M7180 Funkcionálna analýza II

Derivovanie v Banachových priestoroch

Peter Šepitka

zima 2021

Obsah

Obsah

Pojem derivácie zobrazenia

Definícia 1 (Derivácia v smere vektora)

Nech X a Y sú Banachove priestory, $G \subseteq Y$ otvorená množina a $f : G \to Y$ dané zobrazenie. Hovoríme, že f má v bode $x \in X$ deriváciu v smere vektora $h \in X \setminus \{0\}$, ak existuje v priestore Y limita

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}. \tag{1}$$

Limitu v (1) potom označujeme symbolom $D_h f(x)$.

Definícia 2 (Slabá (Gâuteauxova) derivácia)

Nech X a Y sú Banachove priestory a $f : G \to Y$ zobrazenie definované na danej otvorenej množine $G \subseteq X$. Ak pre dané $x \in G$ má zobrazenie f deriváciu $D_h f(x)$ v každom smere $h \in X \setminus \{0\}$ a priradenie $h \mapsto D_h f(x)$ je spojitý lineárny operátor z X do Y, potom hovoríme, že zobrazenie f má v bode x slabú (Gâuteauxovu) deriváciu, resp. f je v bode x slabo (gâuteauxovsky) diferencovateľné. Spojitý lineárny operátor $\mathrm{d}f(x)$ definovaný predpisom

$$[\mathrm{d}f(x)]h := D_h f(x), \quad h \in X, \tag{2}$$

sa nazýva slabá (Gâuteauxova) derivácia zobrazenia f v bode x.

Definícia 3 (Silná (Fréchetova) derivácia)

Nech X a Y sú Banachove priestory a $f : G \to Y$ zobrazenie definované na danej otvorenej množine $G \subseteq X$. Ak pre dané $x \in G$ existuje spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ s vlastnosťou

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{\|h\|_X} = 0, \tag{3}$$

potom hovoríme, že zobrazenie f má v bode x silnú (Fréchetovu) deriváciu, resp. f je v bode x silne (fréchetovsky) diferencovateľné. Operátor L sa nazýva silná (Fréchetova) derivácia, resp. totálny diferenciál, zobrazenia f v bode x a označuje sa symbolom $f'(x)$.

Poznámka 1 (Silná (Fréchetova) derivácia)

Spojitý lineárny operátor L v Definícii 3 je určený jednoznačne. Skutočne, ak $L_1, L_2 : X \to Y$ sú spojité lineárne operátory spĺňajúce podmienku (3), potom

$$\lim_{h \to 0} \frac{L_1 h - L_2 h}{\|h\|_X} = 0, \text{ pričom pre } h := \alpha u,\ \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{ máme } \lim_{\alpha \to 0} \frac{L_1 u - L_2 u}{\|u\|_X} = 0$$

pre každý daný nenulový vektor $u \in X$. Z poslednej rovnosti a z linearity L_1 a L_2 nutne vyplýva, že $L_1 u = L_2 u$ pre každé $u \in X$. Preto operátory $L_1 = L_2$.

Lema 1

Nech X a Y sú Banachove priestory $f : G \to Y$ zobrazenie definované na danej otvorenej množine $G \subseteq X$. Ak pre dané $x \in G$ má zobrazenie f silnú deriváciu $f'(x)$, potom existuje i slabá derivácia $\mathrm{d}f(x)$ a platí $\mathrm{d}f(x) = f'(x)$.

Dôkaz Lemy 1.

Pedpokladajme, že zobrazenie f má v bode $x \in G$ silnú deriváciu $f'(x)$. Nech $h \in X \setminus \{0\}$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sú dané, pričom $\lambda = |\lambda| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Uvažujme výraz v (1) a postupne ho vhodne upravujme s ohľadom na (3), t.j.,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} &= \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\|\lambda h\|_X} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \|h\|_X \\
&= \left(\frac{f(x+\lambda h) - f(x) - [f'(x)](\lambda h)}{\|\lambda h\|_X} + \frac{[f'(x)](\lambda h)}{\|\lambda h\|_X} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \|h\|_X \\
&= \left(\frac{f(x+\lambda h) - f(x) - [f'(x)](\lambda h)}{\|\lambda h\|_X} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \|h\|_X + [f'(x)]h.
\end{aligned}$$

Keďže podľa (3) s $L := f'(x)$ prvý člen v poslednom výraze pre $\lambda \to 0$ konverguje do nuly, máme $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = [f'(x)]h$. V súlade s Definíciou 2 má teda zobrazenie f v bode x slabú deriváciu $\mathrm{d}f(x)$ a platí $\mathrm{d}f(x) = f'(x)$. ∎

Poznámka 2

Poznamenajme, že opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, t.j., gâuteauxovská diferencovateľnosť zobrazenia f nemusí nutne implikovať jeho fréchetovskú diferencovateľnosť. Jednoduché protipríklady môžeme nájsť už v základnom kurze matematickej analýzy reálnych funkcií viac (reálnych) premenných, t.j., v prípade konečnorozmerných priestorov X a Y. Napríklad nie je ťažké ukázať, že reálna funkcia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

má v bode $[0,0]$ slabú deriváciu $\mathrm{d}f(0,0)$, t.j., deriváciu $D_h f(0,0)$ v smere každého nenulového vektora $h \in \mathbb{R}^2$, ale nie je diferencovateľná v tomto bode, t.j., neexistuje silná derivácia $f'(0,0)$.

Poznámka 3

V prípade priestoru $Y = \mathbb{C}$ je skúmané zobrazenie $f : X \to Y$ funkcionál. Ak v bode $x \in X$ má f slabú deriváciu $\mathrm{d}f(x)$, potom zrejme v súlade s Definíciou 2 je zobrazenie $\mathrm{d}f(x)$ spojitý lineárny funkcionál na X, t.j., $\mathrm{d}f(x) \in X'$.

