/maximum je $\frac{4ac-b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$, kterého nabývá v bodě $\frac{-b}{2a}$.

Příklad 5.2: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r + 4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$, $A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$, $A = (0, \infty)$.

c) $(r - 2)x^2 + rx + 1 - r > 0$, $A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$, $A = [1, 3]$.

Řešení: a) $r \in (-\infty, -6)$, b) $r \in (1, \infty)$, c) nemá řešení, d) $r \in (0, 1/3)$.

Příklad 5.3: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r - 2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$, platila pro všechna $x \in [3, 5]$.

Řešení: (i) V případě $r > 2$ je grafem funkce $f(x) = (r - 2)x^2 + rx + 3r + 2$ parabola „otevřená nahoru" (funkce je konvexní) a vzhledem k tomu, že má všechny koeficienty (tj. $r - 2$, r a $3r + 2$) kladné, tak nabývá funkce f na intervalu $(0, \infty)$ kladných hodnot. Tím spíše *platí nerovnost $(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$ pro všechna $x \in [3,5]$. (ii) V případě $r = 2$ je funkce $f(x) = 2x + 8$ a nerovnost $2x + 8 > 0$ opět platí dokonce pro všechna kladná reálná čísla. (iii) V případě $r < 2$ je grafem funkce $f(x) = (r-2)x^2 + rx + 3r + 2$ parabola „otevřená dolů“ (funkce je konkávní). Proto je podmínka „$\forall x \in [3,5] : f(x) > 0$“ ekvivalentní podmínce „$f(3) > 0 \wedge f(5) > 0$“. Po dosazení dostanem požadavky $15r - 16 > 0$ a $33r - 48 > 0$ a tedy $r \in (\frac{16}{11}, 2)$ (protože řešíme případ (iii) a $\frac{16}{15} < \frac{48}{33} = \frac{16}{11}$). Celková odpověď (spojením všech tří možností výše) je: $r > \frac{16}{11}$.*

Příklad 5.4: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$(rx-1)(x+r) < 0$$

platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0,1)$.

b) $A = (-1,1)$.

c) $A = (-2,2)$.

d) $A = (0,\infty)$.

Řešení: a) $r \in [0,1]$, b) $r = 1$, c) nemá řešení, d) $r = 0$.

Příklad 5.5: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice

$$2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda: Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a.*
Řešení: $a \in (-\infty,-3) \cup (0,\infty)$.

Příklad 5.6: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.
Řešení: $a \in (2,5)$.

Příklad 5.7: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3.$$

Řešení: $a = 4$.

Příklad 5.8: Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

Řešení: $k = 3$, diskriminant $D = 16(k-2)$.

Příklad 5.9*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Řešení: $x_1 = 4 - \sqrt{15}, x_2 = 4 + \sqrt{15}$, rovnice $x^2 - 8x + 1 = 0$.

Příklad 5.10*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}\ .$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a, $-b$.

Řešení: $ab = 5$, $a - b = 1$. Potom $a = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

První vnitrosemestrální písemka

Písemka na obsah kapitol 1, 3, 4 a 5.

sk. A (18.10)

1. *Mějme funkci $f(x) = 3\sin(|x + \frac{\pi}{3}|)$. Určete její definiční obor, obor hodnot a načrtněte její graf. Rozhodněte, zda je funkce periodická. Určete dále všechny hodnoty x, pro které platí $f(x) = 0$.*

Řešení: $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [-3, 3]$. Funkce není periodická. $f(x) = 0$ platí právě pro čísla tvaru $-\frac{\pi}{3} + k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

2. *Mějme funkci $f(x) = \sqrt{x^2-4} - 2$. Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající. Dále uvažujme funkci $g = f \circ f$. Určete definiční obor a obor hodnot funkce g.*

Řešení: Definiční obor funkce f je $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, přitom je klesající na intervalu $(-\infty, -2]$ a rostoucí na intervalu $[2, \infty)$. Oborem hodnot funkce f je interval $[-2, \infty)$. Definiční *obor g je $(-\infty, -\sqrt{20}] \cup [\sqrt{20}, \infty) \cup \{-2, 2\}$. Obor hodnot funkce g je stejný jako obor hodnot funkce f, tj. $[-2, \infty)$.*

3. *Mějme funkci $f(x) = \frac{e^{x^3}}{-\ln x}$. Rozhodněte o monotonii této funkce na intervalu $(0, 1)$.*

Nápověda: Příklad není určený na výpočet pomocí derivací (i takový postup vyžaduje ověřování platnosti jistých nerovností, takže je srovnatelně obtížný). Zadanou funkci $f(x)$ lze chápat jako součin dvou jednodušších funkcí na daném intervalu, který je také podstatný pro správnou odpověď.

