DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.

PLUS

LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.

Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

TABLE

Des matieres de la

GEOMETRIE.

Liure Premier.

DES PROBLESMES QU'ON PEUT construire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Discours Second.

DE LA NATURE DES LIGNES COURBES.

Liure Troisiesme

DE LA CONSTRVCTION DES problesmes solides, ou plusque solides.

TABLE. DE LA GEOMETRIE.

FIN.

Aduertiſſement.

Iuſques icy i'ay taſché de me rendre intelligible a tout le monde; mais, pour ce traité, ie crains qu'il ne pourra eſtre leu que par ceux qui ſçauent deſia ce qui eſt dans les liures de Geometrie : car, d'autant qu'ils contienent pluſieurs verités fort bien demonſtrées, i'ay creu qu'il ſeroit ſuperflus de les repeter, & n'ay pas laiſſé, pour cela, de m'en ſeruir.

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

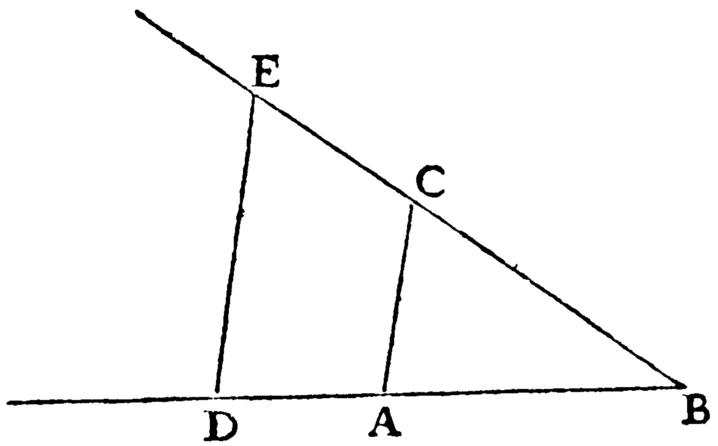
TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

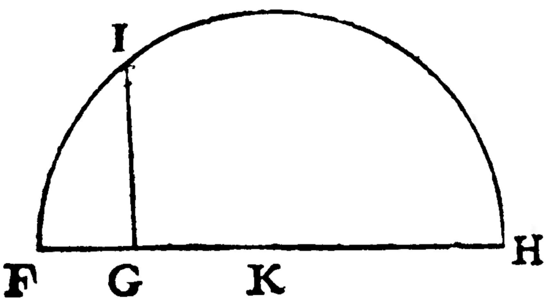


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

l'Extraction dela racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commẽt on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces ligne gnes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainsi des autres.

Vser de chiffres en Geometrie.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point determinée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est determinée, a cause qu'elle peut estre sousentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Au reste affin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut tousiours faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

A B ∞ 1, c'est a dire, A B esgal à 1.

G H ∞ a

B D ∞ b, &c.

Commēt il faut venir aux Equatiōs qui seruent a resoudre les problesmes.

Ainsi voulant resoudre quelque problesme, on doit d'abord le considerer comme desia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le construire, aussy bien a celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iusques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a supposé de lignes, qui estoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobstant on n'omette rien de ce qui est desiré en la question, cela tesmoigne qu'elle n'est pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a discretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës ausqu'elles ne correspond aucune Equation. Aprés cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut seruir par ordre de chascune des Equations qui restent aussy, soit en la considerant toute seule, soit en la comparant auec les autres, pour expliquer chascune de ces lignes inconnuës; & faire

ainsi

ainſi en les demeſlant, qu'il n'en demeure qu'vne ſeule, eſgale a quelque autre, qui ſoit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le surſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit eſgal a ce, qui ſe produiſt par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantités, dont l'vne ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte.

$z \infty b$. ou

$z^2 \infty -a z + bb$. ou

$z^3 \infty + a z^2 + bbz - c^3$. ou

$z^4 \infty a z^3 - c^3 z + d^4$. &c.

C'eſt a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, eſt eſgalé a b, ou le quarré de z eſt eſgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z eſt eſgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

Et on peut touſiours reduire ainſi toutes les quantités inconnuës à vne ſeule, lorſque le Probleſme ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſy par des ſections coniques, ou meſme par quelque autre ligne qui ne ſoit que d'vn ou deux degrés plus compoſée. Mais ie ne m'areſte point a expliquer cecy plus en detail, a cauſe que ie vous oſterois le plaiſir de l'apprendre de vous meſme, & l'vtilité de cultiuer voſtre eſprit en vous y exerceant, qui eſt a mon auis la principale, qu'on puiſſe

tirer

tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

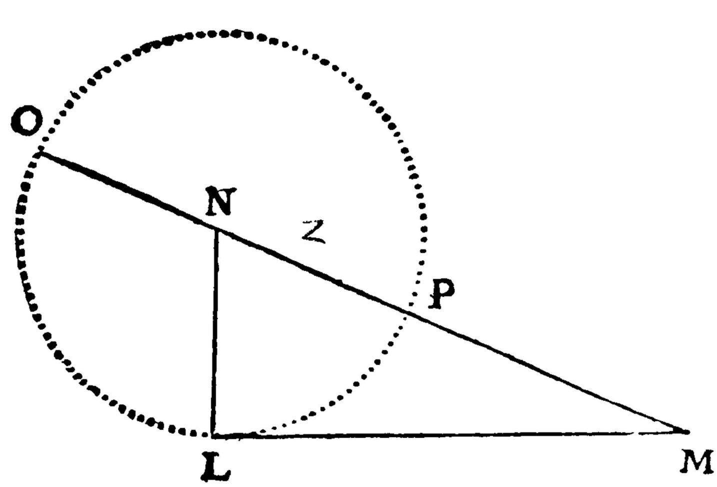
C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple



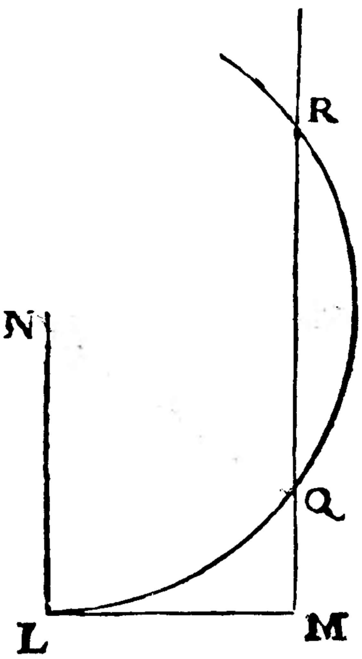
$$z^2 \propto az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \propto \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que si iay $yy \propto - ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto - ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \propto az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\tfrac{1}{2} a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - bb}$, & $z \propto \tfrac{1}{2} a - \sqrt{\tfrac{1}{4} aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple tiré de Pappus.

Et on le peut voir aussy fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septiesme liure, ou aprés s'estre aresté quelque tems a denombrer tout ce qui auoit esté escrit en Geometrie par ceux qui l'auoient precedé, il parle enfin d'vne question, qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucun autre n'auoient sceu entierement resoudre. & voycy ses mots.

Ie cite plutost la version latine que le texte grec affin que chascun l'entende plus aysement.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.

Et vn peu aprés il explique ainsi qu'elle est cete question.

At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se iactat, & ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus

rectis

rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datum coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. propositiones autem ipsarum hæ sunt.

Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, & data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cuiuspiã contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

Ou ie vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisoient les anciens d'vser des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouuoit proceder, que

que de ce qu'ils ne voyoient pas assés clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité, & d'embaras, en la façon dont ils s'expliquoient. car Pappus poursuit en cete sorte.

Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt. neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autẽ per coniunctas proportiones hæc, & dicere, & demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio coniuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem; si vero octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudine; cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, &c.

La question donc qui auoit esté commencée a resoudre par Euclide, & poursuiuie par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle. Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par position; premierement on demande vn point, duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, vne sur chascune des données, qui façent auec elles des angles donnés, & que le rectangle contenu en deux de celles, qui seront ainsi tirées d'vn mesme point, ait la proportion donnée auec le quarré de la troisiesme, s'il n'y en a que trois; oubien auec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre; oubien, s'il y en a cinq, que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée auec le parallelepipede

lelepipede composé des deux qui restent, & d'vne autre ligne donnée. Ou s'il y en a six, que le parallelepipede cõposé de trois ait la proportion donnée auec le parallelepipede des trois autres. Ou s'il y en a sept, que ce qui se produist lorsqu'on en multiplie quatre l'vne par l'autre, ait la raison donnée auec ce qui se produist par la multiplication des trois autres, & encore d'vne autre ligne donnée; Ou s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée auec le produit des quatre autres. Et ainsi cete question se peut estendre a tout autre nombre de lignes. Puis a cause qu'il y a tousiours vne infinité de diuers poins qui peuuent satisfaire a ce qui est icy demandé, il est aussy requis de connoistre, & de tracer la ligne, dans laquelle ils doiuent tous se trouuer. & Pappus dit que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en vne des trois sections coniques. mais il n'entreprend point de la determiner, ny de la descrire. non plus que d'expliquer celles ou tous ces poins se doiuent trouuer, lorsque la question est proposée en vn plus grand nombre de lignes. Seulement il adiouste que les anciens en auoient imaginé vne qu'ils monstroient y estre vtile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si par la methode dont ie me sers on peut aller aussy loin qu'ils ont esté.

Responce à la question de Pappus.