Príklad 1

Uvažujme $X = \mathcal{C}[0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ a zobrazenie $f : X \to Y$ definované predpisom

$$f(x) := \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in X. \tag{4}$$

Ukážeme, že f má slabú deriváciu na celom priestore X. Zvoľme dané $x \in X$ a identicky nenulovú funkciu $h \in X$. Pre smerovú deriváciu $D_h f(x)$ platí

$$\begin{aligned} D_h f(x) &\overset{(1),(4)}{=} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_0^1 [x(t) + \lambda h(t)]^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \int_0^1 [2x(t)\,h(t) + \lambda h^2(t)]\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 x(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5}$$

Derivácia $D_h f(x)$ existuje v každom smere h, pričom priradenie $h \mapsto D_h f(x)$ je zrejme lineárny funkcionál na X. Naviac, pre každé $h \in X$ máme

$$|D_h f(x)| \overset{(5)}{=} 2\left|\int_0^1 x(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t\right| \le 2\int_0^1 |x(t)|\,|h(t)|\,\mathrm{d}t \le 2\|h\|_X \int_0^1 |x(t)|\,\mathrm{d}t,$$

čo znamená, že sa jedná o lineárny ohraničený, a teda lineárny spojitý funkcionál. Podľa Definície 2 má teda zobrazenie f v bode x slabú deriváciu $\mathrm{d}f(x)$ tvaru

Príklad 1

$$[\mathrm{d}f(x)]h \overset{(5)}{=} 2\int_0^1 x(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t, \quad h \in X. \tag{6}$$

Dokážeme, že funkcionál $\mathrm{d}f(x)$ v (6) je dokonca silná derivácia zobrazenia f v bode x. Pomocou (4) a (6) máme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - [\mathrm{d}f(x)]h}{\|h\|_X} \overset{(4),(6)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t}{\|h\|_X} \tag{7}$$

Limita v (7) existuje a je nulová, nakoľko platí

$$0 \le \frac{\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t}{\|h\|_X} = \frac{\int_0^1 |h(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\|h\|_X} \le \frac{\int_0^1 \|h\|_X^2\,\mathrm{d}t}{\|h\|_X} = \|h\|_X \to 0 \text{ pre } h \to 0.$$

Preto podľa Definície 3 funkcionál $\mathrm{d}f(x) = f'(x)$ pre každé $x \in X$.

Poznámka 4

Nech X a Y sú Banachove priestory a $G \subseteq X$ je otvorená množina. Dá ukázať, že zobrazenie $f : G \to Y$ má silnú deriváciu v bode $x \in G$ práve vtedy, keď

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = [\mathrm{d}f(x)]h \text{ existuje rovnomerne vzhľadom na } h \in S_X[0,1].$$

Príklad 2

Nech X je reálny Hilbertov piestor. Ukážeme, že v každom nenulovom vektore $x \in X$ má norma $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ priestoru X (generovaná odpovedajúcim skalárnym súčinom) silnú deriváciu tvaru

$$\|x\|'_X h = \left\langle h,\, \frac{1}{\|x\|_X}\, x \right\rangle, \quad h \in X. \tag{8}$$

Zvoľme pevné $x \in X \setminus \{0\}$. Potom pre každý nenulový vektor $h \in X$ a každé nenulové číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda} &= \frac{(\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X)\cdot(\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)}{\lambda\,(\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)} \\ &= \frac{\|x+\lambda h\|_X^2 - \|x\|_X^2}{\lambda\,(\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)} = \frac{|\lambda|^2\|h\|_X^2 + 2\lambda\langle h,\, x\rangle}{\lambda\,(\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)},\end{aligned} \tag{9}$$

z čoho ihneď vyplýva relácia

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda} \overset{(9)}{=} \lim_{\lambda\to 0}\frac{|\lambda|^2\|h\|_X^2 + 2\lambda\langle h,\, x\rangle}{\lambda\,(\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)} = \left\langle h,\, \frac{1}{\|x\|_X}\, x\right\rangle \tag{10}$$

pre každé nenulové $h \in X$. Zo znalosti duálneho priestoru X' môžeme následne usúdiť, že podľa Definície 2 má norma $\|\cdot\|_X$ v bode x slabú deriváciu tvaru

Príklad 2

$$[\mathrm{d}\|x\|_X]h = \left\langle h, \, \frac{1}{\|x\|_X} \, x \right\rangle, \quad h \in X. \tag{11}$$

Naviac, limita v (10) existuje rovnomerne vzhľadom na vektory $h \in S_X[0,1]$. Zaveďme pre každé dané $h \in S_X[0,1]$ a dané $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ označenie

$$V(h) := \left| \frac{\|x + \lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda} - \left\langle h, \, \frac{1}{\|x\|_X} \, x \right\rangle \right|. \tag{12}$$

Potom postupne pre $h \in S_X[0,1]$ a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dostávame

$$\begin{aligned} V(h) &\overset{(12),(9)}{=} \left| \frac{|\lambda|^2 \|h\|_X^2 + 2\lambda \langle h, \, x\rangle}{\lambda \left(\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X\right)} - \left\langle h, \, \frac{1}{\|x\|_X} \, x \right\rangle \right| \\ &= \left| \frac{|\lambda|^2}{\lambda \left(\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X\right)} + \langle h, \, x\rangle \left(\frac{2}{\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X} - \frac{1}{\|x\|_X} \right) \right| \\ &= \left| \frac{|\lambda|^2}{\lambda \left(\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X\right)} + \langle h, \, x\rangle \, \frac{\|x\|_X - \|x + \lambda h\|_X}{\|x\|_X \cdot \left(\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X\right)} \right| \\ &\leq \frac{|\lambda|}{\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X} + |\langle h, \, x\rangle| \, \frac{\left|\|x\|_X - \|x + \lambda h\|_X\right|}{\|x\|_X \cdot \left(\|x + \lambda h\|_X + \|x\|_X\right)} \end{aligned} \tag{13}$$

Príklad 2

Vhodnou aplikáciou trojuholníkovej nerovnosti získame

$$\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X \geq 2\|x\|_X - |\lambda|, \quad \big|\|x\|_X - \|x+\lambda h\|_X\big| \leq |\lambda| \tag{14}$$

pre každé $h \in S_X[0,1]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujúc $|\lambda| < 2\|x\|_X$ máme

$$\begin{aligned} V(h) &\overset{(13)}{\leq} \frac{|\lambda|}{\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X} + |\langle h,\, x\rangle| \, \frac{\big|\|x\|_X - \|x+\lambda h\|_X\big|}{\|x\|_X \cdot (\|x+\lambda h\|_X + \|x\|_X)} \\ &\overset{(14)}{\leq} \frac{|\lambda|}{2\|x\|_X - |\lambda|} + |\langle h,\, x\rangle| \, \frac{|\lambda|}{\|x\|_X \cdot (2\|x\|_X - |\lambda|)} \\ &\leq \frac{|\lambda|}{2\|x\|_X - |\lambda|} + \|x\|_X \, \frac{|\lambda|}{\|x\|_X \cdot (2\|x\|_X - |\lambda|)} = \frac{2|\lambda|}{2\|x\|_X - |\lambda|} \end{aligned} \tag{15}$$

pre každé $h \in S_X[0,1]$. Poznamenajme, že pri prechode na posledný riadok sme využili Cauchyho–Schwarzovu–Buňakovského nerovnosť

$$|\langle h,\, x\rangle| \leq \|h\|_X \cdot \|x\|_X = \|x\|_X.$$

Kombináciou (12) a (15) napokon dostávame pre každé $h \in S_X[0,1]$ reláciu

$$\left| \frac{\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda} - \left\langle h,\, \frac{1}{\|x\|_X}\, x \right\rangle \right| \overset{(12),(15)}{\leq} \frac{2|\lambda|}{2\|x\|_X - |\lambda|} \to 0 \text{ pre } \lambda \to 0.$$

