M5160 Obyčajné diferenciálne rovnice I

Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

Peter Šepitka

zima 2021

Obsah

Obsah

Nech $n \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Súbor rovníc

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t),\\
x_3' &= a_{31}(t)\,x_1 + a_{32}(t)\,x_2 + \cdots + a_{3n}(t)\,x_n + b_3(t),\\
&\ \vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t),
\end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_{ij}(t)$ a $b_i(t)$, $i, j = 1, \cdots, n$ sú reálne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$ (pripúšťame aj $\mathcal{I} = \mathbb{R}$) a znak $'$ znamená $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, sa nazýva systém lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu. Zavedením označenia

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

môžeme systém (1) prepísať do maticového tvaru

$$x' = A(t)\,x + b(t). \tag{2}$$

Zobrazenia $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ a $t \mapsto x(t)$ sa nazývajú maticová (rádu n) a vektorové (n-vektorové) funkcie na intervale $\mathcal{I}$. Platia pre ne všetky známe vlastnosti matíc a vektorov. Limity, spojitosť, derivovanie a integrovanie maticových a vektorových funkcií sa realizujú vždy po jednotlivých maticových prvkoch, resp. vektorových zložkách. Systém (2) sa nazýva homogénny, ak $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$. V opačnom prípade je systém (2) nehomogénny a rovnica

$$x' = A(t)\,x$$

sa nazýva pridružený homogénny systém k nehomogénnemu systému (2). Riešením systému (2) rozumieme každú n-vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na nejakom podintervale $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, ktorá spĺňa rovnicu (2) na $\mathcal{J}$, t.j.,

$$\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t), \quad t \in \mathcal{J}.$$

Ústrednou témou prednášky bude začiatočná (Cauchyho) úloha

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta, \tag{3}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ daný vektor. Riešenie úlohy (3) sa označuje ako partikulárne riešenie systému (2). Zásadnú úlohu v skúmaní riešiteľnosti začiatočnej úlohy (3) zohráva nasledujúce tvrdenie.

Lema 1

Nech daná maticová funkcia A a daná vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Potom funkcia $x = \varphi(t)$ je riešenie začiatočnej úlohy (3) na celom intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď platí

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

Poznámka 1

Tvrdenie Lemy 1 vyjadruje ekvivalenciu medzi úlohou (3) a integrálnou rovnicou (4). Stačí sa preto obmedziť na vyšetrovanie integrálnej rovnice (4).

Dôkaz Lemy 1.

Nech bod $t \in \mathcal{I}$ je pevne zvolený a predpokladajme, že funkcia φ je riešením začiatočnej úlohy (3) na intervale $\mathcal{I}$, t.j. platí

$$\varphi'(s) = A(s)\,\varphi(s) + b(s), \quad \varphi(t_0) = \eta, \quad s \in \mathcal{I}. \tag{5}$$

Integráciou oboch strán rovnice (5) medziach od t_0 po t a využitím začiatočnej podmienky $\varphi(t_0) = \eta$ získame integrálnu rovnicu (4), nakoľko postupne máme

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

teda platí rovnica (4). Naopak, nech funkcia φ je riešenie rovnice (4) na intervale $\mathcal{I}$. Potom φ je diferencovateľná na $\mathcal{I}$ a spĺňa podmienku $\varphi(t_0) = \eta$. Derivovaním oboch strán rovnice (4) podľa premennej t dostaneme $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. To znamená, že funkcia $x = \varphi(t)$ je riešenie začiatočnej úlohy (3) na celom intervale $\mathcal{I}$. Dôkaz je úplný. ∎

Vektorová a maticová norma

Pod pojmom norma vektora v lineárnom priestore $\mathbb{R}^n$ rozumieme každú funkciu $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, ktorá spĺňa nasledujúce vlastnosti.

Vektorová norma

P1 Pre každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$.

P2 Pre každé $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí $\|cx\| = |c|\|x\|$.

P3 Pre každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnosť $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Analogicky, norma matice v lineárnom priestore $\mathbb{R}^{n\times n}$ všetkých $n \times n$ reálnych matíc je každé zobrazenie $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to [0, \infty)$ s nasledujúcimi vlastnosťami.

Maticová norma

P1 $\|A\| \geq 0$ pre každé $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $\|A\| = 0$ práve vtedy, keď $A = O_n$,

P2 $\|cA\| = |c|\|A\|$ pre každé $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

P3 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pre každú dvojicu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

P4 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pre každú dvojicu $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Pre každú vektorovú normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ je zobrazenie

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

maticová norma na $\mathbb{R}^{n\times n}$. Označuje sa ako norma indukovaná danou vektorovou normou a štandardne sa označuje rovnakým symbolom $\|\cdot\|$ ako príslušná vektorová norma, t.j.,

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{6}$$

Povieme, že maticová norma $\|\cdot\|_M$ je s danou vektorovou normou $\|\cdot\|$ súhlasná, ak pre každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnosť

$$\|Ax\| \le \|A\|_M \|x\|. \tag{7}$$

Pre každú vektorovú normu na $\mathbb{R}^n$ existuje aspoň jedna maticová norma, ktorá je s ňou súhlasná; vlastnosť (7) zrejme spĺňa indukovaná maticová norma v (6).

Uvedieme niekoľko príkladov vektorových noriem a príslušných indukovaných, resp. súhlasných maticových noriem.

Súčtová norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{indukovaná maticová norma} \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Maximálna norma

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|, \quad \text{indukovaná maticová norma} \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Euklidovská norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \text{indukovaná maticová norma} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)},$$

kde $\|A\|_2$ je spektrálna maticova norma a $\lambda_{\max}(A^T A)$ je najväčšie vlastné číslo matice $A^T A$. Maticová norma, ktorá je súhlasná so súčtovou i maximálnou vektorovou normou, je napríklad tvaru

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{8}$$

S euklidovskou vektorovou normou je súhlasná napríklad Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}. \tag{9}$$

V nasledujúcich statiach budeme pracovať s vektorovými (maticovými) funkciami a ich vektorovými (maticovými) normami. Ak $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a Φ je vektorová (maticová) funkcia integrovateľná na $\mathcal{I}$, potom pre každé dva body $s, t \in \mathcal{I}$ platí klasická nerovnosť

$$\left\| \int_s^t \Phi(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \left| \int_s^t \|\Phi(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \right|. \tag{10}$$

Napokon doplňme, že ak vektorová (maticová) postupnosť $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje na intervale $\mathcal{I}$ k vektorovej (maticovej) funkcii Φ v nejakej funkcionálnej norme, t.j., $\lim_{k\to\infty} \|\Phi_k - \Phi\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii Φ rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$.

Gronwallova lema

Lema 2 (Gronwallova)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a u a v sú (skalárne) nezáporné a spojité funkcie na $\mathcal{I}$. Predpokladajme, že existuje konštanta $C \in \mathbb{R}$ s vlastnosťou

$$u(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s \right| \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{11}$$

Potom platí nerovnosť

$$u(t) \leq C\, \mathrm{e}^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s) \mathrm{d}s \right|} \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{12}$$

Dôkaz Lemy 2.

Definujme na $\mathcal{I}$ funkciu y s predpisom

$$y(t) := C + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s \right|, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{13}$$

Podľa predpokladu (11) platí $u(t) \leq y(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Funkcia y má na množine $\mathcal{I} \setminus \{t_0\}$ spojitú deriváciu. Vyplýva to z nasledujúcich výpočtov

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

$$y(t) \overset{(13)}{=} \begin{cases} C + \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s, & t > t_0, \\ C - \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s)\, \mathrm{d}s, & t < t_0, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y'(t) = \begin{cases} v(t)\, u(t) \le v(t)\, y(t), & t > t_0, \\ -v(t)\, u(t) \ge -v(t)\, y(t), & t < t_0. \end{cases} \tag{14}$$

Naviac, funkcia y spĺňa na $\mathcal{I} \setminus \{t_0\}$ lineárnu diferenciálnu nerovnosť. Konkrétne,

$$\text{pre } t > t_0 \text{ je} \quad y'(t) \overset{(14)}{\le} v(t)\, y(t) \quad \longrightarrow \quad y'(t) - v(t)\, y(t) \le 0,$$

$$\Downarrow \text{ integračný faktor } \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s) \mathrm{d}s} \Downarrow$$

$$y'(t)\, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s) \mathrm{d}s} - v(t)\, y(t)\, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s) \mathrm{d}s} \le 0 \quad \longrightarrow \quad \left(y(t)\, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s) \mathrm{d}s} \right)' \le 0.$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

Výraz $y(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s}$ je teda na pravom okolí bodu t_0 nerastúci, a tak platí

$$y(t_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_0} v(s)\mathrm{d}s} \geq y(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \quad \xrightarrow{(13)} \quad C \geq y(t)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \tag{15}$$

pre každé $t > t_0$ z intervalu $\mathcal{I}$. Napokon

$$u(t) \leq y(t) \overset{(15)}{\leq} C\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} = C\,\mathrm{e}^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right|} \quad \text{pre každé } t > t_0 \text{ z } \mathcal{I},$$

teda platí (12). Analogickú analýzu vykonáme pre body $t < t_0$ z $\mathcal{I}$. Konkrétne,

$$\text{pre } t < t_0 \text{ je} \quad y'(t) \overset{(14)}{\geq} -v(t)\,y(t) \quad \longrightarrow \quad y'(t) + v(t)\,y(t) \leq 0,$$

$$\Downarrow \ \text{integračný faktor } \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \ \Downarrow$$

$$y'(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} + v(t)\,y(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \left(y(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s}\right)' \geq 0.$$

Výraz $y(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s}$ je teda na ľavom okolí bodu t_0 neklesajúci, a tak máme

$$y(t_0)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_0} v(s)\mathrm{d}s} \geq y(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \quad \xrightarrow{(13)} \quad C \geq y(t)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} \tag{16}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

pre každé $t < t_0$ z intervalu $\mathcal{I}$. Následne

$$u(t) \le y(t) \overset{(16)}{\le} C\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s} = C\,\mathrm{e}^{\left|\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right|} \quad \text{pre každé } t < t_0 \text{ z } \mathcal{I},$$

teda opäť platí (12). Pre $t = t_0$ je nerovnosť (12) za predpokladu (11) zrejme splnená triviálne. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Dôsledok 1

Nech sú splnené predpoklady Gronwallovej Lemy 2 a nech naviac konštanta $C = 0$, t.j, nech platí

$$u(t) \le \left|\int_{t_0}^{t} v(s)\,u(s)\,\mathrm{d}s\right| \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{17}$$

Potom funkcia $u(t) = 0$ pre každý bod $t \in \mathcal{I}$.

Dôkaz Dôsledku 1.

Z nerovnosti (12) v Leme 2 vyplýva, že funkcia $u(t) \le 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. A keďže funkcia u je nezáporná, nutne platí $u(t) = 0$ na celom intervale $\mathcal{I}$. ■

Existencia a jednoznačnosť riešení systému

Veta 1 (Globálna existencia a jednoznačnosť riešenia)

Nech daná maticová funkcia A *a daná vektorová funkcia* b *sú definované a spojité na intervale* $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. *Potom začiatočná úloha* (3) *má pre každé* $t_0 \in \mathcal{I}$ *a každé* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *práve jedno úplné riešenie* $x = \varphi(t)$, *ktoré existuje na celom intervale* $\mathcal{I}$. *Toto riešenie je možné vyjadriť ako limitnú funkcie tzv. Picardovej postupnosti postupných aproximácií* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, *kde pre každé* $k \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\varphi_0 \text{ je spojitá funkcia na } \mathcal{I}, \quad \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{18}$$

a riešenie $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$ *pre každé* $t \in \mathcal{I}$.

Dôkaz Vety 1.

V dôkaze budeme používať súčtovú vektorovú normu a s ňou súhlasnú maticovú normu definovanú v (8). V súlade s týmito normami definujme na množine spojitých (vektorových, maticových) funkcií na každom kompaktnom podintervale $[a, b] \subseteq \mathcal{I}$ nasledujúce funkcionálne normy

$$\|f\|_C := \max_{t\in[a,b]} \|f(t)\|, \quad \|F\|_C := \max_{t\in[a,b]} \|F(t)\| \tag{19}$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

pre každú spojitú vekorovú funkciu f a každú spojitú maticovú funkciu F. Zvoľme si bod $t_0 \in \mathcal{I}$ a vektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ a uvažujme začiatočnú úlohu v (3). Nech φ_0 je nejaká funkcia spojitá na $\mathcal{I}$ a $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jej odpovedajúca Picardova postupnosť zostrojená v (18).

Existencia riešenia

Dokážeme, že postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na každom kompaktnom podintervale v $\mathcal{I}$ a jej limitou je spojitá funkcia, ktorá je riešením integrálnej rovnice (4) na celom $\mathcal{I}$. Zvoľme interval $[a, b] \subseteq \mathcal{I}$. Zrejme existuje uzavretý a ohraničený interval $[c, d] \subseteq \mathcal{I}$ taký, že $[a, b] \cup \{t_0\} \subseteq [c, d]$. Označme

$$K := \|\varphi_1 - \varphi_0\|_C, \quad L := \|A\|_C \quad \text{na intervale } [c, d]. \tag{20}$$

Pomocou matematickej indukcie ukážeme, že platí nerovnosť

$$\|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| \leq K\,\frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}_0 \text{ a každé } t \in [c, d]. \tag{21}$$

Pre index $k = 0$ je vzhľadom na (19) a (20) nerovnosť zrejme (21) splnená. Predpokladajme platnosť nerovnosti (21) pre nejaký index $k = m$. Potom

$$\|\varphi_{m+2}(t) - \varphi_{m+1}(t)\| \overset{(18)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\, [\varphi_{m+1}(s) - \varphi_m(s)]\, \mathrm{d}s \right\|$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

$$\overset{(7),(10)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|\varphi_{m+1}(s) - \varphi_m(s)\| \, \mathrm{d}s \right| \overset{(21)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, K \, \frac{L^m |s - t_0|^m}{m!} \, \mathrm{d}s \right|$$

$$\overset{(20),(19)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} LK \, \frac{L^m |s - t_0|^m}{m!} \, \mathrm{d}s \right| = K \, \frac{L^{m+1} |t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{pre každé } t \in [c, d],$$

t.j., nerovnosť (21) platí i pre index $k = m+1$. Zvoľme ďalej $p, q \in \mathbb{N}$. Využitím (21) postupne dostaneme

$$\|\varphi_{p+q}(t) - \varphi_p(t)\| = \left\| \sum_{k=p}^{p+q-1} [\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)] \right\| \leq \sum_{k=p}^{p+q-1} \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\|$$

$$\overset{(21)}{\leq} \sum_{k=p}^{p+q-1} K \, \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} = K \sum_{k=p}^{p+q-1} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}$$

pre každé $t \in [c, d]$. Zo základných kurzov matematickej analýzy vieme, že nekonečný rad $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}$ konverguje rovnomerne na $[c, d]$. Posledná nerovnosť podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria potom znamená, že funkcionálna

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na $[c,d]$, a teda aj na intervale $[a,b]$. Keďže interval $[a,b]$ bol zvolený ľubovoľne, postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje lokálne rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$. Existuje preto bodová limita $\varphi(t) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$, pričom funkcia φ je spojitá na celom $\mathcal{I}$ (každá z funkcií φ_k, $k \in \mathbb{N}_0$ je zrejme spojitá na $\mathcal{I}$). Napokon ukážeme, že získaná funkcia φ je riešením integrálnej rovnice (4) na celom intervale $\mathcal{I}$. Zvoľme bod $t \in \mathcal{I}$. Limitovaním rovnosti v (18) pre $k \to \infty$ máme

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{k+1}(t) = \eta + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$$\Downarrow \text{ rovnomerná konvergencia postupnosti } \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} \left[A(s) \lim_{k\to\infty} \varphi_k(s) + b(s)\right] \mathrm{d}s,$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Napokon podľa Lemy 1 je funkcia φ riešením začiatočnej úlohy (3) na celom $\mathcal{I}$.

