Volitelné domácí úlohy a příklady na zamyšlení k předmětu **M3100**

Příklady k procvičení

1. Máme banky označené jako $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Kde každá banka poskytuje úvěry L_i a musí zachovávat finanční rezervu R_i, která dělá $K \in (0,1)$ násobek jejích celkových vkladů. Zároveň předpokládáme, že banka půjčí všechny peníze, která má k dispozici(tedy $L_i + R_i = D_i$ a že úvěry L_i banky i se vždy dostanou skrze ekonomiku do banky $i+1$ jako její vklady. Vložíme-li do banky 0 částku D_0, jaký bude celkový objem vkladů, který se objeví v bankách? (je potřeba vyjádřit D_n pomocí D_0).

   [$\sum_{i=0}^{\infty} D_i = \frac{D_0}{K}$.]

2. Ukažte jako u harmonické řady, že diverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$$

3. Rozhodněte srovnávacím kritériem o konv./div. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 3}{4n^2 + 2}$$

   [Řada diverguje.]

4. Rozhodněte srovnávacím kritériem o konv./div. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)!!}$$

   [Řada konverguje.]

5. Rozhodněte limitním srovnávacím kritériem o konv./div. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2}$$

   [Řada konverguje.]

6. Rozhodněte limitním srovnávacím kritériem o konv./div. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2n+1}{3n+2}$$

   [Řada diverguje.]

7. Rozhodněte o konv./div. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{4^n} \frac{n!}{n^n}$$

[Řada diverguje.]

8. Rozhodněte o konv./div. řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{7^n}$$

[Řada konverguje.]

9. Rozhodněte o divergenci/konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2}$$

[Řada diverguje.]

10. Rozhodněte o divergenci/konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos^2 n}{2^n}.$$
pokud je $a > 0$.

[Řada konverguje.]

11. Rozhodněte o konv./div. řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$$

[Řada konverguje.]

12. Rozhodněte o divergenci/konvergenci následujících řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$
kde
$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{\left(6+\frac{5}{n}\right)^n}, & n \text{ sudé}, \\ \frac{\operatorname{arctg}^n n}{2^n}, & n \text{ liché}, \end{cases}$$

[Řada konverguje.]

13. Je li $q > 0$ a $p \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$$
(Lze využít Raabeho kritérium a binomickou větu)

[Konverguje pro $p + q > 1$.]

14. Rozhodněte o divergenci/konvergenci integrálním kritériem řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

[Řada diverguje.]

15. Rozhodněte o divergenci/konvergenci integrálním kritériem řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

[Řada konverguje. Lze použít kritérií konvergence pro integrály :)]

16. Rozhodněte o divergenci/konvergenci kondenzačním kritériem řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

[Řada diverguje.]

17. Rozhodněte o divergenci/konvergenci kondenzačním kritériem řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2+n)\ln^2 n^2}$$

[Řada konverguje.]

18. Rozhodněte o divergenci/konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n-3}$$

[Řada diverguje.]

19. V závodě Achillea a želvy má želva náskok 50 metrů. Vyrazí zároveň a sprinter Achilleus se v čase n pohybuje rychlostí $a_n = \sqrt{n^4/4+400} - n^2/2$ metrů. Oproti tomu želva se pohybuje rychlostí $b_n = 1/(n+1)$ metrů. Rozhodněte, kdo vyhraje jejich závod, pokud běží tradiční řeckou disciplínu: nekonečný maraton. Změní se vítěz, pokud budou závodit pouze na 100 metrů?

[Závod nebude napínavý, pokud znáte výsledky dopředu ;)]

Příklady k zamyšlení

1. Můžete také vyzkoušet aproximaci faktoriálu pomocí Stirlingovy formule

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Nebo odhad dvojtého faktoriálu

$$n!! = \begin{cases} 2^k k!, & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{(2k)!}{2^k k!}, & \text{pro } n = 2k-1. \end{cases}$$

Třeba na příkladu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(4n)!!}$$

2. Ukažte, že je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = L < 1$ potom řada

$$\sum a_n < \infty$$

Zkuste tohoto výsledku aplikovat na příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!!}$$

3. Nalezněte řadu s nezápornými členy, jejíž součet osciluje.

4. Nalezněte posloupnost d_n tak, aby o konvergenci/divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ nešlo rozhodnout odmocninovým kritériem, ale limitním srovnávacím ano.

5. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

pomocí limitního porovnávacího kritéria s volbou $b_n = 1/n$, respektive $b_n = 1/n^2$, respektive $b_n = 1/n^3$.

6. Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pomocí podílového, odmocninového, raabeho, integrálního kritéria.

[Lze rozhodnout jen integrálním kritériem. Ostatními ne.]

7. Nalezněte funkci $f(x)$ tak, aby

$$\int^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

divergoval, ale přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergovala. (Co zkusit nespojitou funkci f?)

8. Nalezněte funkci $f(x)$ tak, aby
$$\int^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$
konvergoval, ale přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergovala. (Co zkusit nespojitou funkci f?)

9. Nalezněte v každém bodě zvlášť kde se vyskytují posloupnosti a_n, b_n a funkci $f(x)$ takové, že
   - $a_n \leq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
   - $f(n) = a_n$ a $\int^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$, ale $\sum^{\infty} a_n = \infty$.
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

10. Nalezněte v každém bodě zvlášť a_n pro něž je
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, ale $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n = \infty$.
    - $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n a_{3^n} < \infty$.