Príklad 2

To dokazuje, že limita v (10) existuje rovnomerne vzhľadom na $h \in S_X[0,1]$. Podľa Poznámky 4 následne platí, že norma $\|\cdot\|_X$ má skutočne v každom nenulovom vektore $x \in X$ silnú deriváciu, pričom platí rovnosť (8). V bode $x = 0$ nemá norma $\|\cdot\|_X$ ani slabú deriváciu, nakoľko pre vektor $h \neq 0$ limita

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|0 + \lambda h\|_X - \|0\|_X}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{|\lambda|}{\lambda} \|h\|_X \quad \text{neexistuje.}$$

Príklad 3

Je dôležité poznamenať, že v Banachových priestoroch nemusí byť norma fréchetovsky diferencovateľná. Napríklad v priestore $X = l^1$ nemá odpovedajúca norma $\|\cdot\|_1$ silnú deriváciu v žiadnom bode $x \in X$. Na druhej strane, slabá derivácia normy existuje práve v bodoch $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ s vlastnosťou $x_n \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade sa dá ukázať, že platí

$$[\mathrm{d}\|x\|_1]\{h_n\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sg}(x_n)\, h_n \quad \text{pre každé } \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{16}$$

Zobrazenie v (16) je zrejme definované korektne na celom priestore X. Naviac sa jedná o spojitý lineárny funkcionál na X, keďže duálny priestor $X' \simeq l^{\infty}$.

Obsah

Konvexné funkcie

V tejto sekcii sa budeme zaoberať výhradne reálnymi funkciami (zobrazeniami), t.j., funkcionálmi $f : X \to \mathbb{R}$, kde X je reálny Banachov priestor.

Definícia 4 (Konvexná funkcia)

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je daná konvexná množina. Zobrazenie $f : G \to \mathbb{R}$ sa označuje ako konvexné na G, ak pre každé dva body $x, y \in X$ a každé $\lambda \in [0,1]$ platí nerovnosť

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{17}$$

Príklad 4

Základnými príkladmi konvexných funkcií na Banachovom priestore X je každá norma na X a každý sublineárny funkcionál na X, t.j., funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$

$$\text{spĺňajúci } f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ pre každé } x, y \in X \text{ a pre každé } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Ďalším dôležitým príkladom konvexnej funkcie je konvexný funkcionál na X. Pripomeňme, že sa jedná o zobrazenie $p : X \to \mathbb{R}$ s vlastnosťami

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad x \in X, \quad \lambda \in [0, \infty), \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X. \tag{19}$$

Veta 1

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia, ktorá je ohraničená na okolí daného bodu $x_0 \in G$. Potom existujú kladné konštanty L a δ také, že

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_X \quad \text{pre každú dvojicu vektorov } x, y \in B_X(x_0, \delta) \subseteq G. \tag{20}$$

Poznámka 5

Tvrdenie Vety 1 možno formulovať i v tvare, že každá funkcia, ktorá je konvexná a lokálne ohraničená na konvexnej množine $G \subseteq X$, je na G lokálne lipschitzovská.

Dôkaz Vety 1.

Z predpokladov tvrdenia vyplýva existencia kladných čísiel M a δ s vlastnosťou

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in B_X(x_0, 2\delta) \subseteq G. \tag{21}$$

Zvoľme pevne rôzne vektory $x, y \in B_X(x_0, \delta) \subseteq B_X(x_0, 2\delta)$ a definujme

$$\alpha := \|x - y\|_X > 0, \quad z := y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x). \tag{22}$$

Nie je ťažké ukázať, že vektor z v (22) spĺňa vlastnosti

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

(i) $\|z - x_0\|_X \leq 2\delta$, t.j., $z \in B_X(x_0, 2\delta)$, a tak podľa (21) platí $|f(z)| \leq M$,

(ii) vektor y je konvexnou lineárnou kombináciou x a z, konkrétne platí

$$y \overset{(22)}{=} \frac{\delta}{\alpha+\delta}\, x + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, z. \tag{23}$$

Preto v súlade s konvexnosťou funkcie f máme nerovnosť

$$f(y) \overset{(23)}{=} f\left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\, x + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, z\right) \overset{(17)}{\leq} \frac{\delta}{\alpha+\delta}\, f(x) + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, f(z), \quad \text{a následne}$$

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\delta}{\alpha+\delta}\, f(x) - f(x) + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, f(z) = \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, [f(z) - f(x)]. \tag{24}$$

Kombináciou nerovností v (24) a (21) dostaneme

$$f(y) - f(x) \overset{(24)}{\leq} \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, [f(z) - f(x)] \overset{(21)}{\leq} \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\, [M + M] \leq \frac{2M}{\delta}\, \alpha. \tag{25}$$

Nie je ťažké si premyslieť, že nerovnosť (25) platí i pre zámenu $x \leftrightarrow y$, a tak

$$\pm[f(x) - f(y)] \leq \frac{2M}{\delta}\, \alpha, \quad \text{teda} \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{\delta}\, \alpha = \frac{2M}{\delta}\, \|x - y\|_X.$$

Posledná nerovnosť tak potvrdzuje platnosť (20) pre voľbu $L := \frac{2M}{\delta} > 0$. ■

Dôsledok 1

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia. Potom f je spojitá na množine G práve vtedy, keď je lokálne ohraničená na množine G.

Dôkaz Dôsledku 1.

Je zrejmé, že spojitosť každej funkcie f na každej množine $G \subseteq X$ implikuje lokálnu ohraničenosť f na G. Ak naviac G je konvexná množina a f je konvexná funkcia, potom podľa Vety 1 z lokálnej ohraničenosti funkcie f na G vyplýva lokálna lipschitzovskosť f na G, a teda vzhľadom na nerovnosť (20) nutne i spojitosť f v každom bode množiny G. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 6

Poznamenajme, že pri skúmaní spojitosti konvexných funkcií na reálnych Banachových priestoroch hrá dôležitú úlohu ich dimenzia. Je možné dokázať, že v prípade konečnorozmerného priestoru X je každá konvexná funkcia $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá na každej otvorenej konvexnej množine $G \subseteq X$. Na druhej strane vieme, že v prípade $\dim X = \infty$ vždy existujú na X nespojité lineárne funkcionály, a teda v súlade s Príkladom 4 i nespojité konvexné funkcie $f : X \to \mathbb{R}$.