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Jednoznačnosť riešenia

Dokážeme, že získané riešenie φ začiatočnej úlohy (3) je jediné. Ak funkcia ψ je nejaké riešenie úlohy (3), potom v súlade s Lemou 1 spĺňa integrálnu rovnicu (4) na celom intervale $\mathcal{I}$. Pre každé $t \in \mathcal{I}$ teda platí

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \overset{(4)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\,[\varphi(s) - \psi(s)]\mathrm{d}s \right\| \overset{(10),(7)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\,\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}s \right|.$$

Podľa Gronwallovej Lemy 2 a jej Dôsledku 1, kde uvažujeme $u := \|\varphi - \psi\|$ a $v := \|A\|$, posledná nerovnosť v súlade s (17) implikuje, že

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I},$$

t.j., $\varphi(t) = \psi(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. To dokazuje jednoznačnosť riešenia začiatočnej úlohy (3). Dôkaz predloženej vety je teraz kompletný. ■

Poznámka 2

Vidíme, že v súlade s dôkazom Vety 1 limitná funkcia φ Picardovej postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ zostrojenej v (18) nezávisí na výbere začiatočnej aproximácie φ_0. Stačí dokonca uvažovať funkciu φ_0 iba lokálne integrovateľnú na intervale $\mathcal{I}$, t.j., integrovateľnú na každom kompaktnom podintervale v $\mathcal{I}$.

Poznámka 3

Ak pre $k \in \mathbb{N}_0$ zavedieme na intervale $\mathcal{I}$ funkcie Δ_k predpisom

$$\Delta_k(t) := \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{22}$$

kde $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je postupnosť Picardových aproximácií definovaná v (18), potom je možné riešenie φ začiatočnej úlohy (3) vyjadriť ako súčet nekonečného funkcionálneho radu

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{23}$$

V súlade s dôkazom Vety 1 funkcionálny rad (23) konverguje lokálne rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$, t.j., rovnomerne na každom kompaktnom podintervale v $\mathcal{I}$. Podľa (18) funkcie Δ_k definované v (22) spĺňajú pre každé $t \in \mathcal{I}$ rekurentnú rovnosť

$$\Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, \Delta_k(s)\, \mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{24}$$

kde začiatočná funkcia Δ_0 má tvar

$$\Delta_0(t) = \eta - \varphi_0(t) + \int_{t_0}^{t} [A(s)\, \varphi_0(s) + b(s)]\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{25}$$

Príklad 1

Uvažujme začiatočnú úlohu

$$x_1' = -\frac{x_2}{t} + 9t, \quad x_2' = -\frac{x_1}{t} - 3t, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2, \tag{26}$$

na intervale $\mathcal{I} = (0, \infty)$. Keďže funkcie

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 9t \\ -3t \end{pmatrix}$$

sú definované a spojité na celom intervale $\mathcal{I}$ a bod $t_0 = 1 \in \mathcal{I}$, v súlade s Vetou 1 má Cauchyho úloha (26) práve jedno úplné riešenia na celom $\mathcal{I}$. Stanovíme ho pomocou metódy Picardových aproximácií v (18). Dá sa overiť, že voľbou

$$\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} 7t^2 - \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2} \\ -5t^2 + \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}$$

získame Picardovu postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ tvaru

$$\varphi_k(t) = \begin{pmatrix} 7t^2 - \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \frac{(-\ln t)^i}{i!} \\ -5t^2 + \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \frac{(-\ln t)^i}{i!} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Príklad 1

Pre hľadané riešenie začiatočnej úlohy (26) potom platí

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \begin{pmatrix} 7t^2 - \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\ln t)^i}{i!} \\ -5t^2 + \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\ln t)^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7t^2 - \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2t} \\ -5t^2 + \frac{13}{2}\,t + \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Nie je ťažké overiť, že získaná funkcia φ je skutočne riešením rovnice v (26) a spĺňa príslušnú začiatočnú podmienku.

Príklad 2

Uvažujme homogénnu začiatočnú úlohu

$$x' = Ax, \quad x(0) = (0,1)^T \tag{27}$$

na intervale $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, kde A je reálna konštantná matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Poznámky 3 s funkciou $b(t) \equiv 0$, bodom $t_0 = 0$ a vektorom $\eta = (0,1)^T$ pre funkcie $\Delta_k(t)$ platí (pre jednoduchosť uvažujeme funkciu $\varphi_0 \equiv 0$ na $\mathcal{I}$)

Príklad 2

$$\Delta_0(t) \overset{(25)}{\equiv} \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k+1}(t) \overset{(24)}{=} A \int_0^t \Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na index k možno ukázať, že

$$\Delta_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k \eta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Postupnosť matíc $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s najmenšou periódou 4, nakoľko

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = -I, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I.$$

Preto pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$A^{4l} = I, \quad A^{4l+1} = A, \quad A^{4l+2} = -I, \quad A^{4l+3} = -A.$$

Riešenie φ začiatočnej úlohy (27) potom bude mať podľa (23) tvar

$$\varphi(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \right) \eta + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) A\eta$$

$$= (\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Obsah

V tejto sekcii sa budeme zaoberať lineárnym maticovým systémom (2) s funkciou $b(t) \equiv 0$ na intervale $\mathcal{I}$, t.j., homogénnym lineárnym systémom

$$x' = A(t)\, x, \tag{28}$$

kde $n \times n$ maticová funkcia $A(t)$ je spojitá na $\mathcal{I}$. Nasledujúca veta hovorí o dôležitej vlastnosti množiny riešení systému (28).

Veta 2 (Štruktúra množiny riešení homogénneho systému)

Množina všetkých riešení rovnice (28) *na intervale* $\mathcal{I}$ *tvorí lineárny (vektorový) priestor nad telesom reálnych čísiel.*

Dôkaz Vety 2.

Ak x_1 a x_2 sú dve (úplné) riešenia systému (28) na $\mathcal{I}$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, potom i funkcia $x := c_1 x_1 + c_2 x_2$ je (úplným) riešením rovnice (28), nakoľko platí

$$x' = (c_1 x_1 + c_2 x_2)' = c_1 x_1' + c_2 x_2' = c_1 A(t)\, x_1 + c_2 A(t)\, x_2$$

$$= A(t)\,(c_1 x_1 + c_2 x_2) = A(t)\, x$$

na celom intervale $\mathcal{I}$. Dôkaz je hotový. ∎

Lineárna závislosť a nezávislosť I

Definícia 1 (Lineárna nezávislosť vektorových funkcií)

Nech $k, n \in \mathbb{N}$ sú dané a nech $x_1, \ldots, x_k$ sú n-vektorové funkcie definované na nedegenerovanom intervale $\mathcal{I}$. Povieme, že funkcie $x_1, \ldots, x_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$, ak existuje nenulová k-tica reálnych čísiel $(c_1, \ldots, c_k)$ taká, že

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_k x_k(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

V opačnom prípade sa funkcie $x_1, \ldots, x_k$ označujú ako lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$.

Príklad 3

Dokážeme, že vektoré funkcie

$$x_1(t) = (t,\, t)^T, \quad x_2(t) = (t^2,\, t)^T, \quad x_3(t) = (t^3,\, t)^T$$

sú lineárne nezávislé na každom netriviálnom intervale v $\mathbb{R}$. Nech $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ spĺňajú $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \equiv 0$ na nejakom intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, t.j., platí

$$c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \\ c_1 t + c_2 t + c_3 t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{29}$$

Lineárna závislosť a nezávislosť II

Príklad 3

Ukážeme, že rovnosť (29) môže nastať iba v prípade $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Skutočne, relácia (29) je ekvivalentná s rovnosťami

$$c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0, \quad c_1 t + c_2 t + c_3 t = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{30}$$

Keďže každá polynomická funkcia tretieho stupňa môže mať na nejakom intervale najviac tri nulové body, prvá rovnosť v (30) môže byť splnená na $\mathcal{I}$ jedine vtedy, keď sa jedná o nulovú funkciu, t.j., nutne $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Druhá rovnosť v (30) potom platí triviálne. V súlade s Definíciou 1 sú preto predložené funkcie x_1, x_2 a x_3 lineárne nezávislé na každom intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

V prípade riešení systému (28) sa vyšetrovanie lineárnej závislosti, resp. nezávislosti redukuje na problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti vektorov.

Veta 3 (Lineárna závislosť riešení homogénneho systému)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $x_1, \ldots, x_k$ sú úplné riešenia systému (28) na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcie $x_1, \ldots, x_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď pre nejaký bod $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $x_1(t_0), \ldots, x_k(t_0)$ lineárne závislé.

Dôkaz Vety 3.

Implikácia $\Rightarrow$ platí triviálne podľa Definície 1. Naopak, nech pre $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $x_1(t_0), \ldots, x_k(t_0)$ lineárne závislé. Existuje teda nenulová k-tica $(c_1, \ldots, c_k)$ reálnych čísiel tak, že $c_1 x_1(t_0) + \cdots + c_k x_k(t_0) = 0$. Podľa Vety 2 je funkcia

$$x := c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k$$

riešením rovnice (28) na $\mathcal{I}$, ktoré spĺňa $x(t_0) = 0$. Z jednoznačnosti riešení systému (28) podľa Vety 1 platí $x(t) = 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. V súlade s Definíciou 1 to potom znamená, že funkcie $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$. ■

Dôsledok 2 (Dimenzia priestoru riešení homogénneho systému)

Množina riešení rovnice (28) *na intervale* $\mathcal{I}$ *tvorí lineárny priestor dimenzie* n.

Dôkaz Dôsledku 2.

Z Vety 3 vieme, že dimenzia priestoru riešení systému (28) je najviac n, pretože priestor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionálny. Na druhej strane, ak $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je kanonická báza v $\mathbb{R}^n$ a $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod, potom podľa Vety 1 existujú úplné riešenia $x_1, \ldots, x_n$ systému (28) s $x_i(t_0) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. V súlade s Vetou 3 sú tieto riešenia lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$. Preto je priestor riešení systému (28) na intervale $\mathcal{I}$ aspoň n-dimenzionálny. Dôkaz je kompletný. ■

Fundamentálny systém riešení

Definícia 2 (Fundamentálny systém riešení homogénneho systému)

Ľubovoľná báza priestoru všetkých riešení rovnice (28) na intervale $\mathcal{I}$ sa označuje ako fundamentálny systém riešení rovnice (28) na $\mathcal{I}$.

Nech $x_1, \ldots, x_n$ je nejaký daný fundamentálny systém riešení rovnice (28) na intervale $\mathcal{I}$. Potom každé riešenie x systému (28) je možné vyjadriť v tvare

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{31}$$

pre vhodné konštanty $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Naopak, každá lineárna kombinácia riešení $x_1, \ldots, x_n$ je podľa Vety 2 riešením systému (28) na $\mathcal{I}$. Funkcia y v (31) je preto všeobecným riešením systému (28) na intervale $\mathcal{I}$. Doplňme, že konštanty $c_1, \ldots, c_n$ v (31) sú pre dané riešenie x určené jednoznačne.

Spolu s vektorovou rovnicou (28) budeme uvažovať aj maticovú rovnicu

$$X' = A(t)\,X, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{32}$$

kde neznáma X je $n \times n$ maticová funkcia.

Ak X je maticové riešenie rovnice (32) na intervale $\mathcal{I}$ a $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je daná konštantná matica, potom funkcia $X(t)\,C$ je tiež maticovým riešením rovnice (32) na $\mathcal{I}$, nakoľko platí

$$[X(t)\,C]' = X'(t)\,C = A(t)\,X(t)\,C = A(t)\,[X(t)\,C], \quad t \in \mathcal{I}.$$

Ďalej pre každý konštantný vektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ je funkcia $X\eta$ vektorovým riešením rovnice (28). Obzvlášť, každý stĺpec matice X je riešením systému (28) na $\mathcal{I}$. Maticové riešenie X sa nazýva fundamentálna matica systému (28) (resp. fundamentálne riešenie systému (32)), ak stĺpce matice X vytvárajú fundamentálny systém riešení rovnice (28), t.j., sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$. Riešenie X rovnice (32) je teda fundamentálne riešenie práve vtedy, keď $\det X(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$, t.j., matica X je regulárna na celom $\mathcal{I}$.

Veta 4 (Liouvilleov-Jacobiho-Abelov-Ostrogradského vzorec)

Nech X je maticové riešenie rovnice (32) na intervale $\mathcal{I}$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod. Potom pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí vzorec

$$\det X(t) = \det X(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, A(s)\, \mathrm{d}s}, \tag{33}$$

kde $\mathrm{Tr}\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ je stopa matice A.

Dôkaz Vety 4.