Řešení: Pro $x_1 < x_2$ z intervalu $(0, 1)$ platí $0 < e^{x_1^3} < e^{x_2^3}$, protože funkce e^{x^3} je rostoucí na celém svém definičním oboru. Pro tato kladná čísla x_1 a x_2 dostaneme dále $\ln(x_1) < \ln(x_2) < 0$, protože logaritmus je rostoucí na celém svém definičním oboru. Odtud plyne $0 < -\ln(x_2) < -\ln(x_1)$, odkud dostaneme $0 < \frac{1}{-\ln(x_1)} < \frac{1}{-\ln(x_2)}$. Vynásobením této nerovnosti s $e^{x_1^3} < e^{x_2^3}$ dostaneme, že zadaná funkce $f(x)$ je na intervalu $(0, 1)$ rostoucí.

4. *Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r-1)x^2 + 2rx + r > 0$ platila pro všechna $x \in [-2, \infty)$.*

Řešení: Takové r neexistuje.

Zdůvodnění: (i) Pro $r < 1$ je parabola „otevřená dolů“ a tedy nemůže být od hodnoty $x = -2$ napravo celá nad osou x. (ii) Pro $r = 1$ je uvažovaná nerovnost $2x + 1 > 0$, což neplatí např. pro $x = -1$. (iii) Pro $r > 1$ je parabola „otevřená nahoru“, tedy nerovnost bude platit právě tehdy, když (a) $f(-2) > 0$ a současně (b) pokud pro vrchol $[x_0, f(x_0)]$ platí $x_0 \in [-2, \infty)$, potom $f(x_0) > 0$. Podmínka (a) je ekvivalntní nerovnosti $4(r-1) - 4r + r > 0$, a tedy můžeme dále uvažovat případ $r > 4$. Pro vyhodnocení podmínky (b) nejdříve určíme $x_0 = \frac{-r}{r-1} = -1 + \frac{-1}{r-1}$, která náleží skutečně intervalu $[-2, \infty)$ (neboť uvažujeme pouze hodnoty $r > 4$). Protože hodnota $f(x_0) = \frac{r^2}{r-1} - 2\frac{r^2}{r-1} + \frac{r(r-1)}{r-1} = \frac{-r}{r-1}$ je pro uvažovaná $r > 4$ záporná, není možné podmínky (a) a (b) splnit současně. Tedy ani v jednom z případů (i) – (iii) takové r neexistuje.

5. *Nechť a, b, c jsou celá čísla taková, že čísla $a+b$, $a+c$ a $b+c$ dávají stejný zbytek po dělení 3. Dokažte, že číslo $a+b+c$ je dělitelné 3.*

Řešení: Označme r zbytek po dělení $a+b$ (tj. i $a+c$ i $b+c$) číslem 3. Pak $r \in \{0, 1, 2\}$ a existují $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ takové, že $a + b = 3k + r$, $a + c = 3l + r$, $b + c = 3m + r$. Odtud $2(a+b+c) = a+b+a+c+b+c = 3(k+l+m+r)$. Protože je číslo $2(a+b+c)$ dělitelné 3 (a protože 2 dělitelná prvočíslem 3 není) dělí 3 i číslo $a+b+c$.

sk. B (22.10)

1. *Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-1}$. Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete maximální intervaly monotonie. Dále uvažujme funkci g danou vztahem $g(x) = f(\frac{1}{x})$. Určete definiční obor a obor hodnot funkce g.*

Řešení: $D(f) = [1,2) \cup (2,\infty)$, přitom f je na obou intervalech $[1,2)$ a $(2,\infty)$ klesající. $H(f) = (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$. Definiční obor funkce g je sjednocení intervalů $(0,1/2)$ a $(1/2,1]$ a obor hodnot funkce g je $H(g) = H(f) = (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$.