Definícia 5 (Polospojitosť funkcie)

Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Hovoríme, že f je polospojitá zhora na X, ak pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in X,\ f(x) < \alpha\} \text{ otvorená v } X. \tag{26}$$

Podobne, funkcia f je polospojitá zdola na X, ak pre každá $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in X,\ f(x) > \alpha\} \text{ otvorená v } X. \tag{27}$$

Poznámka 7

Poznamenajme, že vlastnosť (26), resp. (27) je ekvivalentná s tým, že množina

$$\{x \in X,\ f(x) \geq \beta\}, \text{ resp. } \{x \in X,\ f(x) \leq \beta\} \text{ je uzavretá v } X \tag{28}$$

pre každé $\beta \in \mathbb{R}$. Doplňme, že polospojitosť zhora, resp. zdola funkcie f v danom bode $x_0 \in X$ sa štandarne definuje ako relácia

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0), \quad \text{resp.} \quad \liminf_{x \to x_0} \geq f(x_0). \tag{29}$$

Platí, že funkcia f je polospojitá zhora (zdola) v každom bode $x \in X$ v zmysle (29) práve vtedy, keď spĺňa reláciu (26) (reláciu (27)). Napokon dodajme, že funkcia f je spojitá na celom X práve vtedy, keď je polospojitá zhora i zdola na celom X, t.j., platia relácie (26) a (27)

Veta 2

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- **(i)** *Funkcia f je spojitá na množine G.*
- **(ii)** *Funkcia f je polospojitá zhora na množine G.*
- **(iii)** *Funkcia f je ohraničená zhora na okolí $\mathcal{O}(x_0) \subseteq G$ nejakého bodu $x_0 \in G$.*
- **(iv)** *Funkcia f je spojitá v nejakom bode $x_0 \in G$.*

Dôkaz Vety 2.

Platnosť implikácie (i)⇒(ii) vyplýva z Poznámky 7. Ak funkcia f je polospojitá zhora na množine G a $x_0 \in G$ je nejaký daný bod, potom množina

$$\{x \in X,\ f(x) < f(x_0) + 1\} \tag{30}$$

je v súlade s (26) v Definícii 5 otvorená a neprázdna, nakoľko zrejme obsahuje bod x_0. Jedná sa teda o okolie $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0. A keďže podľa (30) platí $f(x) < f(x_0) + 1$ pre každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$, funkcia f je ohraničená zhora na množine $\mathcal{O}(x_0)$. Platí teda implikácia (ii)⇒(iii). Pre dôkaz implikácie (iii)⇒(iv) stačí v súlade s Vetou 1 a Dôsledkom 1 ukázať, že funkcia f je ohraničená i zdola na okolí $\mathcal{O}(x_0)$. Predpokladajme, že funkcia f je zhora ohraničená zhora na ne-

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

jakom okolí bodu x_0, t.j., existujú kladné konštanty M a δ s vlastnosťou

$$f(x) \leq M, \quad x \in B_X(x_0, \delta) \subseteq G. \tag{31}$$

Pre každý bod $x \in B_X(x_0, \delta)$ platí, že aj bod $2x_0 - x \in B_X(x_0, \delta)$, keďže $\|(2x_0 - x) - x_0\|_X = \|x_0 - x\|_X < \delta$. Množina $B_X(x_0, \delta)$ je zrejme konvexná. Potom pre každý bod $x \in B_X(x_0, \delta)$ postupne máme

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}(2x_0 - x) + \frac{1}{2}x\right) \overset{(17)}{\leq} \frac{1}{2}f(2x_0 - x) + \frac{1}{2}f(x) \overset{(31)}{\leq} \frac{1}{2}[M + f(x)]$$

$$\Downarrow$$

$$2f(x_0) - M \leq f(x), \quad x \in B_X(x_0, \delta).$$

Posledná nerovnosť ukazuje, že funkcia f je ohraničená zdola na okolí $B_X(x_0, \delta)$, t.j., je ohraničená na $B_X(x_0, \delta)$. Podľa vyššie uvedenej diskusie teda platí implikácia (iii)⇒(iv). Pristúpime teraz k dôkazu implikácia (iv)⇒(i). Nech funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in G$. Uvažujme daný bod $y \in G$, $y \neq x_0$, a nech $\varepsilon > 0$ je také, že okolie $B_X(y, \varepsilon) \subseteq G$. Definujme kladné číslo ω rovnosťou

$$\omega := \frac{\varepsilon}{2\|y - x_0\|_X}. \tag{32}$$

Následne vektor $z := y + \omega(y - x_0)$ patrí do okolia $B_X(y, \varepsilon)$, pretože v súlade

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

s (32) platí $\|z-y\|_X = \frac{\varepsilon}{2}$. Naviac, vektor y je konvexnou lineárnou kombináciou vektorov x_0 a z, konkrétne máme rovnosť

$$y = \lambda x_0 + (1-\lambda)z, \quad \text{kde } \lambda := \frac{\omega}{\omega+1} \in (0,1), \tag{33}$$

ako sa možno ľahko presvedčiť. Spojitosť f v bode x_0 implikuje vlastnosť (31). Ukážeme teraz, že funkcia f je ohraničená zhora na množine $B_X(y, \lambda\delta)$ s číslom δ z (31). V prvom rade dokážeme, že otvorená guľa $B_X(y, \lambda\delta) \subseteq G$. Skutočne, pre každé $x \in B_X(y, \lambda\delta)$ platí

$$x_0 + \frac{1}{\lambda}(x-y) \in B_X(x_0, \delta) \subseteq G, \text{ pretože} \tag{34}$$

$$\left\| x_0 - \left[x_0 + \frac{1}{\lambda}(x-y) \right] \right\|_X = \frac{1}{\lambda}\|x-y\|_X < \delta,$$

$$x \overset{(33)}{=} \lambda \left[x_0 + \frac{1}{\lambda}(x-y) \right] + (1-\lambda)z. \tag{35}$$

Posledná rovnosť ukazuje, že bod x je konvexnou lineárnou kombináciou dvoch bodov, ktoré patria do konvexnej množiny G, t.j., nutne potom platí $x \in G$. Na druhej strane, vďaka konvexnosti funkcie f pre každé $x \in B_X(y, \lambda\delta)$ dostávame

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$f(x) \overset{(35)}{=} f\left(\lambda\left[x_0 + \frac{1}{\lambda}(x-y)\right] + (1-\lambda)z\right)$$

$$\overset{(17)}{\leq} \lambda f\left(x_0 + \frac{1}{\lambda}(x-y)\right) + (1-\lambda)f(z) \overset{(34),(31)}{\leq} \lambda M + (1-\lambda)f(z). \qquad (36)$$