Keďže podľa predpokladov maticová funkcia X je riešením rovnice (32) na $\mathcal{I}$, má X (spojitú) deriváciu na $\mathcal{I}$, t.j., každý jej prvok x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, má (spojitú) deriváciu na $\mathcal{I}$. Využitím definície determinantu $n \times n$ matice nie je ťažké usúdiť, že platí rovnosť

$$[\det X(t)]' = \sum_{i=1}^{n} \det X_i(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{34}$$

kde pre každé dané $i = 1, \ldots, n$ matica X_i vznikne z matice X nahradením i-teho riadka jeho deriváciou, t.j.,

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i-1,1}(t) & \cdots & x_{i-1,n}(t) \\ x'_{i1}(t) & \cdots & x'_{in}(t) \\ x_{i+1,1}(t) & \cdots & x_{i+1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{35}$$

V súlade s platnosťou rovnice (32) a jej rozpísaním na maticové prvky máme

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$x'_{ik} = \sum_{j}^{n} a_{ij}(t)\, x_{jk}(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{36}$$

Vieme, že determinant matice sa nezmení, ak k ľubovoľnému jej riadku pripočítame nejakú lineárnu kombináciu ostatných riadkov. Preto platí

$$\det X_i(t) \overset{(35),(36)}{=} \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i-1,1}(t) & \cdots & x_{i-1,n}(t) \\ a_{ii}(t)\, x_{i1}(t) & \cdots & a_{ii}(t)\, x_{in}(t) \\ x_{i+1,1}(t) & \cdots & x_{i+1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = a_{ii}(t) \det X(t)$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Dosadením do rovnosti (34) dostaneme

$$[\det X(t)]' \overset{(34)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \det X(t) = \operatorname{Tr} A(t) \det X(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

Zistili sme teda, že funkcia $z := \det X$ je na intervale $\mathcal{I}$ riešením homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici prvého rádu tvaru $z' = \operatorname{Tr} A(t)\, z$. Takže máme

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$z(t) = z(t_0)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\,A(s)\,\mathrm{d}s} \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I},$$

čo dokazuje vzorec (33) a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 4

Vzorec (33) vo Vete 4 ukazuje, že pre každé $n \times n$ maticové riešenie X rovnice (32) platia dve alternatívy, konkrétne

$$\{\det X(t) \neq 0 \text{ pre každé } t \in \mathcal{I}\} \text{ alebo } \{\det X(t) = 0 \text{ pre každé } t \in \mathcal{I}\}\,.$$

Preto funkcia X je fundamentálnym riešením systému (28) práve vtedy, keď $\det X(t_0) \neq 0$ pre nejaké $t_0 \in \mathcal{I}$. V tomto prípade vektorová funkcia

$$y = Xc, \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{37}$$

je všeobecným riešením systému (28) na intervale $\mathcal{I}$. Poznamenajme, že fundamentálna matica systému (28) je určená jednoznačne až na konštantný regulárny násobok sprava. Presnejšie, ak X je nejaká fundamentálna matica systému (28) na $\mathcal{I}$, potom maticová funkcia Y je fundamentálnou maticou tohto systému práve vtedy, keď existuje konštantná invertovateľná matica $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastnosťou $Y(t) = X(t)\,C$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Tento záver potvrdzuje výsledok Vety 3.

Príklad 4

Uvažujme homogénny lineárny systém (28) tvaru

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} x$$

na intervale $\mathcal{I} = (0, \infty)$. Dosadením sa ľahko ukáže, že vektorové funkcie $x_1(t) = (t, -t)^T$ a $x_2(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)^T$ sú úplné a v súlade s Vetou 3 i lineárne nezávislé riešenia tohto systému na $\mathcal{I}$ (napríklad vektory $x_1(1) = (1, -1)^T$ a $x_2(1) = (1, 1)^T$ sú lineárne nezávislé). Preto v súlade s Definíciou 2 funkcie x_1 a x_2 tvoria fundamentálny systém riešení danej rovnice a jej všeobecné riešenie má potom pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + \frac{c_2}{t} \\ -c_1 t + \frac{c_2}{t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Funkcie x_1 a x_2 zároveň predstavujú stĺpce jednej z fundamentálnych matíc predloženého systému, konkrétne

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{t} \\ -t & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Nasledujúca veta pojednáva o asymptotických vlastnostiach riešení systému (28).

Veta 5

Nech pre $\alpha \in \mathbb{R}$ *je* A *spojitá maticová funkcia na intervale* $\mathcal{I} = [\alpha, \infty)$ *taká, že*

$$\int_\alpha^\infty \|A(s)\| \, \mathrm{d}s < \infty \tag{38}$$

pre nejakú maticovú normu $\| \cdot \|$. *Nech* $\{X_k\}_{k=0}^\infty$ *je postupnosť maticových funkcií definovaná rekurentným predpisom*

$$X_0(t) \equiv I_n, \quad X_{k+1}(t) = \int_t^\infty A(s)\, X_k(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{39}$$

Potom pre každý konštantný vektor $c \in \mathbb{R}^n$ *je nekonečný rad*

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k X_k(t)\, c \tag{40}$$

absolútne a rovnomerne konvergentný na intervale $\mathcal{I}$ *a funkcia* x *definovaná*

$$x(t) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k X_k(t)\, c, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{41}$$

je úplným riešením systému (28) *na* $\mathcal{I}$. *Naviac platí* $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$.

Dôkaz Vety 5.

Uvažujme na $\mathbb{R}^n$ nejakú vektorovú normu $\|\cdot\|$ a zvoľme s ňou súhlasnú maticovú normu. Definujme na intervale $\mathcal{I}$ (skalárnu) funkciu

$$\varepsilon(t) := \int_t^\infty \|A(s)\| \, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{42}$$

Funkcia ε je nezáporná na $\mathcal{I}$ a podľa predpokladu (38) platí $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$. To znamená, že funkcia ε je ohraničená na $\mathcal{I}$. Existuje teda $\delta > 0$ s vlastnosťou $0 < \varepsilon(t) \le \delta$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Ďalej funkcia ε má na $\mathcal{I}$ deriváciu, pričom platí

$$\varepsilon'(t) := -\|A(t)\| \le 0, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{43}$$

Pomocou matematickej indukcie ukážeme, že maticové funkcie X_k, $k \in \mathbb{N}_0$, definované v (39) spĺňajú nerovnosti

$$\|X_k(t)\| \le \frac{\varepsilon^k(t)}{k!} \le \frac{\delta^k}{k!} \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I} \text{ a pre každé } k \in \mathbb{N}_0. \tag{44}$$

Pre index $k = 0$ je $\|X_0(t)\| \equiv \|I_n\| = 1$ na $\mathcal{I}$ a nerovnosti v (44) platia triviálne. Predpokladajme, že (44) platí pre index $k = m$. Potom pre každé $t \in \mathcal{I}$ máme

$$\|X_{m+1}(t)\| \overset{(39)}{=} \left\| \int_t^\infty A(s)\, X_m(s) \, \mathrm{d}s \right\| \overset{(10)}{\le} \left| \int_t^\infty \|A(s)\| \, \|X_m(s)\| \, \mathrm{d}s \right|$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

$$= \int_t^\infty \|A(s)\|\,\|X_m(s)\|\,\mathrm{d}s \overset{(44)}{\leq} \int_t^\infty \|A(s)\|\,\frac{\varepsilon^m(s)}{m!}\,\mathrm{d}s \overset{(43)}{=} -\int_t^\infty \varepsilon'(s)\,\frac{\varepsilon^m(s)}{m!}\,\mathrm{d}s$$

$$= -\left[\frac{\varepsilon^{m+1}(s)}{(m+1)!}\right]_t^\infty = \frac{\varepsilon^{m+1}(t)}{(m+1)!} - \lim_{s\to\infty}\frac{\varepsilon^{m+1}(s)}{(m+1)!} = \frac{\varepsilon^{m+1}(t)}{(m+1)!} \leq \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!},$$

teda nerovnosti v (44) platia aj pre index $k = m+1$. Výsledok v (44) ukazuje, že nekonečný funkcionálny rad (40) má na celom $\mathcal{I}$ za majorantu konvergentný číselný rad $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!}$. Podľa Weierstrassovej vety (v teórii nekonečných radov) potom rad (40) konverguje absolútne a rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$. Funkcia x v (41) je preto definovaná korektne pre každý konštantný vektor $c \in \mathbb{R}^n$ na celom $\mathcal{I}$. Doplňme, že z druhej rovnosti v (39) a z odvodených asymptotických vlastností funkcie ε definovanej v (42) vyplýva

$$X'_{k+1}(t) \overset{(39)}{=} -A(t)\,X_k(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{45}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|X_k(t)\| \overset{(44)}{\leq} \lim_{t\to\infty}\frac{\varepsilon^k(t)}{k!} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} X_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Nech $c \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor. Dokážeme, že odpovedajúca funkcia x v (41) je riešenie homogénneho systému (28) na $\mathcal{I}$. Postupne máme

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

$$x'(t) \overset{(41)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X_k'(t)\, c \overset{(45)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} A(t)\, X_{k-1}(t)\, c$$

$$\overset{l=k-1}{=} A(t) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l X_l(t)\, c \overset{(41)}{=} A(t)\, x(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

Napokon dokážeme asymptotickú vlastnosť funkcie x. Konkrétne, ukážeme, že $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - c\| = 0$. Pomocou nerovnosti v (44) a faktu, že $X_0 \equiv 0$, máme

$$\|x(t) - c\| \overset{(41)}{=} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X_k(t)\, c \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|X_k(t)\, c\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|X_k(t)\|\, \|c\|$$

$$\overset{(44)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k(t)}{k!} \|c\| = \left(\mathrm{e}^{\varepsilon(t)} - 1\right) \|c\| \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{47}$$

Následne dostávame

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - c\| \overset{(47)}{\leq} \lim_{t\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\varepsilon(t)} - 1\right) \|c\| = \left(\mathrm{e}^{\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)} - 1\right) \|c\| = 0.$$

Preto $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$ a dôkaz je teraz úplný. ■

Obsah

Budeme teraz skúmať všeobecný nehomogénny lineárny systém (2).

Veta 6 (Štruktúra množiny riešení nehomogénneho systému)

Nech funkcie A a b sú spojité na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Nech X je fundamentálna matica systému (28) a nech x_0 je nejaké riešenie systému (2) na $\mathcal{I}$. Potom vektorová funkcia x je úplné riešenie nehomogénneho systému (2) na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď pre nejaký konštantný vektor $c \in \mathbb{R}^n$ platí

$$x(t) = X(t)\,c + x_0(t) \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{48}$$

Dôkaz Vety 6.

Dosadením do (2) sa ľahko overí, že pre každý konštantný vektor $c \in \mathbb{R}^n$ je funkcia x v (48) riešením rovnice (2) na intervale $\mathcal{I}$, pretože

$$x'(t) = X'(t)\,c + x_0'(t) = A(t)\,X(t)\,c + A(t)\,x_0(t) + b(t)$$

$$= A(t)[X(t)\,c + x_0(t)] + b(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Naopak, nech x je nejaké úplné riešenie systému (2) na $\mathcal{I}$. Potom funkcia $x - x_0$ spĺňa rovnicu (28) na $\mathcal{I}$, nakoľko pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$[x(t) - x_0(t)]' = A(t)\,x(t) + b(t) - A(t)\,x_0(t) - b(t) = A(t)\,[x(t) - x_0(t)].$$

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

Podľa rovnosti (37) v Poznámke 4 preto existuje konštanta $c \in \mathbb{R}^n$ taká, že funkcia $x(t) - x_0(t) = X(t)\,c$ na $\mathcal{I}$. Teda riešenie x má tvar (48). ■

Poznámka 5

Z Vety 6 vyplýva významné pozorovanie o všeobecnom riešení rovnice (2):

$$\begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{systému (2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{systému (28)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{partikulárne riešenie}\\ \text{systému (2)}\end{pmatrix}.$$

Na nájdenie partikulárneho riešenia systému (2) sa využíva metóda variácie konštánt. Nech x je pre dané $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ úplné riešenie začiatočnej úlohy (3). Nech X je nejaká fundamentálna matica homogénneho systému (28). Uvažujme vektorovú funkciu $c := X^{-1}x$. Funkcia c je definovaná a diferencovateľná na celom inervale $\mathcal{I}$ a platí

$$x(t) = X(t)\,c(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Po dosadení tohto vyjadrenia do rovnice (2) a úpravách dostaneme

$$c'(t) = X^{-1}(t)\,b(t) \quad \Longrightarrow \quad c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Hodnotu $c(t_0)$ určíme pomocou začiatočnej podmienky $x(t_0) = \eta$, konkrétne

$$c(t_0) = X^{-1}(t_0)\, x(t_0) = X^{-1}(t_0)\, \eta.$$

Veta 7 (Metóda variácie konštánt)

Začiatočná úloha (3) *má jediné úplné riešenie tvaru*

$$x(t) = X(t)\, X^{-1}(t_0)\, \eta + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{49}$$

kde X je ľubovoľná fundamentálna matica homogénneho systému (28).

Poznámka 6

Všimnime si, že vo vzorci (49) funkcia $x_H := X\, X^{-1}(t_0)\, \eta$ je všeobecné riešenie homogénneho systému (28) spĺňajúce $x_H(t_0) = \eta$, kým funkcia

$$x_P(t) := X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I},$$

je partikulárne riešenie rovnice (2) so začiatočnou podmienkou $x_P(t_0) = 0$. Platí teda rovnosť $x = x_H + x_P$ v súlade s Poznámkou 5.

Obsah

Z výsledkov predchádzajúcich sekcií vyplýva, že na stanovenie množiny všetkých riešení, t.j., všeobecného riešenia, lineárneho systému (2) je nutné a zároveň stačí poznať nejakú fundamentálnu maticu pridruženého homogénneho lineárneho systému (28). To je obsahom tvrdenia Vety 7. Nájdenie fundamentálnej matice vektorového, resp. maticového systému (28), resp. (32) je však vo všeobecnom prípade veľmi náročný problém. V tejto sekcii sa budeme podrobne zaoberať homogénnym lineárnym systémom (28) s konštantnými koeficientami, t.j.,

$$x' = Ax, \tag{50}$$

kde A je štvorcová konštantná reálna matica rádu n. Každé riešenie systému (50) je zrejme úplné a existuje na celej reálnej osi $\mathbb{R}$. Ukážeme, že pre systém (50) je možné pomerne efektívne určiť všetky jeho fundamentálne riešenia X, t.j., $n \times n$ maticové funkcie X spĺňajúce rovnicu (32), ktoré v súlade s Poznámkou 4 majú vlastnosť $\det X(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathbb{R}$.

Exponenciála matice

Nech M je štvorcová komplexná matica rádu n. Matica definovaná predpisom

$$\mathrm{e}^{M} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \tag{51}$$

sa nazýva exponenciála matice M. Nekonečný rad v (51) konverguje absolútne pre každú maticu $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, nakoľko číselný rad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|M\|^k \tag{52}$$

je konvergentný vzhľadom na každú maticovú normu. Matica e^M je teda korektne definovaná pre každé $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a má nasledujúce základné vlastnosti.

$$\mathrm{e}^{O_n} = I_n, \quad \|\mathrm{e}^M\| \le \mathrm{e}^{\|M\|}, \quad \mathrm{e}^M \mathrm{e}^{-M} = I_n, \quad \left(\mathrm{e}^M\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-M}, \tag{53}$$

$$\text{ak } MN = NM, \text{ potom } \mathrm{e}^M \mathrm{e}^N = \mathrm{e}^N \mathrm{e}^M = \mathrm{e}^{M+N}, \tag{54}$$

$$\text{ak } N \text{ je regulárna matica, potom } \mathrm{e}^{NMN^{-1}} = N\mathrm{e}^M N^{-1}. \tag{55}$$

Exponenciála matice ako fundamentálne riešenie

Nasledujúca veta ukazuje, že pomocou pojem exponenciála matice poskytuje jednoduché formálne vyjadrenie fundamentálnej matice systému (50).

Veta 8 (Fundamentálna matica homogénneho systému)

Nech A je štvorcová konštantná reálna matica rádu n. Potom exponenciála e^{At} je fundamentálna matica homogénneho systému (50) *na celej reálne osi $\mathbb{R}$.*

Dôkaz Vety 8.