2. *Mějme funkci $f(x) = \sin(\pi \sin x)$. Určete její definiční obor, obor hodnot, určete maximální interval monotonie I_1 obsahující $x = 0$ a také najděte nějaký maximální interval I_2, kde je funkce $f(x)$ klesající. Dále určete všechna x taková, že $f(x) = 0$.*

Řešení: Definiční obor f je $D(f) = \mathbb{R}$, obor hodnot je $H(f) = [-1,1]$. Hledané maximální intervaly monotonie jsou $I_1 = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ a například $I_2 = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Množina všech řešení rovnice $f(x) = 0$ je $\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. *Mějme funkci $f(x) = e^{|x-3|}(-x^2 + 6x - 10)$. Rozhodněte o monotonii této funkce na intervalu $[0,3]$.*

Řešení: Pišme $f(x) = g(x)h(x)$, kde $g(x) = e^{|x-3|}$ a $h(x) = -x^2 + 6x - 10$. Pro $x_1 < x_2$ z intervalu $[0,3]$ platí $g(x_1) > g(x_2) > 0$, protože funkce $g(x)$ je klesající na intervalu $[0,3]$. Pro tato čísla x_1 a x_2 dostaneme dále $h(x_1) < h(x_2) < 0$, protože $h(x)$ je funkce rostoucí a záporná na $[0,3]$, což je vidět z úpravy na čtverec. Odtud plyne $g(x_1)h(x_1) < g(x_2)h(x_2) < 0$, tj. zadaná funkce $f(x)$ je na intervalu $[0,3]$ rostoucí.

4. *Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r+3)x^2 - 2rx + 2 > 0$ platila pro všechna $x \in [0,2]$.*

Řešení: (i) Pokud $r < -3$, pak je parabola „otevřená dolů“ a nerovnost je ekvivalentní s dvojicí nerovností $f(0) > 0$ a $f(2)$. Ty jsou triviálně splněny, a tak je nerovnost splněna. (ii) Pro $r = -3$ je uvažovaná nerovnost $6x + 2 > 0$, která pro $x \in [0,2]$ platí. (iii) Pro $r > -3$ je parabola „otevřená nahoru“, tedy nerovnost bude platit právě tehdy, když (a) $f(0) > 0$, $f(2) > 0$ a současně (b) pokud pro vrchol $[x_0, f(x_0)]$ platí $x_0 \in [0,2]$, potom $f(x_0) > 0$. Podmínka (a) je znovu triviálně splněna. Pro vyhodnocení podmínky (b) nejdříve určíme $x_0 = \frac{r}{r+3}$. Pokud $r < 0$ pak $x_0 \notin [0,2]$ a podmínka je splněna. Pokud $r \geq 0$, pak $x_0 \in [0,2]$, protože nerovnost $\frac{r}{r+3} < 1$ se snadno dokáže. To znamená, že pokud má požadovaná nerovnost v případě $r \geq 0$ platí právě tehdy, když $f(\frac{r}{r+3}) > 0$. Přitom $f(x_0) = \frac{r^2}{r+3} - 2\frac{r^2}{r+3} + 2 = \frac{-r^2+2r+6}{r+3}$. Pro uvažovaná $r \geq 0$ dostáváme nerovnost $-r^2 + 2r + 6 > 0$, která platí právě pro $r \in (1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7})$. Vzhledem k p5edpokladu tak dostaneme, že v případě (iii) platí nerovnost právě pro $r \in (-3, 1+\sqrt{7})$.

Když shrneme všechny případy dostaneme, že nerovnost platí právě pro $r < 1 + \sqrt{7}$.

5. *Nechť a, b jsou celá čísla. Dokažte, že alespoň jedno z čísel $a+b$, $2ab$, $a-b$ je dělitelné 4.*

Řešení: Pokud ab je sudé, je $2ab$ dělitelné 4. Předpokládejme tedy dále, že ab je liché, a pak jsou tedy i čísla a, b lichá. Jestliže čísla a, b dávájí stejný zbytek $r \in \{1,3\}$ po dělení 4, pak $a-b$ je dělitelné 4. Jestliže čísla a, b dávájí po dělení 4 různé zbytky $r_1 \neq r_2$, kde $r_1, r_2 \in \{1,3\}$, pak $a+b$ je dělitelné 4. Ve všech případech tak dostaneme, že alespoň jedno z čísel $a+b$, $2ab$, $a-b$ je dělitelné 4.

6 Funkce s absolutní hodnotou, racionální kořeny celočíselných polynomů

Cvičení konaná 19. a 20.10. 2021.

Příklad 6.1: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = |2x - 3| - |x + 2| + |10 - 3x| - 1\,.$$

1. Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na intervalu $[-5, 5]$.
2. Najděte obor hodnot funkce f.
3. Určete maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní.
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

Řešení: 2) $H(f) = [-\frac{8}{3}, \infty)$. 3) Klesající na intervalu $(-\infty, \frac{10}{3}]$, rostoucí na intervalu $[\frac{10}{3}, \infty)$. 4) $\{x \in \mathbb{R}; f(x) < 2\} = (\frac{4}{3}, \frac{9}{2})$.

