9. cvičení (10. 11. 2021)

Kuželosečky v euklidovské rovině

Pojmy:

- osa kuželosečky, vrchol kuželosečky;
- euklidovská klasifikace kuželoseček;
- metoda invariantů.

Úlohy:

1. Určete osy a vrcholy kuželosečky $k : x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$.
2. Pomocí transformací kartézských souřadnic určete typ, kanonickou rovnici a transformační rovnice, které převedou rovnici kuželoseček do kanonického tvaru.
   (a) $k_1 : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
   (b) $k_2 : 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
   (c) $k_3 : 25x^2 - 20xy + 4y^2 + 38x + 8y + 33 = 0$
   (d) $k_4 : 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$

Řešení

Kuželosečky v euklidovské rovině

1. $o_1 : x - y = 0$,
   $o_2 : x + y = 0$,
   $V_1[1,1]$, $V_2[1,-1]$, $V_3\left[\frac{i\sqrt{5}}{5}, -\frac{i\sqrt{5}}{5}\right]$, $V_4\left[-\frac{i\sqrt{5}}{5}, \frac{i\sqrt{5}}{5}\right]$.

2. (a) hyperbola
   $x'^2 - \frac{y'^2}{4} - 1 = 0$
   $S[2,-1], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 2$
   $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1$

   (b) komplexně sdružené různoběžky
   $\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 0$
   $S[0,-2], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$
   $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 2$

   (c) parabola
   $x'^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{116}}{29} \cdot y' = 0$
   $V\left[-\frac{27}{29}, -\frac{24}{29}\right], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$
   $x = \frac{5}{\sqrt{29}}x' + \frac{2}{\sqrt{29}}y' - \frac{27}{29}$
   $y = -\frac{2}{\sqrt{29}}x' + \frac{5}{\sqrt{29}}y' - \frac{24}{29}$

   (d) reálné rovnoběžky
   $x'^2 - 1 = 0$
   $S[0,2], \mathbf{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right), \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$
   $x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'$
   $y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' + 2$