Funkcia $X(t) = \mathrm{e}^{At}$ je maticovým riešením systému (50), nakoľko platí

$$X'(t) = \left(\mathrm{e}^{At}\right)' \overset{(51)}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(At)^k\right)' = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(At)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}\,A^k t^{k-1}$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\,A^{k-1} t^{k-1} \overset{l=k-1}{=} A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\,(At)^l \overset{(51)}{=} A\,\mathrm{e}^{At} = AX(t).$$

pre každé $t \in \mathbb{R}$. Naviac $X(0) = \mathrm{e}^{O_n} = I_n$ v súlade s (53). Preto podľa vzorca (33) je matica X regulárna na $\mathbb{R}$. Funkcia X je teda fundamentálna matica systému (50) na celej reálnej osi $\mathbb{R}$. Dôkaze je hotový. ■

Jordanov kanonický tvar matice

Výsledok Vety 8 ukazuje, že na popis všeobecného riešenia systému (50) je nutné poznať štruktúru exponenciály e^{At}, prípadne jej vhodných konštatných invertibilných násobkov sprava. V tomto smere je užitočná nasledujúca veta.

Veta 9 (Jordanova)

Pre každú maticu $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje regulárna matica $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taká, že

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \tag{56}$$

kde $J_j \in \mathbb{C}^{q_j\times q_j}$, $j = 1,\dots,m$, sú blokové matice vhodného rádu $q_j \le n$ tvaru

$$J_j = (\lambda_j) \quad \textit{alebo} \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix}, \tag{57}$$

kde λ_j, $j = 1,\dots,m$, sú (nie nutne rôzne) vlastné čísla matice M.

Matice J_j, $j = 1, \dots, m$, sa označujú ako Jordanove bloky (bunky, klietky) matice M a stĺpce matice P sa nazývajú (zovšeobecnené) vlastné vektory matice M. Blokovo diagonálna matica

$$Q := \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix} \tag{58}$$

v Jordanovom rozklade (56) je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov. Dodajme, že transformačná matica P nie je určená jednoznačne.

Pomocou Vety 9 teraz preskúmame štruktúru exponenciály e^{At}, resp. jej vhodného invertovateľného pravostranného násobku. Nech P a Q sú matice v (56) a (58), ktoré odpovedajú Jordanovmu rozkladu matice A, t.j., $A = PQP^{-1}$. Podľa (55) potom pre každé dané $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{P(Qt)P^{-1}} = P\mathrm{e}^{Qt}P^{-1}, \quad \text{teda} \quad \mathrm{e}^{At}P = P\mathrm{e}^{Qt}. \tag{59}$$

Podľa Poznámky 4 je funkcia $\mathrm{e}^{At}P$ fundamentálnou fundamentálnou maticou systému (50). V súlade s rovnosťou v (59) budeme preto vyšetrovať funkciou $P\mathrm{e}^{Qt}$. Z blokovo diagonálneho tvaru matice Q v (58) máme

$$(Qt)^k \overset{(58)}{=} \begin{pmatrix} (J_1 t)^k & O & \cdots & O \\ O & (J_2 t)^k & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & (J_m t)^k \end{pmatrix}, \qquad (60)$$

a tak podľa (53) pre exponenciálu e^{Qt} platí

$$\mathrm{e}^{Qt} \overset{(53)}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_1 t} & O & \cdots & O \\ O & \mathrm{e}^{J_2 t} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & \mathrm{e}^{J_m t} \end{pmatrix}. \qquad (61)$$

Ak matica $J_j \in \mathbb{C}^{g_j \times q_j}$, $j \in 1, \ldots, m$, je v zhode s (57) rádu 1, potom

$$\mathrm{e}^{J_j t} \overset{(57)}{=} \left(\mathrm{e}^{\lambda_j t}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot I_1. \qquad (62)$$

V opačnom prípade podľa (57) platí $J_j = \lambda_j I_{q_j} + M_j$, $j \in 1, \ldots, m$, kde matica

$$M_j \overset{(57)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Keďže matice $\lambda_j I_{q_j}$ a M_j komutujú, podľa (54) máme

$$\mathrm{e}^{J_j t} = \mathrm{e}^{\lambda_j t I_{q_j} + M_j t} \overset{(54)}{=} \mathrm{e}^{\lambda_j t} \mathrm{e}^{M_j t}. \tag{64}$$

Postupným počítaním mocnín $(M_j t)^k$ pre $k \in \mathbb{N}_0$ zistíme, že $(M_j t)^k = O_n$ pre každé $k \geq q_j$, a teda

$$\mathrm{e}^{M_j t} \overset{(53)}{=} \sum_{k=0}^{q_j - 1} \frac{1}{k!} (M_j t)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q_j - 1}}{(q_j - 1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{q_j - 2}}{(q_j - 2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Kombináciou formúl (64) a (65) dostaneme pre exponenciálu bloku $J_j t$ tvar

$$\mathrm{e}^{J_j t} = \mathrm{e}^{\lambda_{q_j} t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q_j-1}}{(q_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{q_j-2}}{(q_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

Z tejto analýzy vyplýva, že zložky stĺpcov maticovej funkcie $P\mathrm{e}^{Qt}$ budú (všeobecne komplexné) kvázipolynómy, t.j., konečne súčty výrazov tvaru

$$p(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t},$$

kde λ je vlastné číslo matice A a p je (komplexný) polynóm stupňa menšieho než je algebraická násobnosť vlastného čísla λ. Matica A je reálna, a tak s každým nereálnym vlastným číslom λ má aj komplexne združené vlastné číslo $\bar{\lambda}$. Vďaka linearite systému (50) pre každé nereálne vektorové riešenie x je i s ním komplexne združená funkcia $\bar{x}$ riešením systému (50). Keďže $\operatorname{Re} x = \frac{x+\bar{x}}{2}$ a $\operatorname{Im} x = \frac{x-\bar{x}}{2\mathrm{i}}$, reálna a imaginárna časť funkcie x sú reálnymi lineárne nezávislými riešeniami systému (50).

Fundamentálny systém riešení

Veta 10 (Fundamentálna matica systému)

Každá fundamentálna X homogénneho lineárneho systému (50) *má tvar*

$$x_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{l} \{p_k(t)\,\cos\left[(\mathit{Im}\,\lambda_k)\,t\right] + r_k(t)\,\sin\left[(\mathit{Im}\,\lambda_k)\,t\right]\}\,\mathrm{e}^{(\mathit{Re}\,\lambda_k)\,t}, \qquad (67)$$

kde indexy $i, j = 1, \dots n$, hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sú navzájom rôzne vlastné čísla matice A a funkcie p_k a r_k sú reálne polynómy stupňa menšieho než je algebraická násobnosť vlastného čísla λ_k, $k = 1, \dots, l$.

Dôsledok 3

Nech X je fundamentálna matica systému (50). *Potom*

- (i) *matica X je ohraničená na okolí ∞ práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má nekladnú reálnu časť a vlastné čísla s nulovou reálnou časťou sú jednoduché.*
- (ii) *platí $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0_n$ práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má zápornú reálnu časť.*

Príklad 5

Nájdime nejakú fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Podľa Vety 8 stačí nájsť exponenciálu matice At. V tomto prípade matica A je už v Jordanov blokovo diagonálnom tvare, nakoľko

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pričom má jednoduché vlastné číslo 2 a štvornásobné vlastné číslo -1. Exponenciála e^{At} má preto tvar

Príklad 5

$$X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2!}\,e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Poznamenajme, že získaná fundamentálna matica X rovnice v zadaní príkladu je normovaná v bode $t = 0$, t.j., platí $X(0) = I_5$. Fundamentálna matica Y normovaná v bode $t = 3$, t.j., $Y(3) = I_5$, má tvar

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2(t-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(t-3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-3)} & (t-3)\,e^{-(t-3)} & \frac{(t-3)^2}{2!}\,e^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(t-3)} & (t-3)\,e^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(t-3)} \end{pmatrix}.$$

Príklad 6

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Zistíme vlastné čísla matice systému. Jej charakteristický polynóm má tvar

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Matica A má jednoduché vlastné číslo 2 a dvojnásobné vlastné číslo 1. Vlastnému číslu 2 odpovedá jedno lineárne nezávislé riešenie tvaru

$$x(t) = \left(a\mathrm{e}^{2t},\ b\mathrm{e}^{2t},\ c\mathrm{e}^{2t}\right)^T,$$

kde a, b, c sú vhodné konštanty. Dosadením týchto výrazov do systému v zadaní príkladu dostaneme po úpravách pre hodnoty a, b, c sústavu troch algebraických lineárnych rovníc tvaru

$$2a = a - b + c, \quad 2b = a + b - c, \quad 2c = -b + 2c.$$

Táto sústava má jedno lineárne nezávislé riešenie $a = c = 1$ a $b = 0$. Vlastnému číslu 1 odpovedajú dve lineárne nezávislé riešenia tvaru

$$x(t) = \left((at + b)\,\mathrm{e}^t,\ (ct + d)\,\mathrm{e}^t,\ (ft + g)\,\mathrm{e}^t\right)^T,$$

Príklad 6

kde a, b, c, d, f, g sú vhodné konštanty. Dosadením týchto výrazov do systému v zadaní príkladu dostaneme po úpravách rovnosti

$$a + (at + b) = (at + b) - (ct + d) + (ft + g),$$

$$c + (ct + d) = (at + b) + (ct + d) - (ft + g),$$

$$f + (ft + g) = -(ct + d) + 2(ft + g).$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách t na oboch stranách odvodených rovností, získame štyri nezávislé rovnice pre a, b, c, d, f, g, konkrétne

$$f - c = 0, \quad a - f = 0, \quad a = g - d, \quad c = b - g.$$

Táto sústava má dve lineárne nezávislé riešenia

$$a = c = f = 0, \quad b = d = g = 1 \quad \text{a} \quad a = b = c = f = 1, \quad d = -1, \quad g = 0.$$

Zostrojili sme teda tri lineárne nezávislé vektorové riešenia systému v zadaní príkladu. Fundamentálny systém riešení má preto tvar

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (t+1)\,\mathrm{e}^{t} \\ (t-1)\,\mathrm{e}^{t} \\ t\,\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 6

Pre všeobecné riešenie systému potom na celom $\mathbb{R}$ platí

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{t} \\ (t-1)\,e^{t} \\ t\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 (t+1)\,e^{t} \\ c_2 e^{t} + c_3 (t-1)\,e^{t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 t\,e^{t} \end{pmatrix},$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Poznamenajme, že maticová funkcia

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} & (t+1)\,e^{t} \\ 0 & e^{t} & (t-1)\,e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} & t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

je fundamentálnou maticou systému v zadaní príkladu na celej reálnej osi $\mathbb{R}$.

Príklad 7

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica tohto systému má jednoduché reálne vlastné číslo 1 a dvojicu jednodu-

Príklad 7

chých nereálnych vlastných čísiel $1 \pm 2\mathrm{i}$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1 - 2\mathrm{i})(\lambda - 1 + 2\mathrm{i}).$$

Fundamentálny systém rovnice v zadaní príkladu je preto tvorený tromi lineárne nezávislými vektorovými riešeniami tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1 \mathrm{e}^t \\ a_2 \mathrm{e}^t \\ a_3 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \\ b_2 \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \\ b_3 \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \\ c_2 \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \\ c_3 \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \end{pmatrix},$$

kde a_j, b_j, c_j pre $j = 1, 2, 3$ sú vo všeobecnosti komplexné konštanty. Podobne ako v predchádzajúcom príklade zistíme pomocou metódy neurčitých koeficientov tri lineárne nezávislé riešenia

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \\ \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \\ 3\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \\ \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \\ 3\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \end{pmatrix}.$$

Získaný fundamentálny systém riešení je nereálny. Nahradením posledných dvoch nereálnych vektorových funkcií ich reálnymi a imaginárnymi časťami dostaneme reálny fundamentálny systém riešení tvaru

Príklad 7

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \\ 3e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \\ 3e^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Pri výpočte sme využili Eulerovu identitu

$$e^{(1\pm 2i)t} = e^t(\cos 2t \pm i \sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Príslušná fundamentálna matica X systému v zadaní príkladu má potom tvar

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^t \cos 2t & 2e^t \cos 2t \\ e^t & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t & 3e^t \cos 2t & 3e^t \sin 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Napokon pre všeobecné riešenie daného systému platí

$$x(t) = \begin{pmatrix} -2c_2 e^t \cos 2t + 2c_3 e^t \cos 2t \\ c_1 e^t + c_2 e^t \cos 2t + c_3 e^t \sin 2t \\ -c_1 e^t + 3c_2 e^t \cos 2t + 3c_3 e^t \sin 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sú reálne konštanty.

Putzerov algoritmus

V predchádzajúcich statiach sme pomocou pojmu exponenciála matice našli vo Vete 8 explicitné vyjadrenie fundamentálnej matice systému (50) v tvare

$$X(t) = \mathrm{e}^{At}C, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ľubovoľná konštantná regulárna matica. Pomocou Jordanovho rozkladu matice (56) sme následne odvodili tvar všetkých riešení daného systému (formula (67) vo Vete 10). Tento poznatok nám umožňuje hľadať fundamentálne systémy riešení najprirodzenejším spôsobom, a to metódou neurčitých koeficientov, ktorú sme použili v Príkladoch 6–7.

V nasledujúcom výklade ukážeme inú, oveľa efektívnejšiu metódu stanovenia fundamentálnej matice e^{At}, ktorá je založená na nájdení vhodného partikulárneho riešenia istej lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu s konštantnými koeficientami. Tento postup sa v literatúre obvykle označuje názvom Putzerov algoritmus. V dôkaze budeme využívať nasledujúci výsledok z lineárnej algebry.

Veta 11 (Cayleyho–Hamiltonova)

Každá matica $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je koreňom svojho charakteristického polynómu, t.j., ak $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice M, potom platí $p(M) = O_n$.

Veta 12 (Putzerov algoritmus)

Nech funkcia

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\,\lambda + d_0 \tag{68}$$

je normovaný charakteristický polynóm konštantnej matice A a nech (skalárna) funkcia x je riešenie začiatočnej úlohy

$$\left.\begin{aligned} &x^{(n)} + d_{n-1}\,x^{(n-1)} + \cdots + d_1\,x' + d_0\,x = 0, \\ &x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)} = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Definujme vektorovú funkciu $y = (y_1, \ldots, y_n)$ predpisom

$$y(t) := \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ d_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{70}$$

Potom pre exponenciálu e^{At} platí formula

$$\mathrm{e}^{At} = y_1(t)\,I_n + y_2(t)\,A + \cdots + y_n(t)\,A^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{71}$$

Dôkaz Vety 12.