Et premierement i'ay connu que cete question n'estant proposée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut tousiours trouuer les poins cherchés par la Geometrie simple; c'est a dire en ne se seruant que de la reigle & du compas,

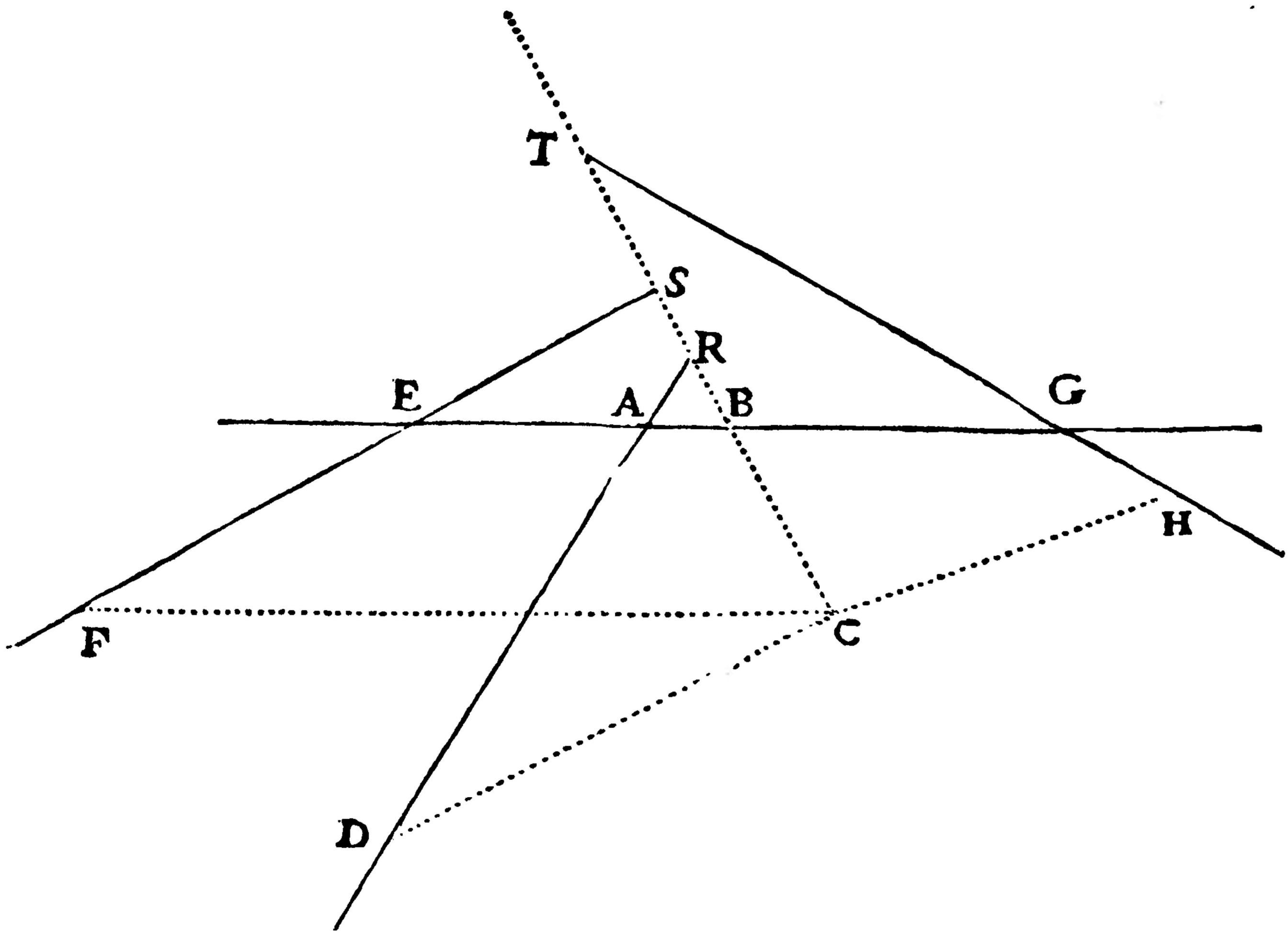
compas, ny ne faisant autre chose, que ce qui a desia esté dit; excepté seulement lorsqu'il y a cinq lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas, comme aussy lorsque la question est proposée en six, ou 7, ou 8, ou 9 lignes, on peut tousiours trouuer les poins cherchés par la Geometrie des solides; c'est a dire en y employant quelqu'vne des trois sections coniques. Excepté seulement lorsqu'il y a neuf lignes données, si elles sont toutes paralleles. Auquel cas derechef, & encore en 10, 11, 12, ou 13 lignes on peut trouuer les poins cherchés par le moyen d'vne ligne courbe qui soit d'vn degré plus composée que les sections coniques. Excepté en treize si elles sont toutes paralleles, auquel cas, & en quatorze, 15, 16, & 17 il y faudra employer vne ligne courbe encore d'vn degré plus composée que la precedente & ainsi a l'infini.

Puis iay trouué aussy, que lorsqu'il ny a que trois ou quatre lignes données, les poins cherchés se rencontrent tous, non seulement en l'vne des trois sections coniques, mais quelquefois aussy en la circonference d'vn cercle, ou en vne ligne droite. Et que lorsqu'il y en a cinq, ou six, ou sept, ou huit, tous ces poins se rencontrent en quelque vne des lignes, qui sont d'vn degré plus composées que les sections coniques, & il est impossible d'en imaginer aucune qui ne soit vtile a cete question; mais ils peuuent aussy derechef se rencontrer en vne section conique, ou en vn cercle, ou en vne ligne droite. Et s'il y en a neuf, ou 10, ou 11, ou 12, ces poins se rencontrent en vne ligne, qui ne peut estre que d'vn degré plus composée que les precedentes; mais toutes celles

qui

qui ſont d'vn degré plus composées y peuuent ſeruir, & ainſi a l'infini.

Au reſte la premiere, & la plus ſimple de toutes aprés les ſections coniques, eſt celle qu'on peut deſcrire par l'interſection d'vne Parabole, & d'vne ligne droite, en la façon qui ſera tantoſt expliquée. En ſorte que ie penſe auoir entierement ſatisfait a ceque Pappus nous dit auoir eſté cherché en cecy par les anciens. & ie taſcheray d'en mettre la demonſtration en peu de mots. car il m'ennuie deſia d'en tant eſcrire.

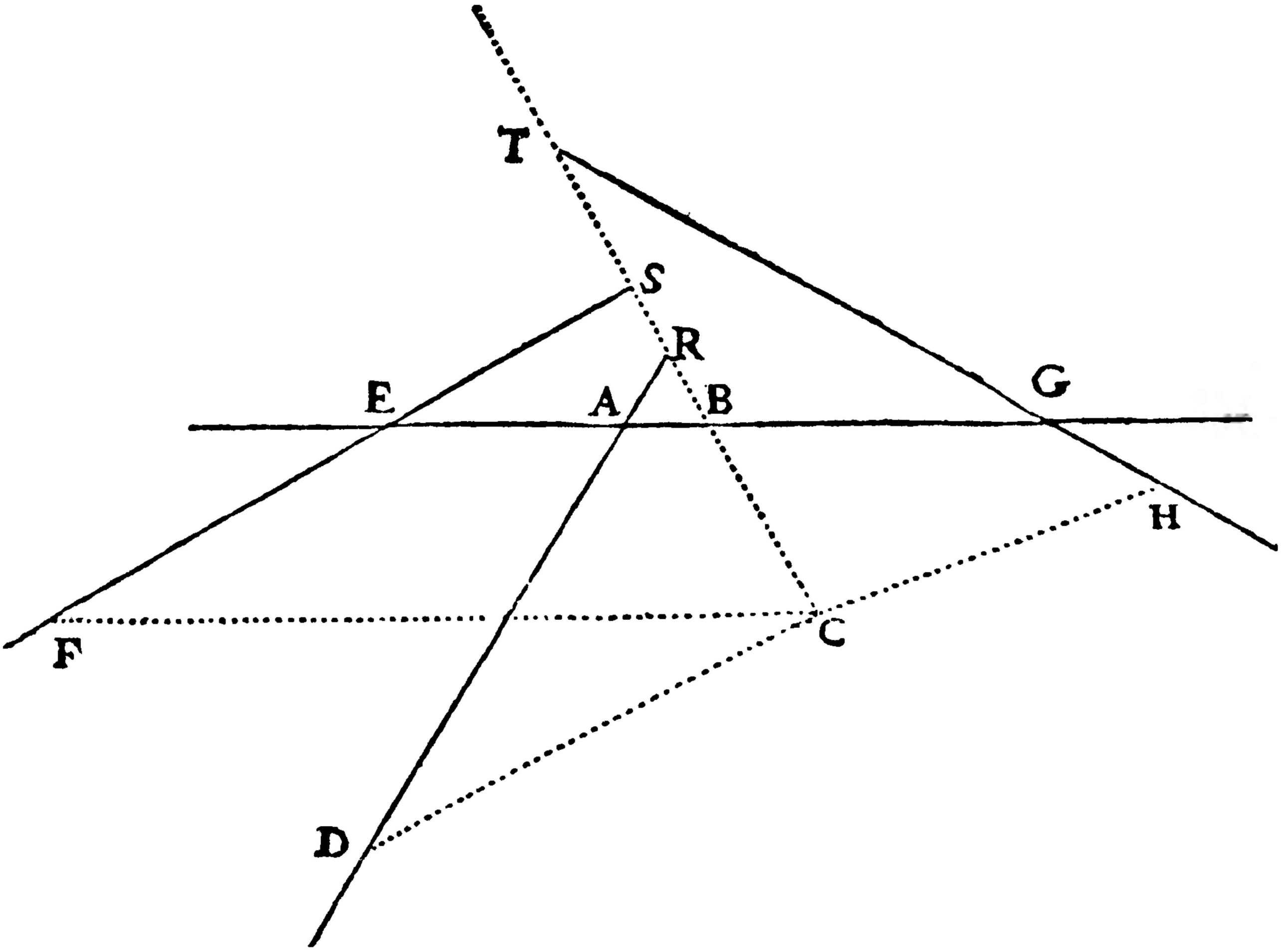


Soient A B, A D, E F, G H, &c. pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme C B, C D, C F, & C H, en ſorte que les angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. ſoient donnés,

& que ce qui eſt produit par la multiplication d'vne partie de ces lignes, ſoit eſgal a ce qui eſt produit par la multiplication des autres, oubien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion plus difficile.