V súlade s odvodenou nerovnosťou (36) je teda funkcia f naozaj ohraničená zhora na okolí $B_X(y, \lambda\delta)$ bodu y. Následne, podľa už dokázanej implikácie (iii)⇒(iv), je f spojitá v bode y. Keďže bod $y \in G$ bol zvolený ľubovoľne, funkcia f je spojitá na celej množine G, t.j., platí tvrdenie (i). Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 8

Konvexné funkcie majú niektoré vlastnosti podobné ako lineárne funkcionály. Vieme, že lineárny funkcionál je spojitý na celom priestore X práve vtedy, keď je spojitý aspoň v jednom bode $x_0 \in X$. S touto vlastnosťou v prípade konvexných funkcií korešponduje ekvivalencia tvrdení (i) a (iv) vo Vete 2. Ďalej vieme, že spojité lineárne funkcionály sú ohraničené na jednotkovej guli $B_X[0,1]$. Dá sa dokázať, že ak X je separabilný Banachov priestor nekonečnej dimenzie, potom vždy existuje spojitá konvexná funkcia na X, ktorá je neohraničená na $B_X[0,1]$.

Veta 3

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia. Potom pre každý vektor $x \in G$ existuje limita

$$[\mathrm{d}^+ f(x)]h := \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{37}$$

pre každé $h \in X$. Naviac, zobrazenie $\mathrm{d}^+ f(x)$ je konvexný funkcionál na X.

Dôkaz Vety 3.

Zvoľme bod $x \in G$ a pevný vektor $h \in X$. Ukážeme, že zlomok

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \tag{38}$$

je ako funkcia reálnej premennej λ na vhodnom pravom okolí bodu 0 neklesajúci a zdola ohraničený. Zrejme existuje $\delta > 0$ také, že vektor $x + th \in G$ pre každé $t \in (0, \delta)$. Pre každé dve hodnoty $t_1, t_2 \in (0, \delta)$ s $t_1 < t_2$ platí

$$x + t_1 h = \left(\frac{t_2 - t_1}{t_2}\right) x + \left(\frac{t_1}{t_2}\right)(x + t_2 h). \tag{39}$$

Jedná o konvexnú lineárnu kombináciu bodov x a $x + t_2 h$, a tak máme

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$f(x+t_1h) \overset{(39)}{=} f\left(\frac{t_2-t_1}{t_2}\,x + \frac{t_1}{t_2}\,(x+t_2h)\right) \le \frac{t_2-t_1}{t_2}\,f(x) + \frac{t_1}{t_2}\,f(x+t_2h)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+t_1h) - f(x) \le \frac{t_1}{t_2}\,[f(x+t_2h) - f(x)]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x+t_1h)-f(x)}{t_1} \le \frac{f(x+t_2h)-f(x)}{t_2},$$

čo potvrdzuje predpovedanú monotónnosť uvedeného zlomku na intervale $(0,\delta)$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že zavedené δ má naviac vlastnosť, že aj vektory $x-th \in G$ pre každé $t \in (0,\delta)$. Potom postupne platí

$$x = \frac{1}{2}\,[x-th] + \frac{1}{2}\,[x+th], \quad t \in (0,\delta)$$

$$\Downarrow \text{ konvexnosť funkcie } f \Downarrow$$

$$f(x) \le \frac{1}{2}\,f(x-th) + \frac{1}{2}\,f(x+th). \tag{40}$$

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

Z nerovnosti (40) po malých úpravách odvodíme

$$-\frac{f(x+t(-h))-f(x)}{t} \leq \frac{f(x+th)-f(x)}{t}, \quad t \in (0,\delta). \tag{41}$$

Vychádzajúc z výsledkov vyššie, výraz na pravej strane nerovnosti (41) je neklesajúci na intervale $(0,\delta)$, a tak výraz na ľavej strane tejto nerovnosti je nutne nerastúci na intervale $(0,\delta)$ (s voľbou $h := -h$). Preto dostávame

$$-\frac{f\left(x+\frac{\delta}{2}(-h)\right)-f(x)}{\frac{\delta}{2}} \leq -\frac{f(x+t(-h))-f(x)}{t}$$

$$\leq \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \leq \frac{f\left(x+\frac{\delta}{2}h\right)-f(x)}{\frac{\delta}{2}} \tag{42}$$

pre každé $t \in (0, \frac{\delta}{2})$. Nerovnosti v (42) ukazujú, že zlomok (38) je ohraničený zdola na $(0, \frac{\delta}{2})$, a preto s ohľadom na vyššie dokázanú monotónosť existuje limita v (37). Z (42) ďalej vyplýva, že funkcionál $\mathrm{d}^+f(x)$ zavedený v (37) spĺňa

$$-[\mathrm{d}^+f(x)](-h) \overset{(37)}{=} \lim_{\lambda\to 0+}\left[-\frac{f(x+\lambda(-h))-f(x)}{\lambda}\right] \overset{(42),(37)}{\leq} [\mathrm{d}^+f(x)]h \tag{43}$$

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

pre každé $h \in X$. Zostáva dokázať, že funkcionál $\mathrm{d}^+f(x)$ je konvexný, t.j., ukázať, že spĺňa vlastnosti v (19). Zrejme v súlade s (37) pre každý vektor $h \in X$ platí $\mathrm{d}^+f(x)[0 \cdot h] = 0 = 0 \cdot \mathrm{d}^+f(x)h$. Pre $\omega > 0$ platí

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}^+f(x)](\omega h) &\overset{(37)}{=} \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x+\lambda\omega h) - f(x)}{\lambda} \\ &= \omega \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x+\lambda\omega h) - f(x)}{\lambda\omega} \overset{(37)}{=} \omega[\mathrm{d}^+f(x)]h, \quad h \in X. \end{aligned} \tag{44}$$

Napokon dokážeme trojuholníkovú nerovnosť. Nech $h, k \in X$ sú dva dané vektory a $(0, \delta)$ interval taký, že $x + th, x + tk \in G$ pre každé $t \in (0, \delta)$. Keďže

$$x + \frac{t}{2}(h+k) = \frac{1}{2}(x+th) + \frac{1}{2}(x+tk),$$

vektor $x + \frac{t}{2}(h+k) \in G$ pre každé $t \in (0, \delta)$. Následne platí

$$f\left(x + \frac{t}{2}(h+k)\right) \le \frac{1}{2} f(x+th) + \frac{1}{2} f(x+tk)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f\left(x + \frac{t}{2}(h+k)\right) - f(x)}{\frac{t}{2}} \le \frac{f(x+th) - f(x)}{t} + \frac{f(x+tk) - f(x)}{t} \tag{45}$$