Podľa Vety 8 a vďaka jednoznačnosti riešení maticového systému (32) stačí ukázať, že $n \times n$ maticová funkcia X tvaru

$$X(t) := y_1(t)\, I_n + y_2(0)\, A + \cdots + y_n(t)\, A^{n-1} \tag{72}$$

spĺňa rovnosť $X'(t) = AX(t)$ na celom $\mathbb{R}$ a platí podmienka $X(0) = I_n$. Nech x je riešenie začiatočnej úlohy (69). Dokážeme, že funkcie y_k, $k = 1, \ldots, n$, definované v (70) spĺňajú rekurentné formuly

$$y_1' + d_0\, y_n = 0, \quad y_{k+1}' - y_k + d_k\, y_n = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{73}$$

V súlade s (70) máme

$$y_k = x^{(n-k)} + \sum_{j=k}^{n-1} d_j\, x^{(j-k)}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{74}$$

Z tohto pre $k = n$ máme $y_n = x^{(0)} = x$. Ďalej rovnosť (74) derivujeme, t.j.,

$$y_k' = x^{(n-k+1)} + \sum_{j=k}^{n-1} d_j\, x^{(j-k+1)}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{75}$$

Z poslednej rovnosti pre index $k = 1$ máme

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

$$y_1' \overset{(75)}{=} x^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j\, x^{(j)} \overset{(69)}{=} -d_0\, x = -d_0\, y_n,$$

čo dokazuje prvú formulu v (73). V rovnosti (75) uvažujme index $k+1$, t.j.,

$$y_{k+1}' \overset{(75)}{=} x^{(n-k)} + \sum_{j=k+1}^{n-1} d_j\, x^{(j-k)}, \quad k = 1, \dots, n-1 \tag{76}$$

Následne odčítame rovnicu (74) od rovnice (76) a dostaneme

$$y_{k+1}' - y_k \overset{(76),(74)}{=} \sum_{j=k+1}^{n-1} d_j\, x^{(j-k)} - \sum_{j=k}^{n-1} d_j\, x^{(j-k)} = -d_k\, x = -d_k\, y_n$$

pre $k = 1, \dots, n-1$, a tak je dokázaná i druhá formula v (73). Pristúpime teraz k vyšetrovaniu maticovej funkcie X v (72). Postupne platí

$$X'(t) - AX(t) \overset{(72)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}'(t)\, A^k - A \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}(t)\, A^k$$

$$\overset{(73)}{=} -d_0\, y_n(t)\, I_n + \sum_{k=1}^{n-1} [y_k(t) - d_k\, y_n(t)]\, A^k - \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}(t)\, A^{k+1}$$

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

V druhej sume poslednej rovnosti posunieme indexáciu $k+1 \mapsto k$ a dostaneme

$$X'(t) - AX(t) = -d_0\, y_n(t)\, I_n + \sum_{k=1}^{n-1} [y_k(t) - d_k\, y_n(t)]\, A^k - \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\, A^k$$

$$= -d_0\, y_n(t)\, I_n - \sum_{k=1}^{n-1} d_k\, y_n(t)\, A^k - y_n(t)\, A^n$$

$$= -y_n(t) \left[A^n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\, A^k \right] = O_n, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde posledná rovnosť vyplýva z Cayleyho–Hamiltonovej Vety 11. Dokázali sme teda, že maticová funkcia X v (72) je skutočne riešením rovnice (32). Napokon

$$X(0) \overset{(72)}{=} y_1(0)\, I_n + y_2(0)\, A + \cdots + y_n(0)\, A^{n-1} = y_1(0)\, I_n = I_n,$$

pretože v súlade s (74) a začiatočnými podmienkami v (69) platí $y_1(0) = 1$ a $y_j(0) = 0$ pre každý index $j = 2, \ldots, n$. Podľa diskusie na začiatku dôkazu teda platí $X(t) = \mathrm{e}^{At}$ pre každé $t \in \mathbb{R}$ a formula (71) je dokázaná. ∎

Príklad 8

Stanovme riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Úlohu vyriešime pomocou Putzerovho algoritmu vo Vete 12. Normovaný charakteristický polynóm odpovedajúcej matice systému má tvar

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4, \quad \text{teda} \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4.$$

Nájdeme riešenie začiatočnej úlohy

$$z''' - 5z'' + 8z' - 4z = 0, \quad z(0) = 0 = z'(0), \quad z''(0) = 1.$$

Štandarným postupom zistíme, že

$$z(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}(t-1), \quad z'(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}(2t-1), \quad z''(t) = \mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{2t}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Vektorová funkcia y v (70) má potom tvar

$$y(t) = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}(2t-3) \\ -4\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}(4-3t) \\ \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}(t-1) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Príklad 8

Aplikovaním formuly (71) vypočítame exponenciálu e^{At}. Platí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

a tak postupnými výpočtami dostaneme

$$\mathrm{e}^{At} \overset{(71)}{=} y_1(t)\, I_3 + y_2(t)\, A + y_2(t)\, A^2 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & 0 & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} t & \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} t \\ 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{t} & 0 & 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pre hľadané riešenie začiatočnej úlohy v zadaní príkladu potom platí

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x(0) = \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & 0 & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} t & \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} t \\ 2\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{t} & 0 & 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t}(2t+1) \\ 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

V praktických úlohách sa často používa i ďalšia verzia Putzerovho algoritmu.

Veta 13 (Putzerov algoritmus)

Nech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je daná matica a* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *systém všetkých jej (nie nutne rôznych) vlastných čísiel. Potom exponenciála* e^{At} *spĺňa formula*

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t)\, M_k, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{77}$$

kde $n \times n$ *matice* M_k, $k = 0, \dots, n-1$, *sú definované predpisom*

$$M_0 := I_n, \quad M_k := \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I_n), \quad k = 1, \dots, n, \tag{78}$$

a vektorová funkcia $p = (p_1, \dots, p_n)$ *je riešením začiatočnej úlohy*

$$p' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} p, \quad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Metóda (zovšeobecnených) vlastných vektorov

V nasledujúcich statiach prednášky predstavíme iný spôsob konštrukcie lineárne nezávislých vektorových riešení systému (50).

Veta 14

Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ *nejaké vlastné číslo danej matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Nech* $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{C}^n$ *je nejaký súbor lineárne nezávislých vektorov, ktoré odpovedajú vlastnému číslu* λ. *Potom vektorové funkcie*

$$x_j(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} v_j, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{80}$$

sú lineárne nezávislé riešenia systému (50) *na celej reálnej osi* $\mathbb{R}$. *Ďalej, ak* $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ *je nejaké ďalšie vlastné číslo matice* A *rôzne od* λ *a* $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r \in \mathbb{C}^n$ *je nejaký súbor lineárne nezávislých vektorov, ktoré odpovedajú vlastnému číslu* $\tilde{\lambda}$, *potom*

$$\text{funkcie} \quad \mathrm{e}^{\lambda t} v_j, \quad j = 1, \ldots, p, \quad \mathrm{e}^{\tilde{\lambda} t} \tilde{v}_j, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \text{sú lineárne nezávislé.} \tag{81}$$

Dôkaze Vety 14.

Fakt, že pre každé vlastné číslo λ a každý odpovedajúci vlastný vektor v matice A je vektorová funkcia $x(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} v$ riešením systému (50), vyplýva z výpočtu

Dôkaze Vety 14 (pokračovanie).

$$x'(t) = \left(e^{\lambda t} v\right)' = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v = A\left(e^{\lambda t} v\right) = A x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lineárna nezávisloť funkcií x_j, $j = 1, \ldots, p$, v (80) je v súlade s Vetou 3 ekvivalentná s lineárnou nezávislosťou vektorov $x_j(0) = v_j$, $j = 1, \ldots, p$. Analogickou úvahou sa zdôvodní lineárna nezávislosť súboru funkcií (81). ∎

Pripomeňme, že násobnosť vlastného čísla λ matice A ako koreňa charakteristického polynómu sa nazýva algebraická násobnosť a označuje sa $m(\lambda)$. Maximálny počet lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A, ktoré odpovedajú vlastnému číslu λ, sa označuje ako geometrická násobnosť vlastného čísla λ a označuje sa $p(\lambda)$. Vo všeobecnosti zrejme platí nerovnosť

$$1 \leq p(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Ak $p(\lambda) < m(\lambda)$, vlastné číslo λ sa označuje ako defektné. V opačnom prípade, t.j., ak $p(\lambda) = m(\lambda)$, hovoríme o nedefektnom vlastnom čísle λ. Dodajme, že ak $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sú všetky rôzne vlastné čísla matice A, potom platí

$$m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_r) = n.$$

Hľadanie fundamentálneho systému riešení systému (50), ktorého matica A má iba nedefektné vlastné čísla, sa teda redukuje na zisťovanie všetkých lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A. Ich počet je v tomto prípade práve n.

Príklad 9

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A systému má dve jednoduché vlastné čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 3$, pretože

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3).$$

Číslu $\lambda_1 = 0$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_1 = (2,1)^T$, a následne i jedno lineárne nezávislé riešenie tvaru $e^{0t}(2,1)^T = (2,1)^T$. Podobne, vlastnému číslu $\lambda_2 = 3$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_2 = (1,-1)^T$ a lineárne nezávislé riešenie tvaru $e^{3t}(1,-1)^T = (e^{3t}, -e^{3t})^T$. Všeobecné riešenie systému v zadaní príkladu má potom tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 e^{3t} \\ c_1 - c_2 e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zovšeobecnené vlastné vektory

Ak matica A má aspoň jedno defektné vlastné číslo, potom maximálny počet jej lineáne nezávislých vlastných vektorov je menší než n. Postupom použitým v predchádzajúcom Príklade 9 teda nezískame úplný fundamentálny systém riešení systému (50). Chýbajúce lineárne nezávislé riešenia zostrojíme pomocou tzv. zovšeobecnených vlastných vektorov matice A.

Definícia 3 (Zovšeobecnený vlastný vektor)

Nech A je štvorcová komplexná matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je nejaké jej vlastné číslo. Pre dané $r \in \mathbb{N}$ sa vektor $v_r \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nazýva zovšeobecnený vlastný vektor rádu r matice A, ktorý prislúcha vlastnému číslu λ, ak platí

$$(A - \lambda I_n)^r v_r = 0 \quad \text{a súčasne} \quad (A - \lambda I_n)^{r-1} v_r \neq 0. \tag{82}$$

Ak v_r je zovšeobecnený vlastný vektor rádu r matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ, potom konečná postupnosť vektorov $v_1, \dots, v_r$ definovaných

$$v_j := (A - \lambda I_n)^{r-j} v_r, \quad j = 1, \dots, r, \tag{83}$$

sa nazýva reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktorý je generovaný vektorom v_r. Každý vektor $v_p = (A - \lambda I)^{r-p} v_r$, $1 \leq p \leq r$, ktorý je obsiahnutý v tomto reťazci, je v súlade s Definíciou 3 zovšeobecnený vlastný vektor rádu p matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ, nakoľko platí

$$(A-\lambda I_n)^p v_p = (A-\lambda I_n)^p (A-\lambda I_n)^{r-p} v_r = (A-\lambda I_n)^r v_r \overset{(82)}{=} 0,$$

$$(A-\lambda I_n)^{p-1} v_p = (A-\lambda I_n)^{p-1} (A-\lambda I_n)^{r-p} v_r = (A-\lambda I_n)^{r-1} v_r \overset{(82)}{\neq} 0.$$

Postupnosť $v_1, \dots, v_p$ je potom (pod)reťazec rádu p zovšeobecnených vlastných vektorov generovaný vektorom v_p.

Lema 3

Systém vektorov $v_1, \dots, v_r$ definovaný v (83) je lineárne nezávislý. Inými slovami, každý reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktorý prislúcha nejakému jej vlastnému číslu λ, je tvorený lineárne nezávislými vektormi.

Dôkaz Lemy 3.

Nech $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$ je r-tica čísiel, pre ktorú platí

$$c_1 v_1 + \dots + c_r v_r = 0. \tag{84}$$

Každý vektor v_j, $j = 1, \dots, r$, je zovšeobecnený vlastný vektor rádu j, t.j.,

Dôkaz Lemy 3 (pokračovanie).

$$(A-\lambda I_n)^{j-1}v_j \neq 0, \quad (A-\lambda I_n)^k v_j = 0 \text{ pre každý index } k \geq j, \tag{85}$$

v súlade s (82) v Definícii 3. To znamená, že ak rovnosť (84) vynásobíme maticou $(A-\lambda I_n)^{r-1}$ zľava, dostaneme $c_r(A-\lambda I_n)^{r-1}v_r = 0$, a teda $c_r = 0$. Podobne, ak rovnosť (84) vynásobíme maticou $(A-\lambda I_n)^{r-2}$ zľava, potom podľa (85) a s prihliadnutím, že $c_r = 0$, získame $c_{r-1}(A-\lambda I_n)^{r-2}v_{r-1} = 0$, t.j., $c_{r-1} = 0$. Takýmto spôsobom postupne ukážeme, že čísla $c_j = 0$ pre každé $j = 1, \ldots, r$. Vektory $v_1, \ldots, v_r$ sú teda skutočne lineárne nezávislé a dôkaz je hotový. ■

Nasledujúce tvrdenie poukazuje na význam zovšeobecnených vlastných vektorov pri hľadaní lineárne nezávislých vektorových riešení systému (50).

Veta 15

Ak $v_1, \ldots, v_r$ je nejaký reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktorý prislúcha vlastnému číslu λ, potom vektorové funkcie

$$x_j(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} v_{j-k}, \quad j = 1, \ldots, r \tag{86}$$

sú lineárne nezávislé riešenia systému (50) *na celom* $\mathbb{R}$.

Dôkaz Vety 15.

V súlade s (83) vektory $v_1, \ldots, v_r$ spĺňajú relácie

$$v_l = (A - \lambda I_n)\, v_{l+1}, \text{ t.j., } Av_{l+1} = \lambda v_{l+1} + v_l \text{ pre každé } l = 1, \ldots, r-1. \tag{87}$$

Zvoľme nejaké $j = 1, \ldots, r$. Dokážeme, že funkcia x_j definovaná v (86) je vektorovým riešením systému (50) na $\mathbb{R}$. Skutočne, pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
x_j'(t) - Ax_j(t) &\overset{(86)}{=} \left(\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} v_{j-k} \right)' - A\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} v_{j-k} \\
&= \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} v_{j-k} + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_{j-k} - \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} Av_{j-k} \\
&= -\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} (Av_{j-k} - \lambda v_{j-k}) + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_{j-k} \\
&\overset{(87)}{=} -\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{t^k}{k!} v_{j-k-1} + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{t^l}{l!} v_{j-l-1} = 0.
\end{aligned}$$

Naviac, funkcie x_j, $j = 1, \ldots, r$ sú lineárne nezávislé. Vyplýva to z Vety 3 a z toho, že vektory $x_j(0) = v_j$, $j = 1, \ldots, r$ sú podľa Lemy 3 lineárne nezávislé. ■

Weyrova teória charakteristických čísiel

Nech A je štvorcová matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je nejaké jej vlastné číslo matice s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. V kontexte Vety 15 budeme analyzovať všetky možné reťazce zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktoré odpovedajú danému vlastnému číslu λ. Nech

$$\{v_1^{[j]}, \ldots, v_{r_j}^{[j]}\}, \quad j = 1, \ldots, q, \tag{88}$$

je nejaký súbor takýchto reťazcov. Položme $R := \max\{r_1, \ldots, r_q\}$. Hovoríme, že reťazce v (88) sú disjunktné, ak pre každý index $k \in \{1, \ldots, R\}$ je systém všetkých možných vektorov

$$v_k^{[1]}, \; v_k^{[2]}, \; v_k^{[3]}, \; \ldots, \; v_k^{[q-1]}, \; v_k^{[q]} \tag{89}$$

lineárne nezávislý. V súlade s Definíciou 3 a s konštrukciou reťazca zovšeobecnených vlastných vetorov nie je ťažké si premyslieť, že reťazce v (88) sú disjunktné práve vtedy, keď vektory $v_1^{[1]}, \ldots, v_1^{[q]}$ sú lineárne nezávislé.