Commēt on doit poſer les termes pour venir à l'Equation en cet exemple.

Premierement ie ſuppoſe la choſe comme deſia faite, & pour me demeſler de la cōfuſion de toutes ces lignes, ie conſidere l'vne des données, & l'vne de celles qu'il faut trouuer, par exemple A B, & C B, comme les principales, & auſquelles ie taſche de rapporter ainſi toutes les autres. Que le ſegment de la ligne A B, qui eſt entre les poins A & B, ſoit nommé x. & que B C ſoit nommé y. & que toutes les autres lignes données ſoient prolongées, iuſques a ce qu'elles couppent ces deux, auſſy prolongées s'il eſt beſoin, & ſi elles ne leur ſont point paralleles. comme vous voyes icy qu'elles couppent la ligne A B aux poins A, E, G, & B C aux poins R, S, T. Puis a cauſe que tous les angles du triangle A R B ſont donnés, la proportion, qui eſt entre les coſtés A B, & B R, eſt auſſy donnée, & ie la poſe comme de z à b, de façon qu' A B eſtant x, R B ſera $\frac{bx}{z}$, & la toute C R ſera $y + \frac{bx}{z}$, à cauſe que le point B tombe entre C & R; car ſi R tomboit entre C & B, C R ſeroit $y - \frac{bx}{z}$; & ſi C tomboit entre B & R, C R ſeroit $-y + \frac{bx}{z}$. Tout de meſme les trois angles du triangle D R C ſont donnés, & par conſequent auſſy la proportion qui eſt entre les coſtés C R, & C D, que ie poſe comme de z à c: de façon que C R eſtant $y + \frac{bx}{z}$,



C D ſera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Aprés cela pourceque les lignes A B, A D, & E F ſont données par poſition, la diſtance qui eſt entre les poins A & E eſt auſſy donnée, & ſi on la nomme K, on aura E B eſgal a $k + x$; mais ce ſeroit $k - x$, ſi le point B tomboit entre E & A; & $- k + x$, ſi E tomboit entre A & B. Et pourceque les angles du triangle E S B ſont tous donnés, la proportion de B E a B S eſt auſſy donnée, & ie la poſe comme z à d, ſibienque B S eſt $\frac{dk + dx}{z}$, & la toute C S eſt $\frac{zy + dk + dx}{z}$; mais ce ſeroit $\frac{zy - dk - dx}{z}$, ſi le point S tomboit entre B & C; & ce ſeroit $\frac{- zy + dk + dx}{z}$, ſi C tomboit entre B & S. De plus les trois angles du triangle F S C ſont donnés, & en ſuite la proportion de C S à C F, qui ſoit comme de z à e, & la toute C F ſera $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$. En meſme façon A G que ie nomme l eſt donnée, & B G eſt l -- x, & a cauſe du triangle B G T la proportion de B G a B T eſt auſſy donnée, qui ſoit comme de z à f. & B T ſera $\frac{fl - fx}{z}$, & C T ∞ $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Puis derechef la proportion de T C a C H eſt donnée, a cauſe du triangle T C H, & la poſant comme de z à g, on aura C H ∞ $\frac{+gzy + fgl - fgx}{zz}$.

Et ainſi vous voyés, qu'en tel nombre de lignes données par poſition qu'on puiſſe auoir, toutes les lignes tirées deſſus du point C a angles donnés ſuiuant la teneur de la queſtion, ſe peuuent touſiours exprimer chaſcune par trois termes; dont l'vn eſt composé de la quantité inconnue y, multipliée, ou diuiſee par quelque autre connue; & l'autre de la quantité inconnue x, auſſy multipliée ou diuiſée par quelque autre connuë, & le troſieſme d'vne quantité toute connuë. Excepté ſeulement ſi elles ſont paralleles; oubien a la ligne A B, auquel cas le terme composé de la quantité x ſera nul; oubien a la ligne C B, auquel cas celuy qui eſt composé de la quantité y ſera nul; ainſi qu'il eſt trop manifeſte pour que ie m'areſte a l'expliquer. Et pour les ſignes +, & --, qui ſe ioignent à ces termes, ils peuuent eſtre changés en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyés auſſy, que multipliant pluſieurs de ces lignes l'vne par l'autre, les quantités x & y, qui ſe trouuent dans le produit, n'y peuuent auoir que chaſcune autant de dimenſions, qu'il y a eu de lignes, a l'explication

cation desquelles elles seruent, qui ont esté ainsi multipliées: ensorte qu'elles n'auront iamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes; ny plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois, & ainsi a l'infini.

De plus, a cause que pour determiner le point C, il n'y a qu'vne seule condition qui soit requise, à sçauoir que ce qui est produit par la multiplication d'vn certain nombre de ces lignes soit esgal, ou (cequi n'est de rien plus malaysé) ait la proportion donnée, à ce qui est produit par la multiplication des autres; on peut prendre a discretion l'vne des deux quantités inconnues x ou y, & chercher l'autre par cete Equation. en laquelle il est euident que lorsque la question n'est point proposée en plus de cinq lignes, la quantité x qui ne sert point a l'expression de la premiere peut tousiours n'y auoir que deux dimensions. de façon que prenant vne quantité connuë pour y, il ne restera que $xx \propto +$ ou $-- ax +$ ou $-- bb$. & ainsi on pourra trouuer la quantité x auec la reigle & le compas, en la facon tantost expliquée. Mesme prenant successiuement infinies diuerses grandeurs pour la ligne y, on en trounera aussy infinies pour la ligne x, & ainsi on aura vne infinité de diuers poins, tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on descrira la ligne courbe demandée.

Commẽt on trouue que ce problesme est plan, lorsqu'il n'est point proposé en plus de 5 lignes.

Il se peut faire aussy, la question estant proposée en six, ou plus grand nombre de lignes; s'il y en a entre les données, qui soient paralleles a BA, ou BC, que l'vne des deux quantités x ou y n'ait que deux dimensions en

l'Equal'Equation, & ainſi qu'on puiſſe trouuuer le point C auec la reigle & le compas. Mais au contraire ſi elles ſont toutes paralleles , encore que la queſtion ne ſoit propoſée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra ainſi eſtre trouué, a cauſe que la quantité x ne ſe trouuant point en toute l'Equation, il ne ſera plus permis de prendre vne quantité connuë pour celle qui eſt nommée y, mais ce ſera elle qu'il faudra chercher. Et pource quelle aura trois dimenſions, on ne la pourra trouuer qu'en tirant la racine d'vne Equation cubique. cequi ne ſe peut generalement faire ſans qu'on y employe pour le moins vne ſection conique. Et encore qu'il y ait iuſques a neuf lignes données, pourvû qu'elles ne ſoient point toutes paralleles, on peut touſiours faire que l'Equation ne monte que iuſques au quarré de quarré. au moyen dequoy on la peut auſſy touſiours reſoudre par les ſections coniques, en la façon que i'expliqueray cy aprés. Et encore qu'il y en ait iuſques a treize, on peut touſiours faire qu'elle ne monte que iuſques au quarré de cube. en ſuite de quoy on la peut reſoudre par le moyen d'vne ligne , qui n'eſt que d'vn degré plus composée que les ſections coniques, en la façon que i'expliqueray auſſy cy aprés. Et cecy eſt la premiere partie de ceque i'auois icy a demonſtrer ; mais auant que ie paſſe a la ſeconde il eſt beſoin que ie die quelque choſe en general de la nature des lignes courbes.

LA GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

LES anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problesmes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est a dire, que les vns peuuent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrés entre ces lignes plus composées, & ie ne sçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutost que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, a cause qu'il est besoin de se seruir de quelque machine pour les descrire, il faudroit reietter par mesme raison les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les descrit sur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut aussy nommer des machines. Ce n'est pas non plus, a cause que les instrumens, qui seruent a les tracer, estant plus composés que la reigle & le compas, ne peuuent estre si iustes; car il faudroit pour cete raison les reietter des Mechaniques, où la iustesse des ouurages qui sortent de la main est desirée; plutost que de la Geometrie, ou c'est seulement la iustesse du raisonnemēt qu'on recherche,