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

pre každé $t \in (0, \delta)$. Limitovaním nerovnosti (45) pre $t \to 0^+$ získame s ohľadom na označenie v (37) reláciu

$$[\mathrm{d}^+ f(x)](h + k) \le [\mathrm{d}^+ f(x)]h + [\mathrm{d}^+ f(x)]k, \quad h, k \in X. \tag{46}$$

Podľa (19) je funkcionál $\mathrm{d}^+ f(x)$ skutočne konvexný a dôkaz je završený. ∎

Poznámka 9

Motivovaní rovnosťou (37) môžeme pre každé dané $x \in G$ uvažovať funkcionál

$$[\mathrm{d}^- f(x)]h := \lim_{\lambda \to 0^-} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{47}$$

pre každé $h \in X$. Podľa nerovností (41)–(43) je zobrazenie $\mathrm{d}^- f(x)$ definované korektne na X, pričom platí

$$[\mathrm{d}^- f(x)]h \overset{(43)}{=} -[\mathrm{d}^+ f(x)](-h) \overset{(43)}{\le} [\mathrm{d}^+ f(x)]h \quad \text{pre každé } h \in X. \tag{48}$$

V prípade reálneho Banachovho priestoru X má f v bode $x \in G$ deriváciu $D_h f(x)$ v každom smere $h \in X \setminus \{0\}$ práve vtedy, keď v (48) platí rovnosť, t.j., $-[\mathrm{d}^+ f(x)](-h) = [\mathrm{d}^+ f(x)]h$ pre každé vektor $h \in X$. Naviac, konvexný funkci-

Poznámka 9

onál $\mathrm{d}^+ f(x)$ je v tejto situácii dokonca lineárny. Skutočne, máme

$$\text{pre } \omega < 0 \text{ platí } \quad [\mathrm{d}^+ f(x)](\omega h) = -[\mathrm{d}^+ f(x)](-\omega h) \overset{(44)}{=} \omega[\mathrm{d}^+ f(x)]h, \quad h \in X, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}^+ f(x)](h+k) &= -[\mathrm{d}^+ f(x)](-h-k) \overset{(46)}{\geq} -[\mathrm{d}^+ f(x)](-h) - [\mathrm{d}^+ f(x)](-k) \\ &= [\mathrm{d}^+ f(x)]h + [\mathrm{d}^+ f(x)]k, \quad h, k \in X. \end{aligned} \tag{50}$$

Kombináciou (49) a (50) s (44) a (46) napokon získame

$$[\mathrm{d}^+ f(x)](h+k) \overset{(50),(46)}{=} [\mathrm{d}^+ f(x)]h + [\mathrm{d}^+ f(x)]k, \quad [\mathrm{d}^+ f(x)](\omega h) = \omega[\mathrm{d}^+ f(x)]h \tag{51}$$

pre každé $h, k \in X$ a každé $\omega \in \mathbb{R}$. To dokazuje linearitu funkcionálu $\mathrm{d}^+ f(x)$.

Veta 4

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá konvexná funkcia, ktorá má v danom bode $x \in G$ deriváciu $D_h f(x)$ v každom smere $h \in X \setminus \{0\}$, pričom funkcionál $D_h f(x)$ je lineárny. Potom funkcia f má v bode x slabú deriváciu $\mathrm{d} f(x)$.

Dôkaz Vety 4.

V súlade s Definíciou 2 stačí ukázať ohraničenosť funkcionálu $D_h f(x)$. Vďaka spojitosti v bode $x \in G$ je funkcia f ohraničená a následne podľa Vety 1 i lipschitzovská na nejakom dostatočne malom okolí bodu x. V súlade s (20) platí

$$|f(u) - f(v)| \le L\|u - v\|_X \quad \text{pre každú dvojicu vektorov } u, v \in B_X(x, \varepsilon) \subseteq G \tag{52}$$

pre isté kladné konštanty L a ε. Zvoľme nenulový vektor $h \in X$ a položme $\delta := \frac{\varepsilon}{\|h\|_X}$. Potom pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ s $0 < |\lambda| < \delta$ platí $x + \lambda h \in B_X(x, \varepsilon)$ a

$$\left| \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \right| \overset{(52)}{\le} L \frac{\|\lambda h\|_X}{|\lambda|} = L\|h\|_X, \quad |\lambda| \in (0, \delta). \tag{53}$$

Využijúc formulu (1) limitovaním nerovnosti (53) pre $\lambda \to 0$ dostaneme nerovnosť $|D_h f(x)| \le L\|h\|_X$ pre každé $h \in X$, pričom konštanta $L > 0$ je nezávislá na vektore $h \in X$. Lineárny funkcionál $D_h f(x)$ je teda ohraničený, a preto aj spojitý na priestore X. Preto podľa Definície 2 má funkcia f slabú deriváciu $\mathrm{d} f(x)$ v bode x. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 10

V súlade s (51) v Poznámke 9 v prípade reálneho Banachovho priestoru X môžeme predpoklad linearity smerovej derivácie $D_h f(x)$ zrejme vypustiť.

Veta 5

Nech X je Banachov priestor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Norma $\|\cdot\|_X$ má na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ rovnomerne slabú deriváciu.*

(ii) *Norma $\|\cdot\|_X$ má na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ rovnomerne silnú deriváciu.*

Poznámka 11

Poznamenajme, že vlastnosti normy v tvrdeniach Vety 5(i)–(ii) znamenajú, že v odpovedajúcich $\varepsilon - \delta$ definíciách ich slabej a silnej derivácie číslo $\delta > 0$ nezávisí na výbere vektora $x \in S_X[0,1]$. Konkrétne, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že v prípade slabej derivácie normy $\|\cdot\|$ (obzvlášť, v súlade s Poznámkou 4) platí

$$\left|\frac{\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda} - [\mathrm{d}f(x)]h\right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } |\lambda| < \delta \text{ a pre každé } x, h \in S_X[0,1].$$

Podobne v prípade rovnomernej existencie silnej derivácie normy $\|\cdot\|$ v súlade s limitou (3) v Definícií 3 platí relácia

$$\left|\frac{\|x+h\|_X - \|x\|_X}{\|h\|_X} - [f'(x)]h\right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } \|h\|_X < \delta \text{ a pre každé } x \in S_X[0,1].$$

Rovnomerná existencia slabej (silnej) derivácie normy na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ má význam v geometrickej teórii Banachovho priestoru X.