V nasledujúcich statiach budeme pracovať s maticami

$$(A - \lambda I_n)^l, \quad h_l := \operatorname{rank}(A - \lambda I_n)^l, \quad l \in \mathbb{N}_0 \tag{90}$$

Zrejme platia inklúzie

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^k \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^l \quad \text{pre každé } k \leq l. \tag{91}$$

Výrazom defekt (nulita) matice budeme označovať dimenziu jadra matice, pričom v našom kontexte budeme písať

$$\nu_l := \operatorname{def}(A-\lambda I_n)^l := \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^l, \quad l \in \mathbb{N}_0. \tag{92}$$

Z lineárnej algebry vieme, že platí rovnosť $h_l + \nu_l = n$, t.j., $\nu_l = n - h_l$, $l \in \mathbb{N}_0$.

Veta 16

Pre dané vlastné číslo λ matice A existuje najmenšie $L \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{L-1} < \nu_L \quad \text{a} \quad \nu_l = \nu_L \quad \text{pre každé } l \geq L. \tag{93}$$

Naviac, platí $\nu_L = m(\lambda)$, kde $m(\lambda)$ je algebraická násobnosť vlastného čísla λ.

Dôkaz Vety 16.

Tvrdenie dokážeme pomocou Jordanovho kanonického rozkladu matice A vo Vete 9. Nech P je odpovedajúca transformačná matica a $Q = P^{-1}AP$ je blokovo diagonálna Jordanova matica v (58). Keďže pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

$$P^{-1}(A-\lambda I_n)P = Q-\lambda I_n, \quad P^{-1}(A-\lambda I_n)^l P = (Q-\lambda I_n)^l,$$

$$\operatorname{def}(A-\lambda I_n)^l = \operatorname{def}[P^{-1}(A-\lambda I_n)^l P] = \operatorname{def}(Q-\lambda I_n)^l,$$

budeme vyšetrovať matice $(Q-\lambda I_n)^l$, $l \in \mathbb{N}_0$. V súlade s (58) máme

$$(Q-\lambda I_n)^l \overset{(58)}{=} \begin{pmatrix} (J_1-\lambda I_{q_1})^l & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & (J_m-\lambda I_{q_m})^l \end{pmatrix}, \tag{94}$$

a následne

$$\operatorname{def}(Q-\lambda I_n)^l = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{def}(J_j-\lambda I_{q_j})^l \quad \text{pre každé } l \in \mathbb{N}_0. \tag{95}$$

Podľa (57) môžu nastať pre každé $j = 1, \dots, m$ dve možnosti, a to

$$(J_j-\lambda I_{q_j})^l = ((\lambda_j-\lambda)^l) \tag{96}$$

alebo

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

$$(J_j - \lambda I_{q_j})^l = \begin{pmatrix} (\lambda_j-\lambda)^l & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & (\lambda_j-\lambda)^l \end{pmatrix}, \tag{97}$$

Následne pre každý index $j = 1, \dots, m$ platí

$$\operatorname{def}(J_j - \lambda I_{q_j})^l = \begin{cases} 0, & \lambda_j \neq \lambda, \\ \begin{Bmatrix} 1, & \text{pre (96)}, \\ q_j, & \text{pre (97) s } l \geq q_j, \\ l & \text{pre (97) s } l < q_j, \end{Bmatrix}, & \lambda_j = \lambda. \end{cases} \tag{98}$$

Uvážiac (98) a (95) pre $\operatorname{def}(Q - \lambda I_n)^l$, $l \in \mathbb{N}$, dostaneme

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

$$\operatorname{def}(Q - \lambda I_n)^l \overset{(95),(98)}{=} m(\lambda) - \sum (q_j - l),$$

kde v poslednej sume sčítavame cez všetky bloky s vlastným číslom λ a s $q_j > l$.

Ak položíme

$$L := \max\{q_j,\ q_j \text{ sú rozmery blokov v (58) s vlastným číslom } \lambda\}, \tag{99}$$

potom zrejme $\operatorname{def}(Q - \lambda I_n)^L = m(\lambda)$ a podľa (98) je číslo L najmenšie s touto vlastnosťou. Naviac máme $\operatorname{def}(Q - \lambda I_n)^l = m(\lambda)$ pre každé $l \geq L$. Platia teda relácie v (93) a dôkaz je kompletný. ∎

Definícia 4 (Weyrove charakteristiky)

Pre dané vlastné číslo λ matice A sa prirodzené čísla

$$\sigma_l := \nu_l - \nu_{l-1}, \quad l = 1, \dots, L, \tag{100}$$

označujú ako Weyrove charakteristické čísla (charakteristiky) matice A, ktoré prislúchajú vlastnému číslu λ.

Lema 4

Pre dané vlastné číslo λ matice A platí rovnosť

$$\operatorname{def}(A-\lambda I_n)^l - \operatorname{def}(A-\lambda I_n)^{l-1} = \dim\left[\operatorname{Im}(A-\lambda I_n)^{l-1} \cap \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)\right]$$

pre každé $l = 1,\ldots,L$. Obzvlášť, Weyrove charakteristiky σ_l spĺňajú

$$\sigma_l = \dim\left[\operatorname{Im}(A-\lambda I_n)^{l-1} \cap \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)\right], \quad l = 1,\ldots,L. \tag{101}$$

Veta 17

Pre dané vlastné číslo λ matice A je hodnota L definovaná v (99) dĺžka najdlhšieho reťazca zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktorý odpovedá vlastnému číslu λ. Pre každé $l = 1,\ldots,L$ je maximálny počet disjunktných reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov dĺžky l rovný hodnote σ_l.

Dôkaz Vety 17.

Prvá časť tvrdenia vyplýva z kombinácie relácií (82) v Definícii 3 a (93) vo Vete 16, nakoľko platia rovnosti

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^l \overset{(93)}{=} \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)^L \quad \text{pre každé } l \geq L.$$

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

Dokážeme druhú časť tvrdenia. Zrejme postupnosť podpriestorov

$$\left\{ \mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)^{l-1} \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n) \right\}_{l=1}^{\infty}$$

je vzhľadom na množinovú inklúziu nerastúca a

$$\mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)^{l-1} \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n) \subseteq \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n) \quad \text{pre každé } l=1,\dots,L. \tag{102}$$

V súlade s (101) potom pre Weyrove charakteristiky σ_l platí nerovnosť

$$\sigma_l \leq \sigma_{l-1}, \quad l=1,\dots,L. \tag{103}$$

Zvoľme pevne index $l=1,\dots,L$. V zhode s (102) môžeme zostrojiť istú usporiadanú bázu podpriestoru $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)$. Konkrétne, nech

$$\{v_{1,1},\dots,v_{1,\sigma_l}\} \text{ je báza podpriestoru } \mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)^{l-1} \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n). \tag{104}$$

Systém bázických vektorov v (104) môžeme doplniť na bázu podpriestoru $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)^{l-2} \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)$, t.j.,

$$\{v_{1,1},\dots,v_{1,\sigma_l} \,|\, v_{1,\sigma_l+1},\dots,v_{1,\sigma_{l-1}}\}$$
$$\text{je báza podpriestoru } \mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)^{l-2} \cap \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n).$$

Analogickým spôsobom pokračujeme ďalej až kým nezískame kompletnú bázu podpriestoru $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)$, konkrétne,

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

$$\{v_{1,1},\dots,v_{1,\sigma_l}\,|\,v_{1,\sigma_l+1},\dots,v_{1,\sigma_{l-1}}\,|\,\cdots\,|\,v_{1,\sigma_3+1},\dots,v_{1,\sigma_2}\,|\,v_{1,\sigma_2+1},\dots,v_{1,\sigma_1}\}$$
je báza podpriestoru $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)$.

Bázické vektory $v_{1,1},\dots,v_{1,\sigma_l}$ sú generované lineárne nezávislými zovšeobecnenými vlastnými vektormi rádu l. Skutočne, podľa (104) existuje σ_l nenulových vektorov $w_1,\dots,w_{\sigma_l}\in\mathbb{R}^n$ s vlastnosťou

$$v_{1,j}=(A-\lambda I_n)^{l-1}w_j\neq 0,\quad (A-\lambda I_n)^l w_j=(A-\lambda I_n)\,v_{1,j}=0,\quad j=1,\dots,\sigma_l.$$

Podľa Definície 3 je každé w_j, $j=1,\dots,\sigma_l$, zovšeobecnený vlastný vektor rádu l. Naviac, jedná sa o lineárne nezávislú skupinu vektorov, pričom odpovedajúce reťazce generované vektormi w_j, $j=1,\dots,\sigma_l$, sú v súlade s diskusiou pred Vetou 16 disjunktné. Takže počet takýchto reťazcov je aspoň σ_l. Na druhej strane, vektory s indexom 1 každého súboru disjunktných reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov rádu l ležia podľa (83) a Definície 3 v podpriestore $\operatorname{Im}(A-\lambda I_n)^{l-1}\cap\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)$. A keďže takéto vektory sú lineárne nezávislé, nutne počet uvažovaných reťazcov musí byť najviac σ_l. Z toho potom dostávame, že maximálny počet disjunktných reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov dĺžky l je práve σ_l. Dôkaz vety je teraz kompletný. ■

Poznámka 7 (Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov)

Z dôkazu Vety 17 vyplýva, že bázické vektory $v_{1,1}, \dots, v_{1,\sigma_{l-1}}$ sú generované lineárne nezávislými zovšeobecnenými vlastnými vektormi rádu $l-1$. Maximálny počet disjunktných reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov dĺžky $l-1$ je v súlade s Vetou 17 práve σ_{l-1} – sú to jednak podreťazce reťazcov dĺžky l (v počte σ_l), a jednak reťazce obsahujúce bázické vektory $v_{1,\sigma_l+1}, \dots, v_{1,\sigma_{l-1}}$ (v počte $\sigma_{l-1}-\sigma_l$). V tomto kontexte je prirodzené a užitočné zostaviť tzv. Weyrovu tabuľku zovšeobecnených vlastných vektorov matice A pre dané vlastné číslo λ, viz (105). Stĺpce predstavujú reťazce zovšeobecnených vlastných vektorov, kým riadky obsahujú zovšeobecnené vlastné vektory daného rádu. Podľa dôkazu Vety 17 sú všetky vektory v (105) lineárne nezávislé a ich celkový počet je

$$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{l-1}+\sigma_l \overset{(100)}{=} \nu_l-\nu_0=\nu_l.$$

$v_{1,1}$	$\cdots$	v_{1,σ_l}	$\cdots$	$v_{1,\sigma_{l-1}}$	$\cdots$	v_{1,σ_2}	$\cdots$	v_{1,σ_1}
$v_{2,1}$	$\cdots$	v_{2,σ_l}	$\cdots$	$v_{2,\sigma_{l-1}}$	$\cdots$	v_{2,σ_2}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$v_{l-1,1}$	$\cdots$	v_{l-1,σ_l}	$\cdots$	$v_{l-1,\sigma_{l-1}}$				
$v_{l,1}$	$\cdots$	v_{l,σ_l}						

(105)

Doplňme, že ak vo Weyrovej tabuľke (105) je vektor w bezprostredne nad vektorom v, potom platí $w = (A - \lambda I_n)\, v$. Preto pri jej zostavovaní je výhodné určiť najprv najspodnejšie vektory v každom stĺpci a potom postupným násobením týchto vektorov mocninami matice $A - \lambda I_n$ získame ostatné vektory tabuľky.

V prípade maximálneho indexu $l = L$ sa systém zovšeobecnených vlastných vektorov v danej Weyrovej tabuľke označuje ako Weyrova normálna sústava vektorov, ktorá prislúcha vlastnému číslu λ matice A. Tento systém v súlade s Poznámkou 7 a Vetou 16 obsahuje práve $\nu_L = m(\lambda)$ vektorov.

Veta 18

Nech A je štvorcová matica rádu n a $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. Potom existuje práve $m(\lambda)$ lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktoré prislúchajú vlastnému číslu λ. Tieto vektory sa dajú rozdeliť do $\sigma_1 = \nu_1 = \operatorname{def}(A - \lambda I_n)$ disjunktných reťazcov.

Napokon dodajme, že Weyrova normálna sústava zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktorá odpovedá danému vlastnému číslu λ, nie je určená jednoznačne. V kontexte Vety 15 však pri konštrukcii fundamentálneho systému riešení rovnice (50) nezáleží na jej konkrétnom výbere.