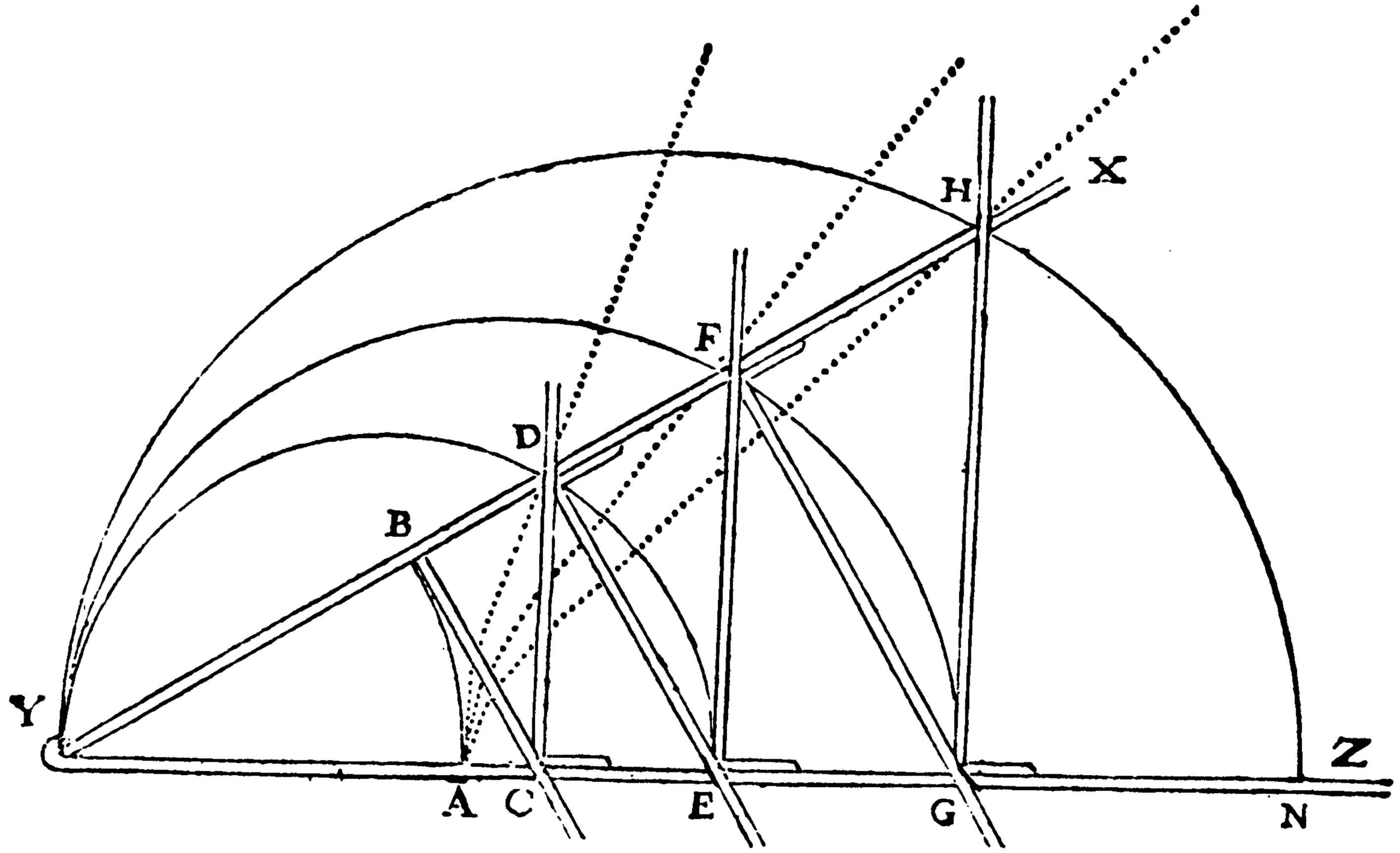
Quelles sont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

che, & qui peut ſans doute eſtre auſſy parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Ie ne diray pas auſſy, que ce ſoit a cauſe qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils ſe ſont contentés qu'on leur accordaſt, qu'ils puſſent ioindre deux poins donnés par vne ligne droite, & deſcrire vn cercle d'vn centre donné, qui paſſaſt par vn point donné. car ils n'ont point fait de ſcrupule de ſuppoſer outre cela, pour traiter des ſections coniques, qu'on puſt coupper tout cóne donné par vn plan donné. & il n'eſt beſoin de rien ſuppoſer pour traçer toutes les lignes courbes, que ie pretens icy d'introduire; ſinon que deux ou pluſieurs lignes puiſſent eſtre meuës l'vne par l'autre, & que leurs interſections en marquent d'autres; ce qui ne me paroiſt en rien plus difficile. Il eſt vray qu'ils n'ont pas auſſy entierement receu les ſections coniques en leur Geometrie, & ie ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont eſté approuués par l'vſage; mais il eſt, ce me ſemble, tres clair, que prenant comme on fait pour Geometrique ce qui eſt precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'eſt pas; & conſiderant la Geometrie comme vne ſcience, qui enſeigne generalement a connoiſtre les meſures de tous les cors, on n'en doit pas plutoſt exclure les lignes les plus compoſées que les plus ſimples, pourvû qu'on les puiſſe imaginer eſtre deſcrites par vn mouuement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuiuent & dont les derniers ſoient entierement reglés par ceux qui les precedent. car par ce moyen on peut touſiours auoir vne connoiſſance exacte de leur meſure. Mais peuteſtre que ce qui a empeſché les anciens Geometres de reçe-

uoir

uoir celles qui estoient plus composées que les sections coniques, c'est que les premieres qu'ils ont considerées, ayant par hasard esté la Spirale, la Quadratrice, & semblables, qui n'appartienent veritablement qu'aux Mechaniques, & ne sont point du nombre de celles que ie pense deuoir icy estre receues, a cause qu'on les imagine descrites par deux mouuemens separés, & qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement, bienqu'ils ayent aprés examiné la Conchoide, la Cissoide, & quelque peu d'autres qui en sont, toutefois a cause qu'ils n'ont peutestre pas assés remarqué leurs proprietés, ils n'en ont pas fait plus d'estat que des premieres. Oubien c'est que voyant, qu'ils ne connoissoient encore, que peu de choses touchant les sections coniques, & qu'il leur en restoit mesme beaucoup, touchant ce qui se peut faire auec la reigle & le compas, qu'ils ignoroient, ils ont creu ne deuoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pourceque i'espere que d'orenauant ceux qui auront l'adresse de se seruir du calcul Geometrique icy proposé, ne trouueront pas assés dequoy s'arester touchant les problesmes plans, ou solides; ie croy qu'il est a propos que ie les inuite a d'autres recherches, où ils ne manqueront iamais d'exercice.

Voyés les lignes A B, A D, A F, & semblables que ie suppose auoir esté descrites par l'ayde de l'instrument Y Z, qui est composé de plusieurs reigles tellement iointes, que celle qui est marquée Y Z estant arestée sur la ligne A N, on peut ouurir & fermer l'angle X Y Z; & que lorsqu'il est tout fermé, les poins B, C, D, F, G, H sont tous assemblés au point A; mais qu'a mesure qu'on l'ouure,



l'ouure, la reigle B C, qui est iointe a angles droits auec X Y au point B, pousse vers Z la reigle C D, qui coule sur Y Z en faisant tousiours des angles droits auec elle, & C D pousse D E, qui coule tout de mesme sur Y X en demeurant parallele a B C, D E pousse E F, E F pousse F G, cellecy pousse G H. & on en peut conceuoir vne infinité d'autres, qui se poussent consequutiuement en mesme façon, & dont les vnes facent tousiours les mesmes angles auec Y X, & les autres auec Y Z. Or pendant qu'on ouure ainsi l'angle X Y Z, le point B descrit la ligne A B, qui est vn cercle, & les autres poins D, F, H, ou se font les intersections des autres reigles, descriuent d'autres lignes courbes A D, A F, A H, dont les dernieres sont par ordre plus cõposées que la premiere, & cellecy plus que le cercle. mais ie ne voy pas ce qui peut empescher, qu'on ne concoiue aussy nettement, & aussy distinctement la description de cete premiere, que du cercle, ou

du

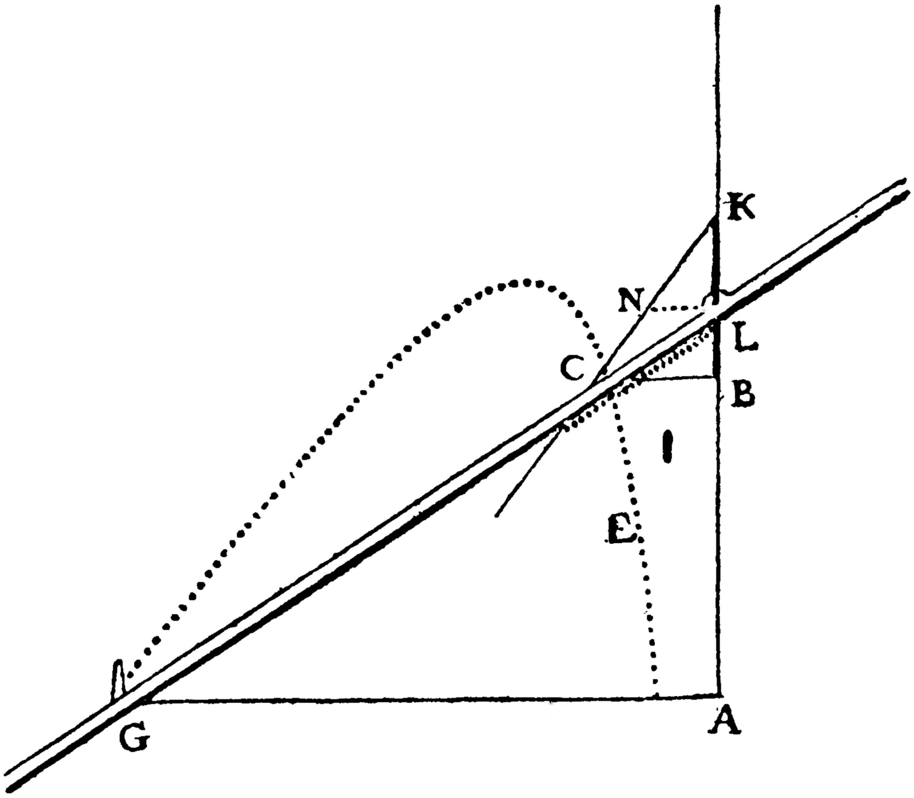
du moins que des ſections coniques; ny ce qui peut empeſcher, qu'on ne concoiue la ſeconde, & la troiſieſme, & toutes les autres, qu'on peut deſcrire, auſſy bien que la premiere; ny par conſequent qu'on ne les recoiue toutes en meſme façon, pour ſeruir aux ſpeculations de Geometrie.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus composées par degrés a l infini. mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres; ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