Příklad 6.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

1. $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$,
2. $$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$$
3. $|x^2 - 4x - 5| - 3 = x^2 + |x - 4|$.

Řešení: 1) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. 2) $x \in \{-2/3, 1/2, 2\}$. 3) $x \in \{-4, 1/2, 2\}$.

Příklad 6.3: Uvažujme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = \big|\, |x + 1| + |x - 1| \,\big|\,, \qquad g(x) = \big|\, |x + 1| - |x - 1| \,\big|\,.$$

1. Načrtněte grafy funkcí f a g.
2. Najděte obor hodnot těchto funkcí.
3. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, resp. klesající.
4. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce g rostoucí, resp. klesající.

5. Určete všechna řešení nerovnice $g(x) < f(x)$, tj.

$$\big|\,|x+1| - |x-1|\,\big| \;<\; \big|\,|x+1| + |x-1|\,\big|.$$

Řešení: 1) Pro $x \in (-\infty,-1]$ je $f(x) = -2x$, pro $x \in [-1,1]$ je $f(x) = 2$, pro $x \in [1,\infty)$ je $f(x) = 2x$. Pro $x \in (-\infty,-1]$ je $g(x) = 2$, pro $x \in [-1,1]$ je $g(x) = |2x|$, pro $x \in [1,\infty)$ je $f(x) = 2$. 2)$H(f) = [2,\infty)$, $H(g) = [0,2]$. 3) Maximální interval, kde je funkce f klesající je $(-\infty,-1]$. Maximální interval, kde je funkce f rostoucí je $[1,\infty)$. 4) Maximální interval, kde je funkce g klesající je $[-1,0]$. Maximální interval, kde je funkce f rostoucí je $[0,1]$. 5) Nerovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kromě čísel $-1, 1$ (pro něž platí $f(-1) = g(-1) = 2 = f(1) = g(1)$).

Příklad 6.4*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x+1} \right| \geq 1.$$

Řešení: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Příklad 6.5: Najděte nějaký polynom s celočíselnými koeficienty,

1. jehož kořeny jsou $0, 1, -1/2$,
2. jehož jediný reálný kořen je -1, ale stupeň polynomu je větší než 1,
3. který má trojnásobný kořen 1,
4. jehož kořeny jsou $\sqrt{2}$, -1 a případně další reálná čísla.

Řešení: 1) Např. $x^3(x-1)(2x+1)$. 2) Např. $(x+1)^3$ nebo $(x^2+1)(x+1)$. 3) Např. $(x-1)^3$. 4) Např. $(x^2-2)(x+1)$.

Příklad 6.6: Dokažte kritérium pro racionální kořeny polynomů s celočíselnými koeficienty: Pokud zlomek ve zkráceném tvaru $\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty, potom $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$.

Řešení: Z rovnosti $f(\frac{p}{q}) = 0$ dostaneme pronásobením číslem q^n rovnost $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Tedy $a_0 q^n = -a_n p^n - a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_1 p q^{n-1}$, kde všechny sčítance (všechny tyto sčítance jsou celá čísla) na pravé straně jsou dělitelné p, a proto p dělí $a_0 q^n$. Protože p a q jsou nesoudělná čísla ($\frac{p}{q}$ je totiž zlomek ve zkráceném tvaru), dostáváme, že p dělí a_0. Podobně se dokáže $q \mid a_n$ z rovnosti $a_n p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n$.

Příklad 6.7: Najděte všechny racionální kořeny polynomu:

1. $2x^3 + x^2 - 4x - 3$,
2. $27x^3 + 27x^2 - 4$,
3. $4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 7x - 2$.

Řešení: 1) Adepti podle kritéria: $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$. *Vyjde dvojnásobný kořen* -1, *a jednoduchý kořen* $\frac{3}{2}$, *tedy* $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = (x+1)^2(2x-3)$. *2) Adepti podle kritéria:* $\frac{p}{q}$, *kde* $p \in \{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$ *a* $q \in \{1, 3, 9, 27\}$. *Vyjde dvojnásobný kořen* $-\frac{2}{3}$, *a jednoduchý kořen* $\frac{1}{3}$, *tedy* $27x^3 + 27x^2 - 4 = (3x+2)^2(3x-1)$. *3) Adepti podle kritéria:* $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$. *Vyjdou jednoduché kořeny* -2 *a* $\frac{1}{4}$, *což dává* $4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 7x - 2 = (4x-1)(x+2)(x^2+1)$ *(a tedy další kořeny jsou komplexní čísla* i *a* $-i$*).*