Príklad 10

Stanovme fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Daná matica A má dve dvojnásobné vlastné čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I_4) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 2)^2.$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 3$ je teda $m(\lambda_1) = 2$ a hľadaná konštantná nulita ν_L v (93) je $\nu_L = 2$. Platí $\nu_0 = 0$. Ďalej máme

$$A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Máme $\nu_1 = 1$ a $\nu_2 = 2$, a tak index L vo Vete 16 má hodnotu $L = 2$. Platí

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2,$$

a tak v súlade s Definíciou 4 máme dve Weyrove charakteristiky, konkrétne

Príklad 10

$$\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 1 \quad \text{a} \quad \sigma_2 = \nu_2 - \nu_1 = 1.$$

Weyrova tabuľka (105) zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastné číslo $\lambda_1 = 3$ má teda $L = 2$ riadky, pričom v prvom riadku bude $\sigma_1 = 1$ vektor a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor, t.j.,

$$\boxed{\begin{matrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{matrix}}$$

Vektor $v_{2,1}$ je zovšeobecnený vlastný vektor rádu 2, a tak spĺňa $(A-3I_4)^2 v_{2,1} = 0$ a $(A - 3I_4)\, v_{2,1} \neq 0$. Teda napríklad

$$v_{2,1} = (0,\ 4,\ 1,\ -2)^T.$$

Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A - 3I_4)\, v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1,\ -1,\ -1,\ 3)^T$. Je to štandardný vlastný vektor. Vlastnému číslu λ_1 teda v súlade s Vetou 15 odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_1 t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} e^{3t} t \\ -e^{3t}(t-4) \\ -e^{3t}(t-1) \\ e^{3t}(3t-2) \end{pmatrix}.$$

Príklad 10

Podobne pre vlastné číslo $\lambda_2 = 2$ je $m(\lambda_2) = 2$ a hľadaná konštantná nulita $\nu_L = 2$. Ďalej máme $\nu_0 = 0$ a

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí $\nu_1 = 2$, a teda index $L = 1$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2,$$

ktorá dáva jednu Weyrovu charakteristiku $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2$. Weyrova tabuľka (105) pre vlastné číslo $\lambda_2 = 2$ má teda $L = 1$ riadok s $\sigma_1 = 2$ vektormi

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$

Vektory $v_{1,1}$ a $v_{1,2}$ sú lineárne nezávislé zovšeobecnené vlastné vektory rádu 1, t.j., klasické vlastné vektory odpovedajúce vlastnému číslu $\lambda_2 = 2$. Podľa (82) v Definícii 3 spĺňajú podmienky $(A - 2I_4)\, v_{1,1} = 0 = (A - 2I_4)\, v_{1,2}$ a $v_{1,1} \neq 0$, $v_{1,2} \neq 0$. Výpočtom napríklad dostaneme

$$v_{1,1} = (0,\, 1,\, 0,\, 0)^T, \quad v_{1,2} = (0,\, 0,\, 0,\, 1)^T.$$

Vlastnému číslu λ_2 teda odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

Príklad 10

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Napokon fundamentálna matica systému v zadaní príkladu má tvar

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} t & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{3t}(t-4) & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{3t}(t-1) & 0 & 0 \\ 3\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t}(3t-2) & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 11

Nájdime fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Príklad 11

Daná matica A má jedno trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 2)^3.$$

Teda $m(\lambda) = 3$ a konštantná nulita je $\nu_L = 3$. Ďalej $\nu_0 = 0$ a máme

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I_3)^3 = O_3.$$

Platí $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$, a teda index $L = 3$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2 < \nu_3 = 3,$$

ktorá dáva tri Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$ a $\sigma_3 = 1$. Weyrova tabuľka (105) teda má $L = 3$ riadky, pričom v každom z nich bude jeden vektor

$v_{1,1}$
$v_{2,1}$
$v_{3,1}$

Vektor $v_{3,1}$ je zovšeobecnený vlastný vektor rádu 3. Podľa (82) v Definícii 3 spĺňa $(A-2I_3)^3 v_{3,1} = 0$ a $(A-2I_3)^2 v_{3,1} \neq 0$, teda napríklad $v_{3,1} = (0, 0, 1)^T$. Pre vektor $v_{2,1}$ potom platí $v_{2,1} = (A - 2I_3)\, v_{3,1}$, teda $v_{2,1} = (0, -1, -1)^T$, a pre vektor $v_{1,1}$ platí $v_{1,1} = (A - 2I_3)^2 v_{3,1}$, teda $v_{1,1} = (1, 2, 1)^T$. Vlastnému

Príklad 11

číslu $\lambda = 2$ odpovedajú tri lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2e^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} t \\ \mathrm{e}^{2t}(2t-1) \\ \mathrm{e}^{2t}(t-1) \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_{3,1} + t v_{2,1} + \frac{t^2}{2} v_{1,1}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\frac{t^2}{2} \\ \mathrm{e}^{2t}(t^2 - t) \\ \mathrm{e}^{2t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) \end{pmatrix}.$$

Fundamentálna matica systému v zadaní príkladu má potom tvar

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} t & \mathrm{e}^{2t}\frac{t^2}{2} \\ 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(2t-1) & \mathrm{e}^{2t}(t^2 - t) \\ \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(t-1) & \mathrm{e}^{2t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) \end{pmatrix}.$$

Príklad 12

Určme fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Daná matica A má jedno trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 1$, keďže

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^3.$$

Teda $m(\lambda) = 3$ a konštantná nulita ν_L je $\nu_L = 3$. Platí $\nu_0 = 0$ a máme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - I_3)^2 = 0.$$

Platí $\nu_1 = 2$ a $\nu_2 = 3$, a teda index $L = 2$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2 < \nu_2 = 3,$$

ktorá dáva dve Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 2$ a $\sigma_2 = 1$. Weyrova tabuľka (105) zovšeobecnených vlastných vektorov má teda $L = 2$ riadky, pričom v prvom riadku budú $\sigma_1 = 2$ vektory a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor

Príklad 12

$v_{1,1}$ $v_{2,1}$	$v_{1,2}$

Vektor $v_{2,1}$ je zovšeobecnený vlastný vektor rádu 2. Podľa (82) v Definícii 3 spĺňa $(A - I_3)^2 v_{2,1} = 0$, $(A - I_3)\, v_{2,1} \neq 0$, teda napríklad $v_{2,1} = (1,\ 1,\ -1)^T$. Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A - I_3)\, v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1,\ 2,\ -1)^T$. Vektor $v_{1,2}$ je klasický vlastný vektor, ktorý je lineárne nezávislý s vektorom $v_{1,1}$. Platí $(A - I_3)\, v_{1,2} = 0$, teda napríklad $v_{1,2} = (0,\ 1,\ -1)^T$. Takže máme tri riešenia

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(t+1) \\ \mathrm{e}^t(2t+1) \\ -\mathrm{e}^t(t+1) \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Príslušná fundamentálna matica systému v zadaní príkladu má potom tvar

$$X(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t(t+1) & 0 \\ 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t(2t+1) & \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t(t+1) & -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Obsah

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu

Nech $n \in \mathbb{N}$ je dané prirodzené číslo. Diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\, y' + p_0(t)\, y = f(t), \tag{106}$$

kde f a p_k, $k = 0, \ldots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na danom intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, sa nazýva lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu. Ak funkcia $f \equiv 0$ na celom intervale $\mathcal{I}$, hovoríme o homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici n-tého rádu, t.j.,

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\, y' + p_0(t)\, y = 0. \tag{107}$$

V opačnom prípade sa jedná o nehomogénnu rovnicu. Ľavá strana rovnice (106) sa často označuje výrazom Ly, kde L : $\mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}(\mathcal{I})$ je lineárny diferenciálny operátor n-tého rádu. Úplným riešením rovnice L$y = f(t)$ na intervale $\mathcal{I}$ rozumieme funkciu $\psi \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$, ktorá identicky spĺňa rovnicu (106) na intervale $\mathcal{I}$. Začiatočnou (Cauchyho) úlohou (problémom) sa označuje systém podmienok

$$\mathrm{L}y = f(t), \quad y(t_0) = \eta_1, \quad y'(t_0) = \eta_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \eta_n, \tag{108}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané reálne konštanty.

Veta 19 (Prevod na lineárny systém)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $t_0 \in \mathcal{I}$ daný bod. Nech funkcia ψ je (úplné) riešenie začiatočnej úlohy (108) *na intervale $\mathcal{I}$. Položme*

$$\varphi_1(t) := \psi(t), \quad \varphi_2(t) = \psi'(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t) := \psi^{(n-1)}(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{109}$$

Potom vektorová funkcia $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ je (úplným) riešením začiatočnej úlohy (3) *na $\mathcal{I}$ s maticovou funkciou A a vektorovou funkciou b tvaru*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{110}$$

ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\varphi(t_0) = \eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$. Naopak, pre každé (úplné) riešenie $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ systému (110) *na $\mathcal{I}$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\varphi(t_0) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$, je jeho prvá zložka φ_1 (úplným) riešením začiatočnej úlohy* (108) *na celom $\mathcal{I}$.*

Existencia a jednoznačnosť riešení rovnice

Veta 20 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval, $t_0 \in \mathcal{I}$ daný bod a $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ dané konštanty. Nech f a p_k, $k = 0, \dots, n-1$, sú reálne funkcie definované a spojité na $\mathcal{I}$. Potom začiatočná úloha (108) *má práve jedno úplné riešenie na celom $\mathcal{I}$.*

Príklad 13

Uvažujme lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu na intervale $\mathcal{I} = (\mathrm{e}, \infty)$ a začiatočné podmienky

$$y'' + \frac{1}{t(1-\ln t)}\, y' - \frac{1}{t^2(1-\ln t)}\, y = \frac{2-\ln t}{t(1-\ln t)}, \quad y\left(\mathrm{e}^2\right) = \mathrm{e}^2, \quad y'\left(\mathrm{e}^2\right) = 2.$$

Keďže koeficienty a pravá strana rovnice sú funkcie spojité na intervale $\mathcal{I}$, podľa Vety 20 má daná začiatočná úloha práve jedno úplné riešenie definované na celom intervale $\mathcal{I}$. Dá sa ukázať, že toto riešenie má tvar

$$y(t) = t\ln t - t, \quad t \in (e, \infty).$$

Vďaka pozorovaniu vo Vete 19, ktoré umožňuje previesť lineárnu rovnicu (106) na lineárny systém (110), majú riešenia rovnice (106) podobné vlastnosti ako vektorové riešenia systému (2). Obvzlášť, platia nasledujúce tvrdenia.

(i) Množina riešení homogénnej rovnice (107) vytvára lineárny priestor s dimenziou n. Inými slovami, všeobecné riešenie rovnice (107) má tvar

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \tag{111}$$

kde $y_1, \ldots, y_n$ je ľubovoľná n-tica lineárne nezávislých riešení rovnice (107). Funkcie $y_1, \ldots, y_n$ predstavujú fundamentálny systém riešení rovnice (107).

(ii) Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (106) má tvar

$$y = y_H + y_P, \tag{112}$$

kde y_H je všeobecné riešenie homogénnej rovnice (107) a y_P je nejaké partikulárne riešenie rovnice (106).

Tvrdenie (i) nás stavia pred problém zisťovania lineárnej závislosti/nezávislosti skalárnych funkcií, ktoré majú na danom intervale spojité všetky derivácie až do rádu $n-1$ vrátane. Tvrdenie (ii) zase ukazuje, že je nutné vypracovať vhodnú metódu variácie konštánt pre stanovenie partikulárneho riešenia y_P nehomogénnej lineárnej rovnice (106).

Wronskián a lineárna nezávislosť funkcií

Definícia 5 (Wronského matica a wronskián)

Nech $u_1, \dots, u_n$ je systém skalárnych funkcií, ktoré majú na danom intervale $\mathcal{I}$ spojité všetky derivácie až do rádu $n-1$ vrátane. Štvorcová $n \times n$ matica

$$X(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{113}$$

sa nazýva Wronského matica systému $u_1, \dots, u_n$ na intervale $\mathcal{I}$ a jej determinant

$$W(t) := \det X(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{114}$$

sa označuje ako wronskián funkcií $u_1, \dots, u_n$ na $\mathcal{I}$.

Veta 21

Nech sú splnené predpoklady Definície 5. Ak existuje $t_0 \in \mathcal{I}$ také, že wronskián $W(t_0) \neq 0$, potom funkcie $u_1, \dots, u_n$ sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$.

Dôkaz Vety 21.

Nech $c_1, \dots, c_n$ je n-tica reálnych konštánt, pre ktorú platí

$$c_1 u_1(t) + \cdots + c_n u_n(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{115}$$

Vzhľadom na to, že funkcie $u_1, \dots, u_n$ majú na $\mathcal{I}$ spojité všetky derivácie až do rádu $n-1$ vrátane, platí pre každé $j = 0, \dots, n-1$ rovnosť

$$c_1 u_1^{(j)}(t) + \cdots + c_n u_n^{(j)}(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{116}$$

Pomocou Wronského matice X v (113) pre systém funkcií $u_1, \dots, u_n$ môžeme rovnosti v (116) zapísať ekvivalentne v tvare

$$X(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \tag{117}$$

na $\mathcal{I}$, kde X je Wronského matica odpovedajúca funkciám $u_1, \dots, u_n$. Podľa predpokladu wronskián $W(t_0) \neq 0$, t.j., v súlade s Definíciou 5 je matica $X(t_0)$ regulárna. Preto v súlade s (117) máme, že nutne $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Funkcie $u_1, \dots, u_n$ sú teda lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$ a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 8

Poznamenajme, že opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, t.j., existujú lineárne nezávislé systémy funkcií $u_1, \dots, u_n$, ktorých wronskián $W(t)$ je identicky nulový na uvažovanom intervale. Napríklad funkcie

$$u_1(t) := \begin{cases} t^3, & t \in (-1, 0], \\ 0, & t \in (0, 1), \end{cases} \qquad u_2(t) := \begin{cases} 0, & t \in (-1, 0], \\ t^3, & t \in (0, 1), \end{cases} \tag{118}$$

sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I} = (-1, 1)$ a majú spojité derivácie na $\mathcal{I}$. Jednoduchým výpočtom sa môžeme presvedčiť, že ich wronskián je nulový na celom intervale $\mathcal{I}$. Skutočne, pre každé $t \in (-1, 1)$ máme

$$W(t) \overset{(114)}{=} \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \det \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 2t^2 & 0 \end{pmatrix} = 0, & t \in (-1, 0], \\ \det \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ 0 & 2t^2 \end{pmatrix} = 0, & t \in (0, 1). \end{cases}$$

V prípade, ak funkcie $u_1, \dots, u_n$ sú riešenia homogénnej lineárnej rovnice (107), potom ich odpovedajúca Wronského matica X v (113) je riešením rovnice (32) s maticou A v (110). Naopak, každé $n \times n$ maticové riešenie rovnice (32) s maticou A v (110) má tvar (113) pre vhodné riešenia $u_1, \dots, u_n$ rovnice (107).

Veta 22 (Liouvilleov-Jacobiho-Abelov-Ostrogradského vzorec)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $t_0 \in \mathcal{I}$ daný bod. Pre každú n-ticu riešení $y_1, \ldots, y_n$ homogénnej lineárnej rovnice (107) *platí pre ich odpovedajúci wronskián W v* (114) *formula*

$$W(t) = W(t_0)\, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p_{n-1}(s)\, \mathrm{d}s}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{119}$$

Dôkaze Vety 22.

Formula (119) je dôsledkom Vety 19 a vzorca (33), nakoľko v tomto prípade matica A v (110) má stopu $\operatorname{Tr} A(t) = -p_{n-1}(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. ■

Dôsledok 4 (Lineárna nezávislosť/závislosť riešení)

Riešenia $y_1, \ldots, y_n$ homogénnej rovnice (107) *sú lineárnej nezávislé na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď ich odpovedajúci wronskián W v* (114) *je nenulový na celom $\mathcal{I}$. Podobne, riešenia $y_1, \ldots, y_n$ rovnice* (107) *sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď ich wronskián $W(t) = 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$.*

Dôkaze Vety 4.

Tvrdenie je priamym dôsledkom diskusie pred Vetou 22 a v Poznámke 4. ■

Zníženie rádu homogénnej rovnice

Ak poznáme jedno riešenie homogénnej rovnice (107), ktoré je nenulové na intervale $\mathcal{I}$, môžeme vhodnou substitúciou previesť pôvodnú rovnicu (107) na homogénnu lineárnu rovnicu rádu $n-1$. Toto pozorovanie je obzvlášť dôležité pre homogénne lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, pretože v tomto prípade vieme potom stanoviť úplný fundamentálny systém riešení rovnice (107).

Veta 23

Nech funkcia ψ je (úplné) riešenie lineárnej rovnice (107) *na intervale $\mathcal{I}$, pričom $\psi(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Definujme funkciu*

$$z(t) := \left(\frac{y(t)}{\psi(t)} \right)', \quad t \in \mathcal{I}. \tag{120}$$

Ak funkcia y je (úplným) riešením rovnice (107) *na $\mathcal{I}$, potom funkcia z v* (120) *je (úplným) riešením istej homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice rádu $n-1$ so spojitými koeficientami na intervale $\mathcal{I}$.*

Dôkaz Vety 23.