La façon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

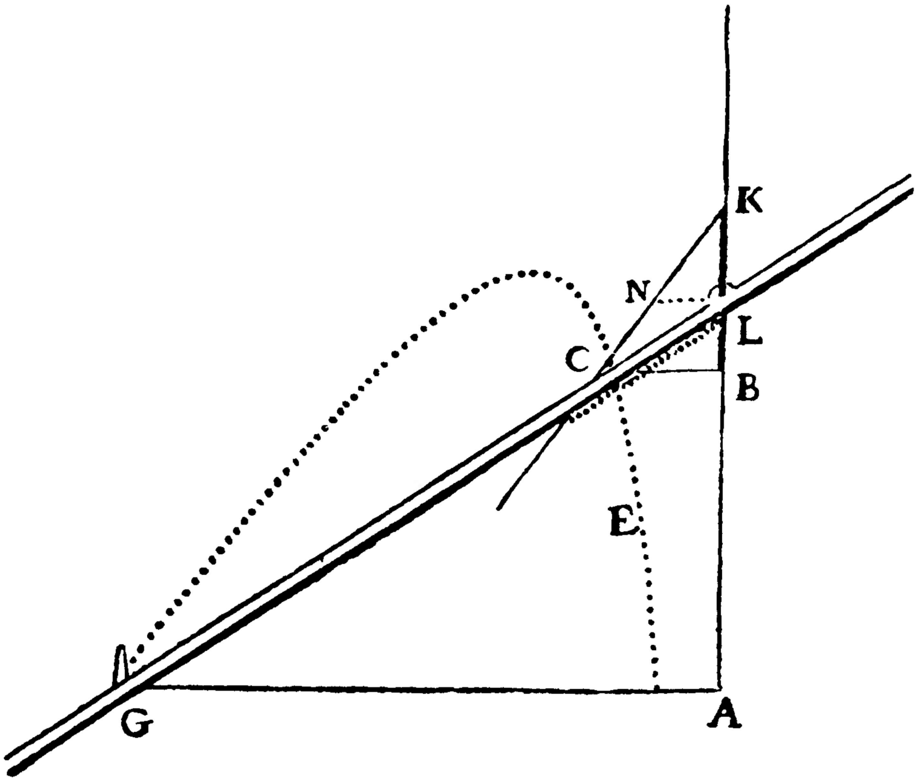
Comme ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la

reigle-



reigle G L, & du plan rectiligne C N K L, dont le costé K N est indefiniement prolongé vers C, & qui estant meu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est a dire en telle sorte que son diametre K L se trouue tousiours appliqué sur quelque endroit de la ligne B A prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle G L autour du point G, a cause quelle luy est tellement iointe quelle passe tousiours par le point L. Ie choisis vne ligne droite, comme A B, pour rapporter a ses diuers poins tous ceux de cete ligne courbe E C, & en cete ligne A B ie choisis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choisis & l'vn & l'autre, a cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veult. car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte, & plus aysée; toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut tousiours faire que la ligne paroisse de mesme genre, ainsi qu'il est aysé a demonstrer.

Aprés



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

tipliant

tip liant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Que ſi en l'inſtrument qui ſert a la deſcrire on fait qu'au lieu de la ligne droite C N K, ce ſoit cete Hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan C N K L; l'interſection de cete ligne & de la reigle G L deſcrira, au lieu de l'Hyperbole E C, vne autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme ſi C N K eſt vn cercle, dont L ſoit le centre, on deſcrira la premiere Conchoide des anciens; & ſi c'eſt vne Parabole dont le diametre ſoit K B, on deſcrira la ligne courbe, que i'ay tantoſt dit eſtre la premiere, & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi au lieu d'vne de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt vne du ſecond, qui termine le plan C N K L, on en deſcrira par ſon moyen vne du troiſieſme, ou ſi c'en eſt vne du troiſieſme, on en deſcrira vne du quatrieſme, & ainſi a l'infini. comme il eſt fort ayſé a connoiſtre par le calcul. Et en quelque autre façon, qu'on imagine la deſcription d'vne ligne courbe, pourvûqu'elle ſoit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra touſiours trou-

uer

uer vne equation pour déterminer tous ses poins en cete sorte.

Au reste ie mets les lignes courbes qui font monter cete equation iusques au quarré de quarré, au mesme genre que celles qui ne la font monter que iusques au cube. & celles dont l'equation monte au quarré de cube, au mesme genre que celles dont elle ne monte qu'au sursolide. & ainsi des autres. Dont la raison est, qu'il y a reigle generale pour reduire au cube toutes les difficultés qui vont au quarré de quarré, & au sursolide toutes celles qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

Mais il est a remarquer qu'entre les lignes de chasque genre, encore que la plus part soient esgalement composées, en sorte qu'elles peuuent seruir a déterminer les mesmes poins, & construire les mesmes problesmes, il y en a toutefois aussy quelques vnes, qui sont plus simples, & qui n'ont pas tant d'estendue en leur puissance. comme entre celles du premier genre outre l'Ellipse l'Hyperbole & la Parabole qui sont esgalement composées, le cercle y est aussy compris, qui manifestement est plus simple. & entre celles du second genre il y a la Conchoide vulgaire, qui a son origine du cercle; & il y en a encore quelques autres, qui bien qu'elles n'ayent pas tant d'estendue que la plus part de celles du mesme genre, ne peuuent toutefois estre mises dans le premier.

Suite de l'explication de la question de Pappus mise au liure precedent

Or aprés auoir ainsi reduit toutes les lignes courbes a certains genres, il m'est aysé de poursuiure en la demonstration de la responsé, que i'ay tantost faite a la question de Pappus. Car premierement ayant fait voir cy dessus,

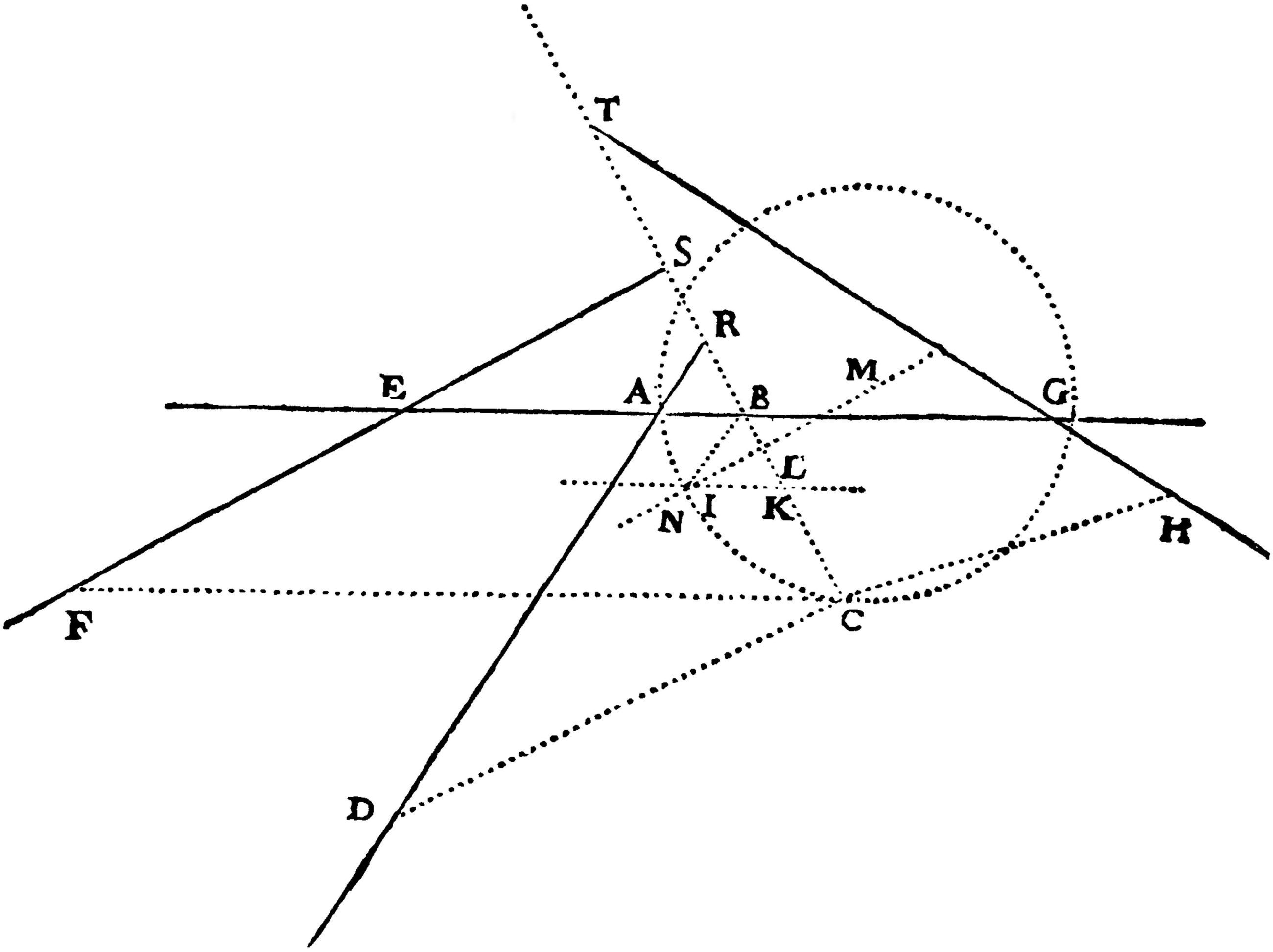
deſſus, que lorſqu'il n'y a que trois ou 4 lignes droites données, l'equation qui ſert a determiner les poins cherchés, ne monte que iuſques au quarré; il eſt euident, que la ligne courbe ou ſe trouuent ces poins, eſt neceſſairement quelqu vne de celles du premier genre: a cauſe que cete meſme equation explique le rapport, qu'ont tous les poins des lignes du premier genre a ceux d'vne ligne droite. Et que lorſqu'il n'y a point plus de 8 lignes droites données, cete equation ne monte que iuſques au quarré de quarré tout au plus, & que par conſequent la ligne cherchée ne peut eſtre que du ſecond genre, ou au deſſous. Et que lorſqu'il n'y a point plus de 12 lignes données, l'equation ne monte que iuſques au quarré de cube, & que par conſequent la ligne cherchée n'eſt que du troiſieſme genre, ou au deſſous. & ainſi des autres. Et meſme a cauſe que la poſition des lignes droites données peut varier en toutes ſortes, & par conſequent faire chãger tant les quantités connuës, que les ſignes + & -- de l'equation, en toutes les façons imaginables; il eſt euident qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre, qui ne ſoit vtile a cete queſtion, quand elle eſt propoſée en 4 lignes droites; ny aucune du ſecond qui n y ſoit vtile, quand elle eſt propoſée en huit; ny du troiſieſme, quand elle eſt propoſée en douze: & ainſi des autres. En ſorte qu'il n'y a pas vne ligne courbe qui tombe ſous le calcul & puiſſe eſtre receüe en Geometrie, qui n'y ſoit vtile pour quelque nombre de lignes.