Příklad 6.8: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad x^2 + x + a = 0.$$

Řešení: $a = -6$

Příklad 6.9: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0, \quad ax^2 - x + 1 = 0.$$

Řešení: $a = -3/4,\ 0,\ 2/9$

Příklad 6.10: Určete všechny parametry $a \in \mathbb{R}$ takové, že má následující dvojice rovnic nějaké společné reálné řešení:

$$ax^2 + x + a = 0, \quad x^2 + ax + a = 0.$$

Řešení: $a = 0$ *a* $a = -1/2$. *Kdybychom nevyžadovali* $x \in \mathbb{R}$, *bylo by řešením i* $a = 1$.

7 Příklady s odmocninami, Vietovy vztahy

Cvičení konaná 26.10. a 27.10. 2021.

Příklad 7.1: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$,
2. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$,
3. $\sqrt{3x+2}=\sqrt{5x+3}+2\sqrt{2x+1}$.

Řešení: a) 8, *b)* 4, *c)* $-1/2$.

Příklad 7.2: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $3>x+3\cdot\sqrt{1-x^2}$,
2. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$,
3. $1\geq x+\sqrt{4-x^2}$.
4. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}$
5. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-3}$.

Řešení: 1) $[-1,0)\cup(3/5,1]$. *2)* $[1,3/2)$. *3)* $[-2,\frac{1}{2}(1-\sqrt{7})]$. *4)* $[\frac{1}{2},3)$. *5.* $x\in[3/2,2)$.

Příklad 7.3: Označme x_1,x_2 řešení rovnice $3x^2+8x+4=0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo:

1. $x_1^2+x_2^2$,
2. $x_1^3+x_2^3$,
3. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,
4. x_1-x_2,
5. $x_1^2x_2+x_1x_2^2$,
6. $x_1^2-x_2^2$.

Řešení: 1) $\frac{40}{9}$. *2)* $-\frac{224}{27}$. *3)* -2. *4)* $\frac{4}{3}$ *nebo* $-\frac{4}{3}$. *5)* $-\frac{32}{9}$. *6)* $\frac{32}{9}$ *nebo* $-\frac{32}{9}$.

Příklad 7.4: Označme x_1, x_2, x_3 řešení rovnice $x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,
2.* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,
3. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$,
4. $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$,
5. $x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$.

Řešení: 1) 23. *2)* -72. *3)* $-\frac{7}{6}$. *4)* 60. *5)* 85.

Příklad 7.5*: Nechť polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři kladné kořeny. Dokažte, že $a^3 \leq 27c$.

Řešení: Součet kořenů $-a$ i součin $-c$ jsou kladná čísla. Podle AG nerovnosti z příkladu 2.12 platí $-a/3 \geq \sqrt[3]{-c}$. Umocněním na třetí a pronásobením -1 dostaneme požadovanou nerovnost.

8 Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 2. a 3. 11. 2021.

Příklad 8.1: Mocniny a exponenciální funkce a^x.

1. Pro $a > 0$ a $n \in \mathbb{Z}$ definujte a^n.
2. Je-li $a > 1$ reálné číslo a $n < m$ celá čísla, pak $a^n < a^m$. Dokažte.
3. Pro $a > 0$ reálné a $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definujte a^x.
4.* Pro $a > 0$ reálné a x, y racionální, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. Pro $a > 1$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$. Udělejte totéž pro $a \in (0, 1)$.
6.* Dokažte, že funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.
7.* Pro $a > 0$ reálné a x, y reálná, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.
8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá a.

Řešení: Většina podpříkladů je značně náročná. Rozhodně příklad přesahuje požadavky k ukončení tohoto předmětu, a proto nebude tento typ příkladu v písemkách.

Příklad 8.2: Logaritmická funkce $\log_a x$.

1. Definujte inverzní funkci k funkci f.
2. Definujte $\log_a x$ jako inverzní funkci k exponenciální funkci a^x.
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

Příklad 8.3: Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.
7. $\log_{a^y} x^y = \log_a x$.

Doplňte vždy chybějící předpoklady na použité parametry a, b, c, x, y.