Nech y je nejaké riešenie rovnice (107) na intervale $\mathcal{I}$. Označme $w := \frac{y}{\psi}$. Funkcia w má zrejme na $\mathcal{I}$ spojité všetky derivácie až do rádu n vrátane. Pomocou Lei-

Dôkaz Vety 23 (pokračovanie).

bnizovho pravidla odvodíme, že každá derivácia $y^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, má tvar

$$y^{(k)}(t) = \psi^{(k)}(t)\,w(t) + \psi(t)\,w^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \psi^{(k-j)}(t)\,w^{(j)}(t), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (121)$$

Keďže obidve funkcie y a ψ sú riešeniami lineárnej rovnice (107), platí

$$\underbrace{[\mathsf{L}y]\,(t)}_{0} \overset{(121)}{=} \underbrace{[\mathsf{L}\psi]\,(t)}_{0}\,w(t) + \psi(t)\,w^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} q_j(t)\,w^{(j)}(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

$$\Downarrow$$

$$w^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j(t)}{\psi(t)}\,w^{(j)}(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I},$$

kde q_j, $j = 1, \dots, n-1$, sú isté funkcie spojité na intervale $\mathcal{I}$. Všimnime si, že v poslednej rovnosti sa nachádzajú iba derivácie funkcie w. A keďže v súlade s (120) je $w'(t) = z(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$, dosadením získame

$$z^{(n-1)}(t) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{q_j(t)}{\psi(t)}\,z^{(j)}(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Funkcia z je teda skutočne riešením lineárnej rovnice rádu $n-1$. ∎

Príklad 14

Uvažujme homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu z Príkladu 13, t.j.,

$$y'' + \frac{1}{t(1-\ln t)}\, y' - \frac{1}{t^2(1-\ln t)}\, y = 0, \quad t \in (\mathrm{e}, \infty).$$

Nie je ťažké si všimnúť, že funkcia $\psi(t) = t$ je riešením uvedenej rovnice na celom intervale (e, ∞). Vykonáme substitúciu v (120), t.j.,

$$z = \left(\frac{y}{t}\right)' = \frac{ty' - y}{t^2} \quad \longrightarrow \quad y' = tz + \frac{y}{t} \quad \longrightarrow \quad y'' = 2z + tz',$$

$$\Downarrow$$

$$2z + tz' + \frac{tz + \frac{y}{t}}{t(1-\ln t)} - \frac{y}{t^2(1-\ln t)} = 0 \quad \longrightarrow \quad z' + \frac{3 - 2\ln t}{t(1-\ln t)}\, z = 0.$$

Získali sme homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Jej všeobecné riešenie má tvar $z(t) = \frac{C}{t^2(1-\ln t)}$ pre $t \in (\mathrm{e}, \infty)$ a $C \in \mathbb{R}$. Pre všeobecné riešenie pôvodnej rovnice v zadaní príkladu potom máme

$$y(t) \overset{(120)}{=} t \int z(t)\,\mathrm{d}t = Ct \int \frac{1}{t^2(1-\ln t)}\,\mathrm{d}t = C \ln t + C^* t, \quad t \in (\mathrm{e}, \infty),$$

kde $C, C^* \in \mathbb{R}$ sú vhodné reálne konštanty.

Metóda variácie konštánt – nehomogénna rovnica

Nasledujúca veta podáva vhodný spôsob nájdenia všeobecného riešenia nehomogénnej lineárnej rovnice (106), t.j., metódu variácie konštánt pre rovnicu (106). Analogicky, ako úvahy o riešeniach homogénnej rovnice (107), je založená na tvrdení Vety 19 o prevode lineárnej rovnice (106) na lineárny systém.

Veta 24 (Metóda variácie konštánt)

Nech $y_1, \dots, y_n$ je fundamentálny systém riešení homogénnej rovnice (107) *na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcia y je (úplné) riešenie lineárnej rovnice* (106) *na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď platí*

$$y(t) = c_1(t)\, y_1(t) + \cdots + c_n(t)\, y_n(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{122}$$

kde $c_1, \dots, c_n$ sú funkcie so spojitou deriváciou na $\mathcal{I}$ spĺňajúce

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{123}$$

Dôkaz Vety 24.

Nech X je Wronského matica, ktorá odpovedá fundamentálnemu systému riešení $y_1, \ldots, y_n$, t.j., v súlade s (113) máme

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}. \qquad (124)$$

Podľa komentára pred Vetou 22 a Dôsledku 4 vieme, že matica X v (124) je fundamentálnou maticou systému (28) s maticou A v (110). Nech y je nejaké (úplné) riešenie rovnice (106) na intervale $\mathcal{I}$. Z Vety 19 potom vyplýva, že pre vektorovú funkciu $\varphi := (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ platí pre každé $t \in \mathcal{I}$ rovnosť

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix} \varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \qquad (125)$$

Dôkaz Vety 24 (pokračovanie).

Z metódy variácie konštánt pre nehomogénne lineárne systémy následne dostávame, že funkcia φ má tvar $\varphi(t) = X(t)\,c(t)$, $t \in \mathcal{I}$, kde vektorová funkcia $c = (c_1, \ldots, c_n)$ je daná rovnosťou (123), t.j., platí

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathcal{I}.$$

Napokon funkcia y, ako prvá zložka vektora φ, spĺňa rovnosť (122). Naopak, nech funkcia y je definovaná podmienkami (122) a (123) na intervale $\mathcal{I}$. Podľa metódy variácie konštánt pre nehomogénne lineárne systémy to znamená, že vektorová funkcia $\varphi := (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ je (úplným) riešením lineárneho systému (125) na $\mathcal{I}$. V súlade s Vetou 19 je prvá zložka vektora φ, t.j., funkcia y, (úplným) riešením nehomogénnej lineárnej rovnice (106) na celom $\mathcal{I}$. ■

Vďaka tomu, že Wronského matica X v dôkaze Vety 24 je podľa Dôsledku 4 regulárna na celom $\mathcal{I}$, sústava (123) má vždy práve jedno riešenie $(c_1', \ldots, c_n')$.

Príklad 15

Uvažujme opäť lineárnu diferenciálnu rovnicu z Príkladu 13. Metódou variácie konštánt predstavenej vo Vete 24 nájdeme jej všeobecné riešenie na intervale $\mathcal{I} = (\mathrm{e}, \infty)$. Z Príkladu 14 vieme, že dvojica funkcií $y_1(t) = t$ a $y_2(t) = \ln t$ predstavuje fundamentálny systém riešení danej homogénnej rovnice. Skutočne, ich Wronského matica X a wronskián W majú tvar

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \ln t \\ 1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad W(t) = \det X(t) = 1 - \ln t < 0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

V súlade s rovnosťou (123) vo Vete 24 pre všeobecné riešenie predloženej rovnice platí $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, kde funkcie c_1 a c_2 spĺňajú podmienku

$$\begin{pmatrix} t & \ln t \\ 1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2-\ln t}{t(1-\ln t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Postupne dostávame

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \ln t \\ 1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2-\ln t}{t(1-\ln t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\ln t-2)\ln t}{t(1-\ln t)^2} \\ \frac{2-\ln t \ln t}{(1-\ln t)^2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Následnou vhodnou integráciou získame

Príklad 15

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln t - \frac{\ln t}{1-\ln t} + K_1 \\ \frac{t}{1-\ln t} + K_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I},$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Napokon všeobecné riešenie y rovnice v zadaní má tvar

$$y(t) = c_1(t)\, y_1(t) + c_2(t)\, y_2(t) = K_1 t + K_2 \ln t + t \ln t, \quad t \in \mathcal{I}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \tag{126}$$

Dodajme, že v Príklade 13 sme získali jedno partikulárne riešenie uvedenej rovnice, konkrétne $y_P(t) = t \ln t - t$, kým v Príklade 14 sme odvodili všeobecné riešenie odpovedajúcej homogénnej rovnice v tvare $y_H(t) = Ct + C^* \ln t$. Podľa vlastnosti (112) má potom všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice tvar

$$y(t) = Ct + C^* \ln t + t \ln t - t, \quad t \in \mathcal{I}, \quad C, C^* \in \mathbb{R}.$$

Táto reprezentácia všeobecného riešenia je v plnom súlade s formulou (126) pre voľbu konštánt $K_1 := C - 1$ a $K_2 := C^*$.

Lineárne rovnice s konštantnými koeficientami

Teraz sa budeme zaoberať homogénnou rovnicou (107) s konštantnými koeficientami, t.j., funkcie p_k, $k = 0, \dots, n-1$, sú konštantné. Definičným oborom rovnice (107) je teda celá reálna os, a tak všetky jej úplné riešenia existujú na celom $\mathbb{R}$. Podobne ako v prípade homogénnych lineárnych systémov je možné pomerne efektívne nájsť úplný fundametálny systém riešení rovnice (107).

Veta 25 (Fundamentálny systém riešení)

Nech p_k, $k = 0, \dots, n-1$, v (107) *sú konštantné funkcie. Uvažujme tzv. charakteristický polynóm*

$$p(\lambda) := \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 \tag{127}$$

rovnice (107)*. Ak $\mu \in \mathbb{C}$ je m-násobný koreň polynómu p v* (127)*, potom funkcie $t^l e^{\mu t}$, $l = 0, \dots, m-1$, sú lineárne nezávislé riešenia rovnice* (107) *na celom $\mathbb{R}$.*

Dôkaz Vety 25.

Nech $\mu \in \mathbb{C}$ je m-násobný koreň polynómu p v (127). Potom vieme, že derivácie

$$p^{(l)}(\mu) = 0 \quad \text{pre každé } l = 0, \dots m-1. \tag{128}$$

Zvoľme index $l = 0, \dots, m-1$ a uvažujme funkciu $y(t) := t^l e^{\mu t}$. Dokážeme, že

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

y je riešenie rovnice (107) na celom $\mathbb{R}$. Pre každé $k = 0, \dots, n$ postupne máme

$$y^{(k)}(t) = \left(t^l \mathrm{e}^{\mu t}\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(t^l\right)^{(j)} \left(\mathrm{e}^{\mu t}\right)^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{j} \left(t^l\right)^{(j)} \mu^{k-j} \mathrm{e}^{\mu t}$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{j} l(l-1)\cdots(l-j+1)\, t^{l-j} \mu^{k-j} \mathrm{e}^{\mu t}$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{j} \frac{l!}{(l-j)!} t^{l-j} \mu^{k-j} \mathrm{e}^{\mu t} = \sum_{j=0}^{l} \frac{k!}{(k-j)!\, j!} \frac{l!}{(l-j)!} t^{l-j} \mu^{k-j} \mathrm{e}^{\mu t}$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} \mathrm{e}^{\mu t} \frac{k!}{(k-j)!} \mu^{k-j} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} \mathrm{e}^{\mu t} \left(\mu^k\right)^{(j)} \tag{129}$$

pre každé $t \in \mathbb{R}$. Výraz $\left(\mu^k\right)^{(j)}$ predstavuje j-tú deriváciu mocniny λ^k (podľa premennej λ) pre hodnotu $\lambda = \mu$. Položme $p_n := 1$. Následne platí

$$\sum_{k=0}^{n} p_k y^{(k)}(t) \overset{(129)}{=} \sum_{k=0}^{n} p_k \left[\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} \mathrm{e}^{\mu t} \left(\mu^k\right)^{(j)} \right]$$

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} e^{\mu t} p_k \left(\mu^k\right)^{(j)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} e^{\mu t} \left[\sum_{k=0}^{n} \left(p_k \mu^k\right)^{(j)} \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} e^{\mu t} \left[\sum_{k=0}^{n} p_k \mu^k \right]^{(j)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} t^{l-j} e^{\mu t} \underbrace{p^{(j)}(\mu)}_{0} \overset{(128)}{=} 0$$

pre každé $t \in \mathbb{R}$. Funkcia y je teda skutočne riešením homogénnej rovnice (107) na celom $\mathbb{R}$. Teda každá z funkcií $t^l e^{\mu t}$, $l = 0, \ldots, m-1$, je riešením rovnice (107) na $\mathbb{R}$. Naviac, systém týchto funkcií je lineárne nezávislý. Vyplýva to zo základnej vety algebry, podľa ktorej rovnosť

$$0 = c_0 e^{\mu t} + c_1 t e^{\mu t} + \cdots + c_{m-1} t^{m-1} e^{\mu t} = \left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}\right) e^{\mu t}$$

môže identicky platiť na celom $\mathbb{R}$ iba vtedy, keď $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$. ■

Poznámka 9

Nie je ťažké overiť, že polynóm p definovaný v (127) je charakteristickým polynómom matice A v (110). Tento fakt korešponduje s tvrdením Vety 19.

Poznámka 10 (Nereálne korene charakteristického polynómu)

V prípade nereálneho koreňa $\mu = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$, charakteristického polynómu p v (127) sú riešenia rovnice (107) zostrojené vo Vete 25 nereálne. Konkrétne,

$$t^l \mathrm{e}^{\mu t} = t^l \mathrm{e}^{\alpha t + \mathrm{i}\beta t} = t^l \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t + \mathrm{i} t^l \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t, \quad l = 0, \ldots, m-1,$$

pomocou Eulerovej identity, kde m je násobnosť koreňa μ. Keďže polynóm p má reálne koeficienty, jeho koreňom je aj číslo $\bar{\mu} = \alpha - \mathrm{i}\beta$, a to s rovnakou násobnosťou m. Celkovo teda máme $2m$ nereálnych riešení rovnice (107). Vďaka linearite a homogenite rovnice (107) sú jej riešeniami aj reálne a imaginárne časti funkcií $t^l \mathrm{e}^{\mu t}$, $l = 0, \ldots, m-1$. Pomocou dvojice komplexne združených čísiel μ a $\bar{\mu}$ tak získame $2m$ reálnych lineárne nezávislých riešení rovnice (107) tvaru

$$t^l \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^l \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t, \quad l = 0, \ldots, m-1.$$

Pre nehomogénnu lineárnu rovnicu (106) s konštatnými koeficientami je možné v prípade špeciálnej pravej strany f stanoviť jej partikulárne riešenie i bez použitia metódy variácie konštánt. Konkrétne, ak funkcia f je kvázipolynóm, t.j.,

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left[g_{s_1}(t) \, \cos \beta t + h_{s_2}(t) \, \sin \beta t \right], \; g_{s_1}, h_{s_2} \text{ sú polynómy stupňa } s_1, s_2,$$

potom rovnica (106) má partikulárne riešenie $t^l \mathrm{e}^{\alpha t} [\tilde{g}(t) \, \cos \beta t + \tilde{h}(t) \, \sin \beta t]$, kde l je násobnosť $\alpha + \mathrm{i}\beta$ ako koreňa charakteristického polynómu p v (127) a $\tilde{g}, \tilde{h}$ sú polynómy stupňa $r = \max\{s_1, s_2\}$. Jedná sa o metódu neurčitých koeficientov.