3. cvičení (29. 9. 2021)

Komplexní rozšíření afinního prostoru

Pojmy:

- komplexně sdružený vektor k vektoru $\mathbf{w}$;
- komplexně sdružený vektorový podprostor k podprostoru W;
- komplexní rozšíření afinního podprostoru;
- reálný podprostor v $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- komplexně sdružený bod k bodu $A \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- komplexně sdružený afinní podprostor k podprostoru $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$;
- maximální reálný podprostor obsažený v afinním podprostoru $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$.

Úlohy:

1. V $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$ jsou dány v reálné bázi bod $B = [1; -2; 3]$ a vektory $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$ a $\mathbf{v} = (3; 0; 1)$. Určete souřadnice bodu $C = B + \mathrm{i}\mathbf{u}$, bodu $\overline{C}$, vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$ a vektoru $\overline{\mathbf{w}}$.
2. V $\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ jsou dány v reálné bázi bod $K = [2 + \mathrm{i}; 3 - 2\mathrm{i}]$ a vektor $\mathbf{u} = (-1 + 3\mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i})$. Určete parametrické i obecné rovnice přímky $p = (K, \mathbf{u})$.
3. Nalezněte reálné body přímek v $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$:
   (a) $p : \mathrm{i}x + (3 + 2\mathrm{i})y - 1 = 0$;
   (b) $q = AB$, kde $A = [1 + \mathrm{i}; 2\mathrm{i}], B = [\mathrm{i}; 1 + 2\mathrm{i}]$;
   (c) $r : x = (1 + \mathrm{i}) + \mathrm{i}t$
   $\quad\; y = (1 - \mathrm{i}) + 2t, t \in \mathbb{C}$.
4. Určete rovnice reálných přímek, které prochází bodem:
   (a) $K = [3 - 2\mathrm{i}; 1 + \mathrm{i}]$;
   (b) $A = [2 + \mathrm{i}; -1 + 2\mathrm{i}; 1 - \mathrm{i}]$.
5. Určete rovnice reálné přímky, která leží v rovině $\alpha : (3 - 2\mathrm{i})x + (1 + \mathrm{i})y - \mathrm{i}z + 3 = 0$.
6. Určete maximální reálný podprostor obsažený v podprostoru $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$.
   (a) $\mathcal{B} : (3 - 2\mathrm{i})x + (1 + \mathrm{i})y - \mathrm{i}z = 0$;
   (b) $\mathcal{C} : (1 + \mathrm{i})x + (2 - \mathrm{i})y = 1$
   $\quad\; x + y + \mathrm{i}z = 0$.

Řešení

Komplexní rozšíření afinního prostoru

1. $C = [1 + 2\mathrm{i}; -2 + \mathrm{i}; 3 - \mathrm{i}]$,
   $\overline{C} = [1 - 2\mathrm{i}; -2 - \mathrm{i}; 3 + \mathrm{i}]$,
   $\mathbf{w} = [2 + 3\mathrm{i}; 1; -1 + \mathrm{i}]$,
   $\overline{\mathbf{w}} = [2 - 3\mathrm{i}; 1; -1 - \mathrm{i}]$.

2. parametrické rovnice: $x = (2 + \mathrm{i}) + t(-1 + 3\mathrm{i}); \quad y = (3 - 2\mathrm{i}) + t(3 + 2\mathrm{i}), \quad t \in \mathbb{C}$
   obecná rovnice: $(3 + 2\mathrm{i})x + (1 - 3\mathrm{i})y - 1 + 4\mathrm{i} = 0$

3. (a) $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$
   (b) neexistují
   (c) $\left[\frac{1}{2}; -1\right]$

4. (a) $p : x + 2y - 5 = 0$
   (b) $p : x = 2 + t$
   $y = -1 + 2t$
   $z = 1 - t, t \in \mathbb{C}$

5. $p : x = t$
   $y = -3 - 3t$
   $z = -3 - 5t, t \in \mathbb{C}$

6. (a) $p : x = t$
   $y = -3t$
   $z = -5t, t \in \mathbb{C}$
   (b) $\emptyset$