Solution de cete queſtion quandelle n'eſt propoſée qu'en 3 ou 4 lignes.

Mais il faut icy plus particulierement que ie determine, & donne la façon de trouuer la ligne cherchée, qui ſert en chaſque cas, lorſqu'il ny a que 3 ou 4 lignes droi-

tes

tes données; & on verra par mesme moyen que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucunes autres, que les trois sections coniques, & le cercle.



Reprenons les 4 lignes AB, AD, EF, & GH données cy dessus, & qu'il faille trouuer vne autre ligne, en laquelle il se rencontre vne infinité de poins tels que C, duquel ayant tiré les 4 lignes CB, CD, CF, & CH, a angles donnés, sur les données, CB multipliée par CF, produist une somme esgale a CD, multipliée par CH. c'est a dire ayant fait $CB \infty y$, $CD \infty \frac{czy + bcx,}{zz}$ $CF \infty \frac{ezy + dek + dex,}{zz}$ & $CH \infty \frac{gzy + fgl - - fgx,}{zz}$ l'equatiõ est

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix} --dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} --dezzx \\ --cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ --bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz --cgzz.}$$

au

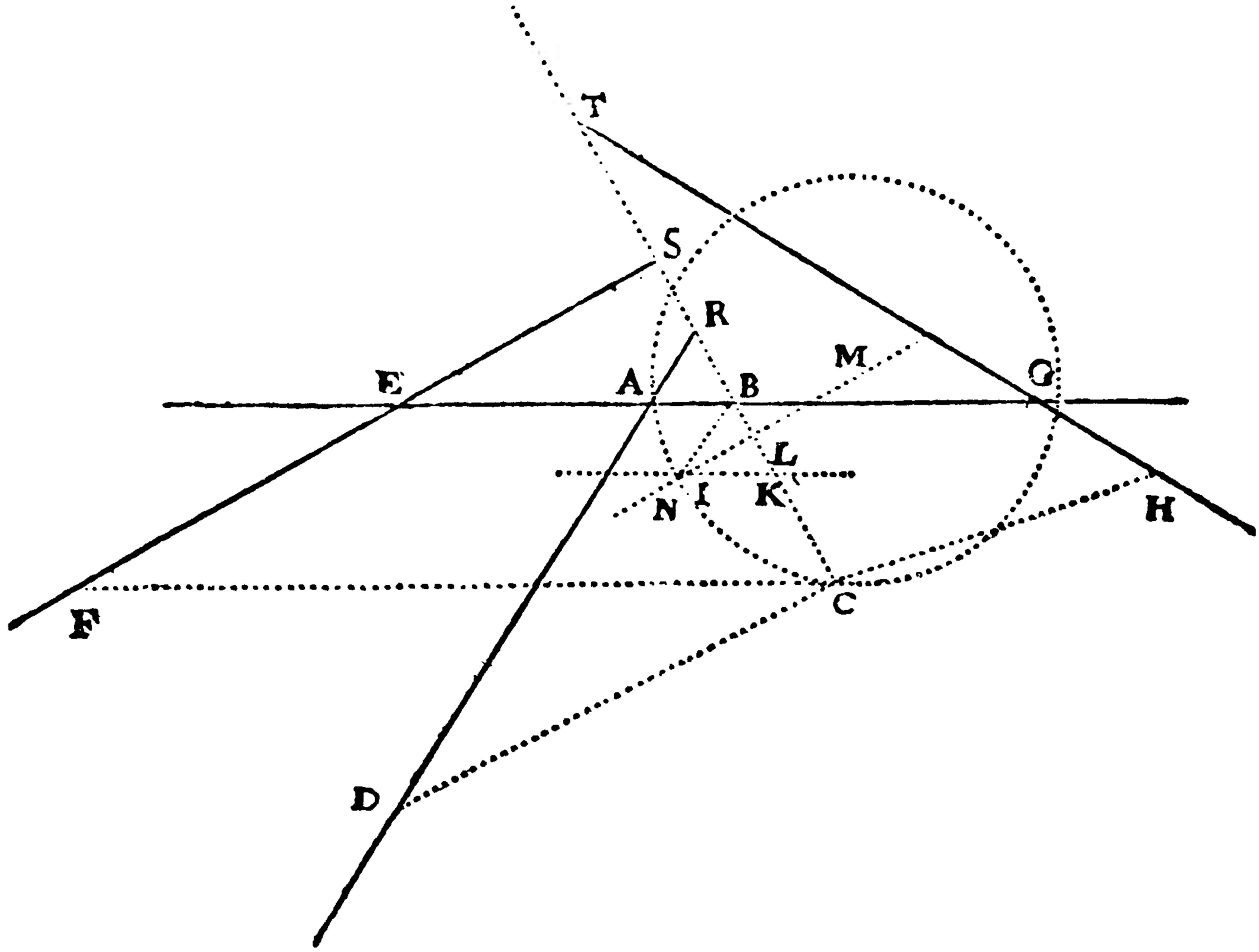
au moins en supposant ez plus grand que eg. car s'il estoit moindre, il faudroit changer tous les signes $+$ & $-$. Et si la quantité y se trouuoit nulle, ou moindre que rien en cete equation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle D A G, il faudroit le supposer aussy en l'angle D A E, ou E A R, ou R A G, en changeant les signes $+$ & $-$ selon qu'il seroit requis a cet effect. Et si en toutes ces 4 positions la valeur d'y se trouuoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé. Mais supposons la icy estre possible, & pour en abreger les termes, au lieu des quantités $\frac{cflgz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $2m$, & au lieu de $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $\frac{2n}{z}$; & ainsi nous aurons

$$yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$ dont la racine est

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

& derechef pour abreger, au lieu de $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ escriuons o, & au lieu de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ escriuons $\frac{p}{m}$. car ces quantités estant toutes données, nous les pouuons nommer comme il nous plaist. & ainsi nous auons

$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$ qui doit estre la longeur de la ligne B C, en laissant A B, ou x indeterminée.



minée. Et il eſt euident que la queſtion n'eſtant propoſée qu'en trois ou quatre lignes, on peut touſiours auoir de tels termes. excepté que quelques vns d'eux peuuent eſtre nuls, & que les ſignes + & -- peuuent diuerſement eſtre changés.

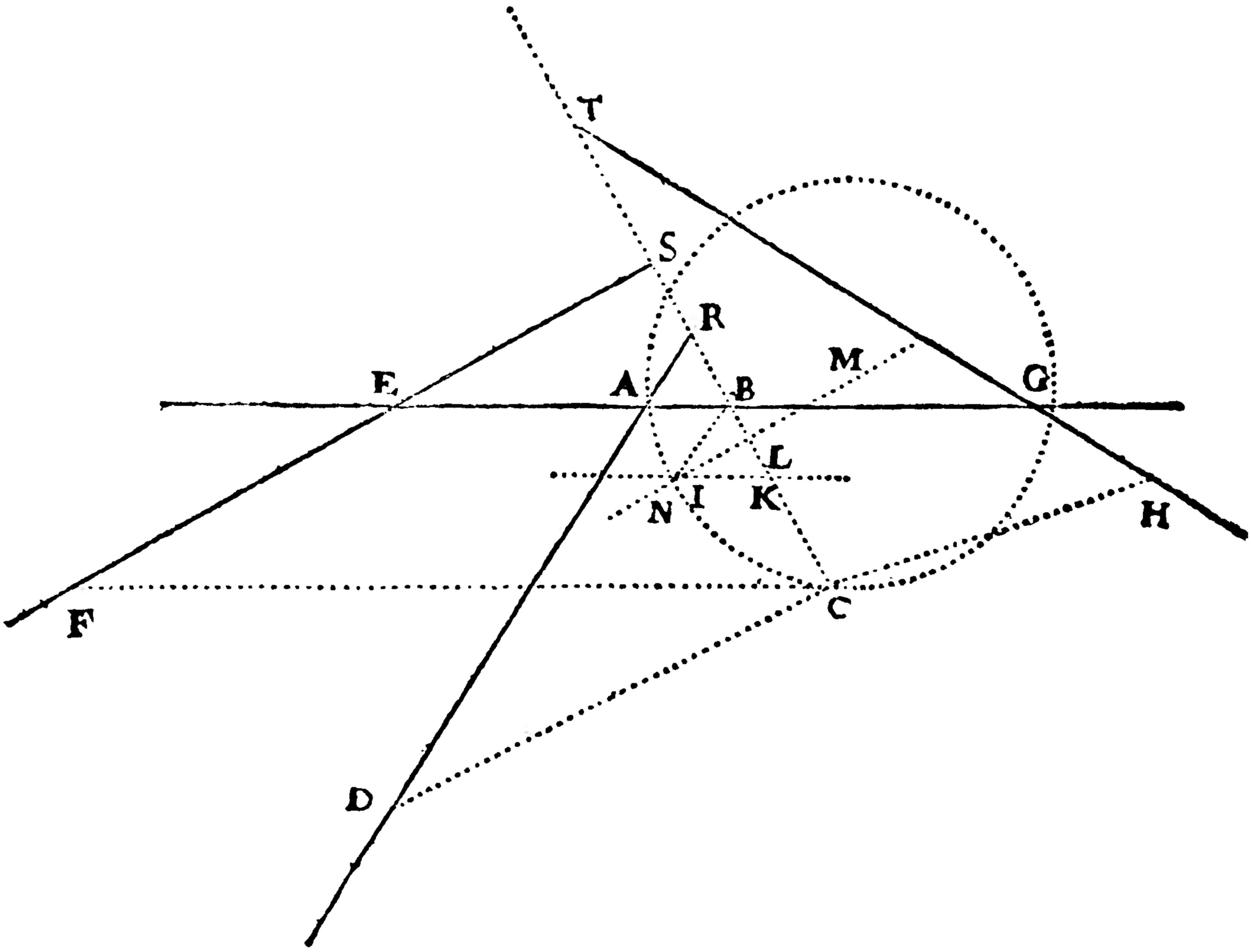
Aprés cela ie fais K I eſgale & parallele a B A, en ſorte qu'elle couppe de B C la partie B K eſgale à m, à cauſe qu'il y a icy $+ m$; & ie l'aurois adiouſtée en tirant cete ligne I K de l'autre coſté, s'il y auoit eu $-- m$; & ie ne l'aurois point du tout tirée, ſi la quantité m euſt eſté nulle. Puis ie tire auſſy I L, en ſorte que la ligne I K eſt a K L, comme Z eſt a n. c'eſt a dire que I K eſtant x, K L eſt $\frac{n}{z}x$. Et par meſme moyen ie connois auſſy la proportion