Řešení: 1) Předpoklady: $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a(xy) = \log_a(a^k \cdot a^\ell) = \log_a(a^{k+\ell}) = k+\ell = \log_a x + \log_a y$. *Jde tedy o přímý důsledek prvního vztahu z 8.1.-7). 2) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x, y \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, a^\ell = y$. *Potom* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(\frac{a^k}{a^\ell}) = \log_a(a^{k-\ell}) = k - \ell = \log_a x - \log_a y$. *3) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $x \in (0,\infty)$ $y \in \mathbb{R}$. *Důkaz: Označme* $k \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x$. *Potom* $\log_a(x^y) = \log_a((a^k)^y) = \log_a(a^{yk}) = yk = y \log_a x$. *Jde tedy o přímý důsledek druhého vztahu z 8.1.-7). 4) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = x, b^\ell = a$. *Potom* $\log_b x = \log_b(a^k) = \log_b((b^\ell)^k) = \log_b(b^{k\ell}) = k \cdot \ell = \log_a x \cdot \log_b a$. *Podělením* $\log_b a = \ell \neq 0$ *(uvědomte si, že* $\log_b a = 0$ *by znamenalo* $a = 1$*) dostáváme požadované. 5) Předpoklady:* $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$. *Důkaz: Stačí v předchozím zvolit* $x = b$. *6) Předpoklady:* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $b, c \in (0,\infty)$. *Důkaz: Označme* $k, \ell \in \mathbb{R}$ *taková, že* $a^k = b, a^\ell = c$. *Potom* $b^{\log_a c} = b^\ell = (a^k)^\ell = (a^\ell)^k = c^k = c^{\log_a b}$. *7) Předpoklady:* $a, y \in (0,1) \cup (1,\infty)$ *a* $x \in (0,\infty)$. *Důkaz: Podle 4)* $\log_{a^y} x^y = \frac{\log_a x^y}{\log_a a^y}$*, což se s využitím 3) dále rovná* $\frac{y \cdot \log_a x}{y} = \log_a x$.

Příklad 8.4: Určete

1. $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$.
2. $\log\left(\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$.
3. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.
4. $\log_2\frac{2}{3}+\log_4\frac{9}{4}$.
5. $3^{2\log_3 2+\log_3 5}$.
6. $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_4 9}-\frac{1}{\log_8 3}$.
7. $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10} 2}-3^{\log_9 36}$.

Řešení: 1) $\frac{49}{25}$. *2)* -1. *3)* 625. *4)* 0. *5)* 20. *6)* $-\log_3 2$. *7)* 24.

9 Exponenciální a logarimické funkce – dokončení

Cvičení konaná 9. a 10. 11. 2021.

Příklad 9.1: Pomocí čísel a, b, c vyjádřete x:

1. $x=\log_{100} 40;\quad a=\log_2 5.$
2. $x=\log_6 16;\quad a=\log_{12} 27.$
3. $x=\log\frac{1}{300};\quad a=\log 2,\ b=\log 3,\ c=\log 5.$
4. $x=\log_{140} 63;\quad a=\log_2 3,\ b=\log_3 5,\ c=\log_7 2.$

Řešení: 1) $\frac{a+3}{2+2a}$. *2)* $\frac{4(3-a)}{3+a}$. *3)* $-(2a+b+2c)$. *4)* $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$.

Příklad 9.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $4^x+2^{x+1}=24$.
2. $|x|^{x^2-2x}=1$.
3. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$.
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x$.

Řešení: 1) 2. *2)* $-1, 1, 2$. *3)* $1, -1$. *4) 1 (lze snadno ukázat, že má právě jedno řešení).*

Příklad 9.3: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20)$.
2. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$.
3. $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1$.
4. $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2$.

Řešení: 1) $3/2$, 10. *2)* $\sqrt{2}/2$, 1, 4. *3)* $1/15$, $1/3$. *4) nemá řešení.*

Příklad 9.4: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
2. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.
3. $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.
4. $x^{\log_2 x} > 2$.

Řešení: 1) $(-1, 1]$. *2)* $(-\infty, 0)$. *3)* $(2,3) \cup (27/8, 4)$. *4)* $(0, 1/2) \cup (2, \infty)$.

Příklad 9.5: a) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\log_3 x^2 \cdot \log_9 x = 3$.
b) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $\log_3(|z|+1)^2 \cdot \log_9(|z|+1) = 3$.
Řešení: a) $x = 3^{\sqrt{3}}$ *nebo* $x = 3^{-\sqrt{3}}$. *b)* $z = 3^{\sqrt{3}} - 1$ *a* $z = -3^{\sqrt{3}} + 1$.