Obsah

Dotykový funkcionál

Nech X je daný Banachov priestor a $x \in X$ daný nenulový vektor. Jeden z dôsledkov Hahnovej–Banachovej vety zaručuje existenciu aspoň jedného spojitého lineárneho funkcionálu $g : X \to \mathbb{C}$ s vlastnosťou

$$\|g\| = 1, \quad g(x) = \|x\|_X. \tag{54}$$

Definícia 6 (Dotykový funkcionál)

Pre daný nenulový vektor $x \in X$ sa spojitý lineárny funkcionál $g : X \to \mathbb{C}$ definovaný podmienkami v (54) označuje ako dotykový funkcionál v bode x.

Poznámka 12

Názov funkcionálu g v Definícii 6 je motivovaný jeho geometrickou interpretáciou. Nie je náročné ukázať, že pre nadrovinu

$$E_g := \{h \in X,\ g(h) = r\}, \quad r := \|x\|_X \tag{55}$$

platí $x \in E_g \cap B_X[0,r] = E_g \cap S_X[0,r]$, t.j., jedná sa o dotykovú nadrovinu k sfére $S_X[0,r]$ v bode x priestoru X.

Veta 6

Nech X je reálny Banachov priestor. Zaveďme označenie

$$f(x) := \|x\|_X, \quad x \in X. \tag{56}$$

Nech $x \in X$ je daný nenulový vektor a predpokladajme, že existuje slabá derivácia $\mathrm{d}f(x)$. Potom $\mathrm{d}f(x)$ je dotykový funkcionál v bode x, t.j. v zhode s Definíciou 6 spojitý lineárny funkcionál spĺňajúci podmienky

$$\|\mathrm{d}f(x)\| = 1, \quad [\mathrm{d}f(x)]x = \|x\|_X. \tag{57}$$

Naviac, v tomto prípade je dotykový funkcionál v bode x určený jednoznačne, t.j., ak $g \in X'$ je nejaký dotykový funkcionál v bode x, potom $g = \mathrm{d}f(x)$.

Dôkaz Vety 6.

Z predpokladov tvrdenia v súlade s Definíciou 2 vyplýva, že slabá derivácia $\mathrm{d}f(x)$ je spojitý lineárny funkcionál na X. Obvzlášť, podľa (2) a (1) platí

$$[\mathrm{d}f(x)]h = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \quad \text{pre každé } h \in X. \tag{58}$$

Pre každé $h \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme odhad

$$\left| \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \right| \overset{(56)}{=} \frac{\left| \|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X \right|}{|\lambda|} \leq \frac{\|x+\lambda h - x\|_X}{|\lambda|} = \|h\|_X, \tag{59}$$

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

pomocou ktorého v zhode (58) odvodíme

$$|[\mathrm{d}f(x)]h| \overset{(58)}{\leq} \left|\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}\right| \overset{(59)}{\leq} \|h\|_X, \quad \text{a tak} \quad \|\mathrm{d}f(x)\| \leq 1.$$

Na druhej strane, platí

$$[\mathrm{d}f(x)]\left(\frac{1}{\|x\|_X}x\right) \overset{(58),(56)}{=} \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\left\|x+\frac{\lambda}{\|x\|_X}x\right\|_X - \|x\|_X}{\lambda} = 1, \tag{60}$$

a tak $\|\mathrm{d}f(x)\| \geq 1$. Napokon dostávame rovnosti v (57), t.j.,

$$\|\mathrm{d}f(x)\| = 1, \quad [\mathrm{d}f(x)]x \overset{(60)}{=} \|x\|_X.$$

Podľa Definície 6 je slabá derivácia $\mathrm{d}f(x)$ skutočne dotykový funkcionál v bode x. Ukážeme teraz jeho jednoznačnosť. Nech g je nejaký dotykový funkcionál v bode x, t.j., je to spojitý lineárny funkcionál, ktorý spĺňa podmienky v (54). Zvoľme pevne $h \in X$ a definujme funkciu

$$\varepsilon(\lambda) := [\mathrm{d}f(x)]h - \frac{\|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{61}$$

V súlade s (58) zrejme $\lim_{\lambda\to 0}\varepsilon(\lambda) = 0$. Keďže funkcionál g je spojitý, platí

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

$$\lim_{\lambda\to 0} g(x+\lambda h) = g(x) = \|x\|_X > 0, \quad \text{a tak } g(x+\lambda h) > 0 \text{ pre } \lambda \in (0,\delta), \tag{62}$$

kde δ je dostatočne malé kladné číslo. Následne vďaka linearite je funkcionál g ohraničený. Obvzlášť, pre každé $\lambda \in (0,\delta)$ máme

$$g(x+\lambda h) \stackrel{(62)}{=} |g(x+\lambda h)| \le \|g\| \cdot \|x+\lambda h\|_X \stackrel{(54)}{=} \|x+\lambda h\|_X$$

$$\Downarrow \text{ linearita } g \Downarrow$$

$$g(x) + \lambda g(h) \le \|x+\lambda h\|_X \quad \xrightarrow{(54)} \quad \lambda g(h) \le \|x+\lambda h\|_X - \|x\|_X$$

$$\Downarrow$$

$$g(h) \le \frac{\|x+\lambda h\|_X - \|X\|_X}{\lambda} \quad \xrightarrow{(61)} \quad g(h) \le [\mathrm{d}f(x)]h - \varepsilon(\lambda). \tag{63}$$

Limitovaním poslednej nerovnosti pre $\lambda \to 0^+$ napokon získame nerovnosť

$$g(h) \le [\mathrm{d}f(x)]h - \lim_{\lambda\to 0+} \varepsilon(\lambda) \quad \longrightarrow \quad g(h) \le [\mathrm{d}f(x)]h \quad \text{pre každé dané } h \in X.$$

Ak v poslednej nerovnosti zvolíme vektor $-h$ a a uvážime linearitu funkcionálov g a $[\mathrm{d}f(x)]$, dostaneme $g(h) \ge [\mathrm{d}f(x)]h$ pre každé $h \in X$. Teda $g = \mathrm{d}f(x)$. ∎

Hladké Banachove priestory

Definícia 7 (Hladký priestor)

Nech X je Banachov priestor. Hovoríme, že X je hladký v bode $x \in S_X[0,1]$, ak existuje práve jeden dotykový funkcionál v bode x. Priestor X sa označuje ako hladký, ak je hladký v každom bode jednotkovej sféry $S_X[0,1]$.

Veta 7 (Šmuljanova)

Nech X je reálny Banachov priestor. Potom X je hladký v bode $x \in S_X[0,1]$ práve vtedy, keď norma $\|\cdot\|_X$ má v bode x slabú deriváciu $\mathrm{d}\|x\|_X$. V tomto prípade jediným dotykovým funkcionálom v bode x je slabá derivácia $\mathrm{d}\|x\|_X$.