qui

qui eſt entre K L, & I L, que ie poſe comme entre n & a: ſibienque K L eſtant $\frac{n}{z}x$, I L eſt $\frac{a}{z}x$; Et ie fais que le point K ſoit entre L & C, a cauſe qu'il y a icy $-\frac{n}{z}x$; au lieu que i'aurois mis L entre K & C, ſi i'euſſe eu $+\frac{n}{z}x$; & ie n'euſſe point tiré cete ligne I L, ſi $\frac{n}{z}x$ euſt eſté nulle.

Or cela fait, il ne me reſte plus pour la ligne L C, que ces termes, $LC \propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. d'où ie voy que s'ils eſtoient nuls, ce point C ſe trouueroit en la ligne droite I L; & que s'ils eſtoient tels que la racine s'en puſt tirer, c'eſt a dire que mm & $\frac{p}{m}xx$ eſtant marqués d'vn meſme ſigne + ou --, oo fuſt eſgal à $4pm$, ou bien que les termes mm & ox, ou ox & $\frac{p}{m}xx$ fuſſent nuls, ce point C ſe trouueroit en vne autre ligne droite qui ne ſeroit pas plus malayſée a trouuer qu' I L. Mais lorſque cela n'eſt pas, ce point C eſt touſiours en l'une des trois ſections coniques, ou en vn cercle, dont l'vn des diametres eſt en la ligne I L, & la ligne L C eſt l'vne de celles qui s'appliquent par ordre à ce diametre; ou au contraire L C eſt parallele au diametre, auquel celle qui eſt en la ligne I L eſt appliquée par ordre. A ſçavoir ſi le terme $\frac{p}{m}xx$, eſt nul cete ſection conique eſt vne Parabole; & s'il eſt marqué du ſigne +, c'eſt vne Hyperbole; & enfin s'il eſt marqué du ſigne -- c'eſt vne Ellipſe. Excepté ſeulement ſi la quantité aam eſt eſgale à pzz & que l'angle I L C ſoit droit: auquel cas on à vn cercle au lieu

d'vne



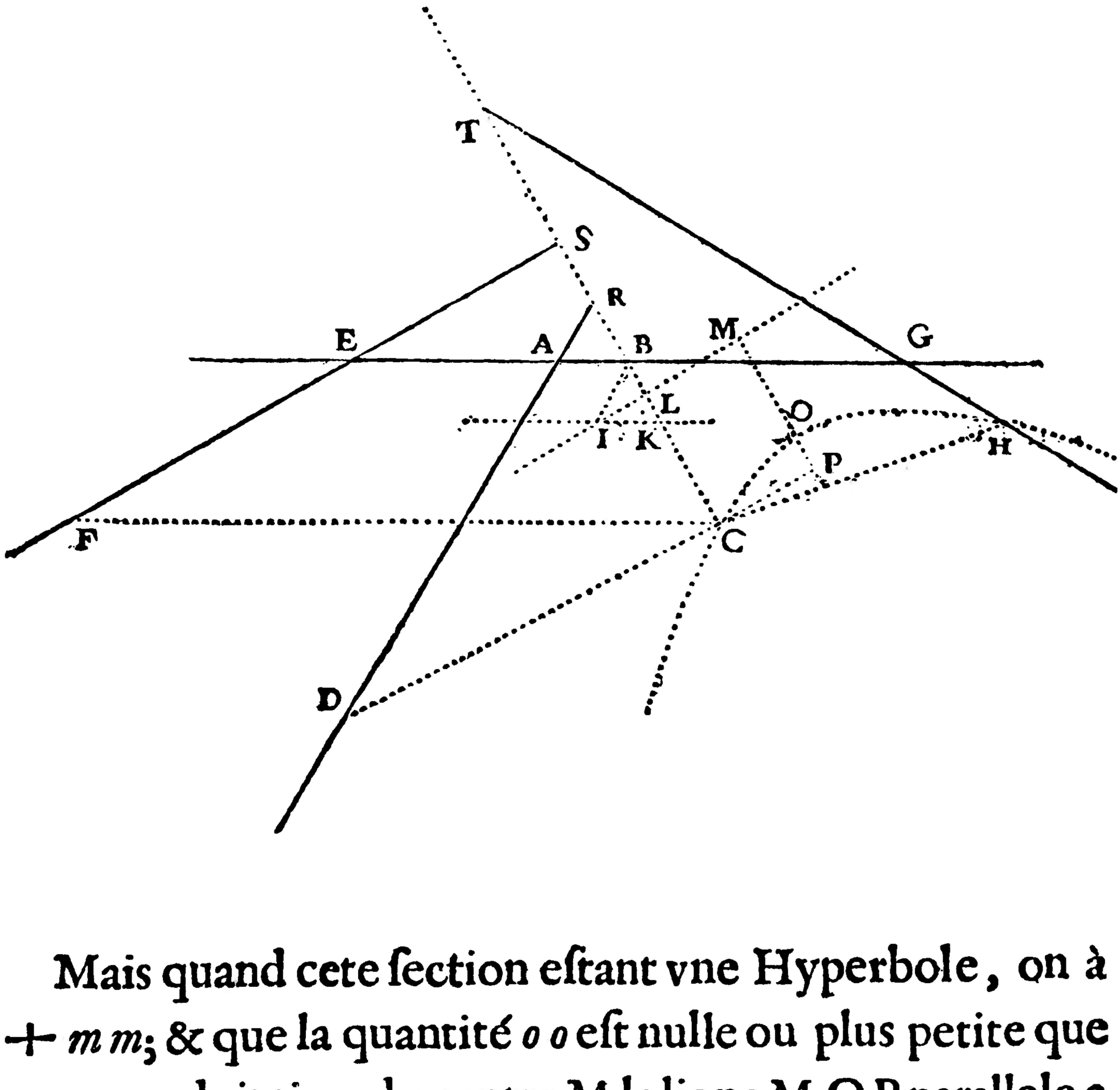
d'vne Ellipse. Que si cete section est vne Parabole, son costé droit est esgal à $\frac{oz}{a}$, & son diametre est tousiours en la ligne IL. & pour trouuer le point N, qui en est le sommet, il faut faire IN esgale à $\frac{amm}{oz}$; & que le point I soit entre L & N, si les termes sont $+ mm + ox$; oubien que le point L soit entre I & N, s'ils sont $+ mm - ox$; oubien il faudroit qu'N fust entre I & L, s'il y auoit $- mm + ox$. Mais il ne peut iamais y auoir $- mm$, en la façon que les termes ont icy esté posés. Et enfin le point N seroit le mesme que le point I si la quantité mm estoit nulle. Au moyen dequoy il est aysé de trouuer cete Parabole par le 1er. Problesme du 1er. liure d'Apollonius.

Que

Que si la ligne demãdée est vn cercle, ou vne ellipse, ou vne Hyperbole, il faut premierement chercher le point M, qui en est le centre, & qui est tousiours en la ligne droite I L, ou on le trouue en prenant $\frac{aom}{2pz}$ pour I M. en sorte que si la quantité o est nulle, ce centre est iustement au point I. Et si la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; on doit prendre le point M du mesme costé que le point L, au respect du point I, lorsqu'on a $+ox$; & lorsqu'on à $--ox$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire en l'Hyperbole, si on a $--ox$, ce centre M doit estre vers L; & si on a $+ox$, il doit estre de l'autre costé. Aprés cela le costé droit de la figure doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, lorsqu'on a $+mm$, & que la ligne cherchée est vn cercle, ou vne Ellipse; oubien lorsqu'on à $--mm$, & que c'est vne Hyperbole. & il doit estre $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, si la ligne cherchée estant vn cercle, ou vne Ellipse, on à $--mm$; oubien si estant vne Hyperbole & la quantité oo estant plus grande que $4mp$, on à $+mm$. Que si la quantité mm est nulle, ce costé droit est $\frac{oz}{a}$, & si ox est nulle, il est $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Puis pour le costé trauersant, il faut trouuer vne ligne, qui soit a ce costé droit, cõme aam est à pzz, à sçauoir si ce costé droit est $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, le trauersant est $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam}{pzz}}$. Et en tous ces cas le diametre de la section est en la ligne I M, & L C est l'vne de celles qui luy est appliquée par ordre. Si bienque faisant M N esgale a la moitié du costé

trauer-

trauerſant & le prenant du meſme coſté du point M, qu'eſt le point L, on a le point N pour le ſommet de ce diametre. en ſuite dequoy il eſt ayſé de trouuer la ſection par le ſecond & 3 prob. du 1er. liu. d'Apollonius.