Lema 2

Nech X je reálny Banachov priestor a $G \subseteq X$ je otvorená konvexná množina. Nech $f : G \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia spojitá v bode $x \in G$. Potom f je slabo diferencovateľná v x práve vtedy, keď

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x+\lambda h) + f(x-\lambda h) - 2f(x)}{\lambda} = 0 \quad \text{pre každé } h \in X. \tag{64}$$

Náčrt dôkazu Lemy 2.

Pomocou Vety 3 a jej dôkazu a pomocou komentára v Poznámke 9 nie je ťažké si premyslieť, že relácia (64) je ekvivalentná s existenciou smerovej derivácie $D_h f(x)$ pre každý nenulový vektor $h \in X$. Tvrdenie lemy je potom dôsledkom Vety 4 v kontexte Poznámky 10. ■

Dôkaze Vety 7.

Zvoľme pevný vektor $x \in S_X[0,1]$. Nech priestor X je hladký v x. Sporom predpokladajme, že norma $\|\cdot\|_X$ nemá v bode x slabú deriváciu. Keďže norma je spojitá konvexná funkcia, podľa Lemy 2 existuje nenulový vektor $h \in X$, pre ktorý rovnosť v (64) nie je splnená. Existuje teda $\varepsilon > 0$ a postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ a (norma $\|x\|_X = 1$)

$$\frac{\|x+\lambda_k h\|_X + \|x-\lambda_k h\|_X - 2}{\lambda_k} \geq \varepsilon \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

V súlade s dôsledkom Hahnovej–Banachovej vety nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ sú postupnosti spojitých lineárnych funkcionálov s vlastnosťami

$$\|f_k\| = 1 = \|g_k\|, \quad f_k(x+\lambda_k h) = \|x+\lambda_k h\|_X, \quad g_k(x-\lambda_k h) = \|x-\lambda_k h\|_X \tag{66}$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. Keďže pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_k(\lambda_k h)| \leq \lambda_k \|f_k\|\,\|h\| \overset{(66)}{=} \lambda_k \|h\|, \quad |g_f(\lambda_k h)| \leq \lambda_k \|g_k\|\,\|h\| \overset{(66)}{=} \lambda_k \|h\|$$

Dôkaze Vety 7 (pokračovanie).

máme $\lim_{k\to\infty} f_k(\lambda_k h) = 0 = \lim_{k\to\infty} g_k(\lambda_k h)$. Následne pre $k \to \infty$ máme

$$f_k(x) = f_k(x+\lambda_k h) - f_k(\lambda_k h) \overset{(66)}{=} \|x+\lambda_k h\|_X - f_k(\lambda_k h) \quad \longrightarrow \quad 1^-, \tag{67}$$

$$g_k(x) = g_k(x-\lambda_k h) + g_k(\lambda_k h) \overset{(66)}{=} \|x-\lambda_k h\|_X - g_k(\lambda_k h) \quad \longrightarrow \quad 1^-, \tag{68}$$

pretože $|f_k(x)| \le \|f_k\|\,\|x\| = 1$ a $|g_k(x)| \le \|g_k\|\,\|x\| = 1$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Ukážeme teraz platnosť nerovnosti

$$(f_k - g_k)(h) \ge \varepsilon \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Skutočne, kombináciou (65) a (66) postupne máme

$$(f_k - g_k)(h) = f_k(h) - g_k(h) = \frac{f_k(x+\lambda_k h) + g_k(x-\lambda_k h) - f_k(x) - g_k(x)}{\lambda_k}$$

$$\overset{(66)}{=} \frac{\|x+\lambda_k h\|_X + \|x-\lambda_k h\|_X \overbrace{-f_k(x) - g_k(x)}^{\ge -2}}{\lambda_k}$$

$$\ge \frac{\|x+\lambda_k h\|_X + \|x-\lambda_k h\|_X - 2}{\lambda_k} \overset{(65)}{\ge} \varepsilon \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Využijeme teraz vlastnosti $*$-slabej topológie v duálnom priestore X'. Funkcioná-

Dôkaze Vety 7 (pokračovanie).

ly f_k, g_k, $k \in \mathbb{N}$, sú podľa (66) prvkami uzavretej jednotkovej gule $B_{X'}[0,1]$. Keďže podľa Banachovej–Alaogluovej vety je množina $B_{X'}[0,1]$ $*$-slabo kompaktná v X', každá z postupností $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ má aspoň jeden hromadný bod v $B_{X'}[0,1]$ vzhľadom na $*$-slabú topológiu. Bez ujmy na všeobecnosti teda môžeme uvažovať, že

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f, \quad \lim_{k\to\infty} g_k = g \quad *\text{-slabo}, \quad f, g \in B_{X'}[0,1]. \tag{70}$$

Platí teda $\|f\| = 1 = \|g\|$ a $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$. Využijúc relácie (67) a (68) následne dostávame

$$f(x) = 1 = \|x\|_X \quad \text{a} \quad g(x) = 1 = \|x\|_X .$$

Získané spojité lineárne funkcionály sú v súlade s Definíciou 6 dotykové funkcionály v bode x. Naviac, pomocou nerovnosti (69) platí

$$f(h) - g(h) = (f-g)(h) = \lim_{k\to\infty} (f_k - g_k)(h) \overset{(69)}{\geq} \varepsilon > 0, \quad \text{t.j., } f(h) \neq g(h).$$

Jedná sa teda o dva rôzne dotykové funkcionály v bode x. Podľa Definície 7 je to však v rozpore s predpokladom hladkosti priestoru X v bode x. Preto nutne norma $\|\cdot\|_X$ musí mať v bode x slabú deriváciu. Naopak, ak v bode x existuje slabá derivácia $\mathrm{d}\|x\|_X$, potom podľa Vety 6 v tomto bode existuje práve jeden dotykový funkcionál. V súlade s Definíciou 7 je priestor X hladký v bode x. ∎

Uniformne hladké Banachove priestory

Definícia 8 (Uniformne hladký priestor)

Nech X je Banachov priestor. Hovoríme, že X je uniformne hladký, ak norma $\|\cdot\|_X$ je rovnomerne slabo diferencovateľná na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$.

Poznámka 13

Podľa Šmuljanovej Vety 7 zrejme platí, že každý reálny unimorfne hladký Banachov priestor X je zároveň i hladký priestor.

Veta 8

Nech X je Banachov priestor. Platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Priestor X je uniformne hladký práve vtedy, keď norma $\|\cdot\|_X$ je rovnomerne silno diferencovateľná na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$.*

(ii) *Reálny priestor X je uniformne hladký práve vtedy, keď platí*

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{\|x+\lambda h\|_X + \|x-\lambda h\|_X - 2}{\lambda} = 0 \quad \textit{rovnomerne pre } x, h \in S_X[0,1].$$