Mais quand cete ſection eſtant vne Hyperbole, on à $+ mm$; & que la quantité oo eſt nulle ou plus petite que $4pm$, on doit tirer du centre M la ligne M O P parallele a L C, & C P parallele à L M: & faire M O eſgale a $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$; oubien la faire eſgale à m ſi la quantité ox eſt nulle. Puis conſiderer le point O, cõme le ſommet de cete Hyperbole, dont le diametre eſt O P, & C P la ligne

ligne qui luy est appliquée par ordre, & son costé droit est $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, & son costé trauersãt est $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$. Excepté quand ox est nulle. car alors le costé droit est $\frac{2aamm}{pzz}$, & le trauersant est $2m$. & ainsi il est aysé de la trouuer par le 3 prob. du 1er. liu. d'Apollonius.

Demonstration de tout ce qui vient d'estre expliqué.

Et les demonstrations de tout cecy sont euidentes. car composant vn espace des quantités que iay assignées pour le coste droit, & le trauersant, & pour le segment du diametre NL, ou OP, suiuãt la teneur de l'11, du 12, & du 13 theoresmes du 1er. liure d'Apollonius, on trouuera tous les mesmes termes dont est composé le quarré de la ligne C P, ou C L, qui est appliquée par ordre a ce diametre. Comme en cet exemple ostant I M, qui est $\frac{aom}{2pz}$, de N M, qui est $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$, iay I N, a laquelle aioustant I L, qui est $\frac{a}{z}x$, iay N L, qui est $\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$, & cecy estant multiplié par $\frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$, qui est le costé droit de la figure, il vient $x\sqrt{oo + 4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$ pour le rectangle. duquel il faut oster vn espace qui soit au quarré de N L comme le costé droit est au trauersant. & ce quarré de N L est $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x$

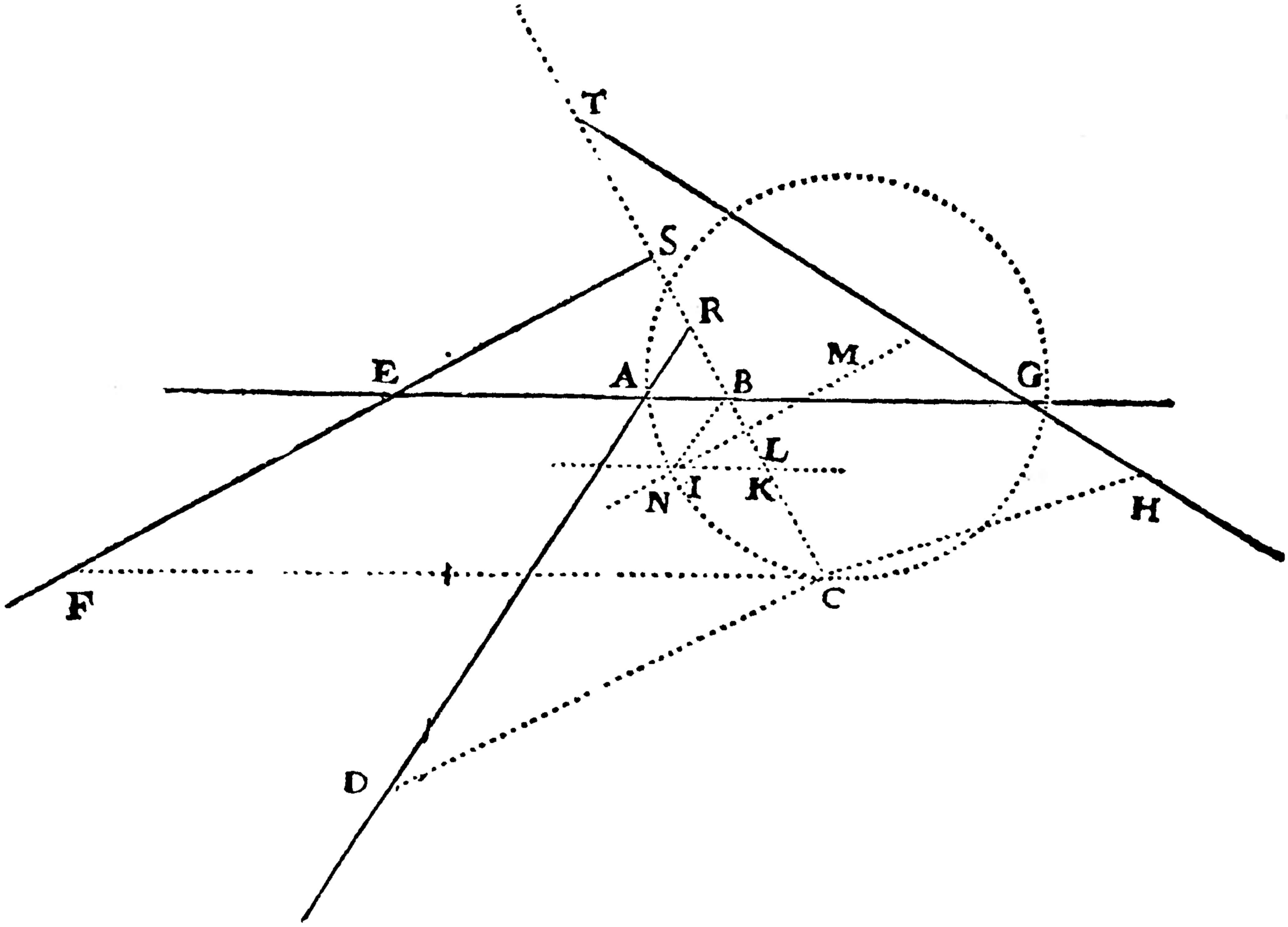
$$+ \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}$$

$$- \frac{aaomm}{2ppzz}.$$

$-\frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}$ qu'il faut diuiser par aam & multiplier par pzz, a cause que ces termes expliquent la proportion qui est entre le costé trauersant & le droit, & il vient $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo+4mp} + \frac{oom}{2p}$ $-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + mm$. ce qu'il faut oster du rectangle precedent, & on trouue $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ pour le quarré de CL, qui par consequent est vne ligne appliquée par ordre dans vne Ellipse, ou dans vn cercle, au segment du diametre NL.

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple EA ∞ 3, AG ∞ 5, AB ∞ BR, BS ∞ $\frac{1}{2}$ BE, GB ∞ BT, CD ∞ $\frac{3}{2}$ CR, CF ∞ 2 CS, CH ∞ $\frac{2}{3}$ CT, & que l'angle ABR soit de 60 degrés; & enfin que le rectangle des deux CB, & CF, soit esgal au rectangle des deux autres CD & CH; car il faut auoir toutes ces choses affin que la question soit entierement determinée. & auec cela supposant AB ∞ x, & CB ∞ y, on trouue par la façon cy dessus expliquée $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$ & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: si bien que BK doit estre 1, & KL doit estre la moitié de KI, & pource que l'angle IKL ou ABR est de 60 degrés, & KIL qui est la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et pource que IK ou AB est nommé x, KL est $\frac{1}{2}x$, & IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, & la quantité qui estoit tantost nommée z est 1, celle qui estoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui estoit m est 1, celle qui estoit o est 4, & celle qui estoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on à $\sqrt{\frac{16}{3}}$

pour



pour I M, & $\sqrt{1\frac{2}{3}}$ pour N M, & pourceque *aam* qui eſt $\frac{3}{4}$ eſt icy eſgal à *pzz* & que l'angle I L C eſt droit, on trouue que la ligne courbe N C eſt vn cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en meſme ſorte.

Quels ſont les lieux plans, & ſolides: & la facon de les trouuer.

Au reſte a cauſe que les equations, qui ne montent que iuſques au quarré, ſont toutes compriſes en ce que ie viens d'expliquer; non ſeulement le probleſme des anciens en 3 & 4 lignes eſt icy entierement acheué; mais auſſy tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la compoſition des lieux ſolides; & par conſequent auſſy a celle des lieux plans, a cauſe qu'ils ſont compris dans les ſolides. Car ces lieux ne ſont autre choſe, ſinon que lors qu'il eſt queſtion de trouuer quelque point auquel il manque

manque vne condition pour estre entierement determiné, ainsi qu'il arriue en cete exemple, tous les poins d'vne mesme ligne peuuent estre pris pour celuy qui est demandé. Et si cete ligne est droite, ou circulaire, on la nomme vn lieu plan. Mais si c'est vne parabole, ou vne hyperbole, ou vne ellipse, on la nomme vn lieu solide. Et toutefois & quantes que cela est, on peut venir a vne Equation qui contient deux quantités inconnuës, & est pareille a quelqu'vne de celles que ie viens de resoudre. Que si la ligne qui determine ainsi le point cherché, est d'vn degré plus composée que les sections coniques, on la peut nommer, en mesme façon, vn lieu sursolide, & ainsi des autres. Et s'il manque deux conditions a la determination de ce point, le lieu ou il se trouue est vne superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate, ou spherique, ou plus composée. Mais le plus haut but qu'ayent eu les anciens en cete matiere a esté de paruenir a la composition des lieux solides: Et il semble que tout ce qu'Apollonius a escrit des sections coniques n'a esté qu'à dessein de la chercher.

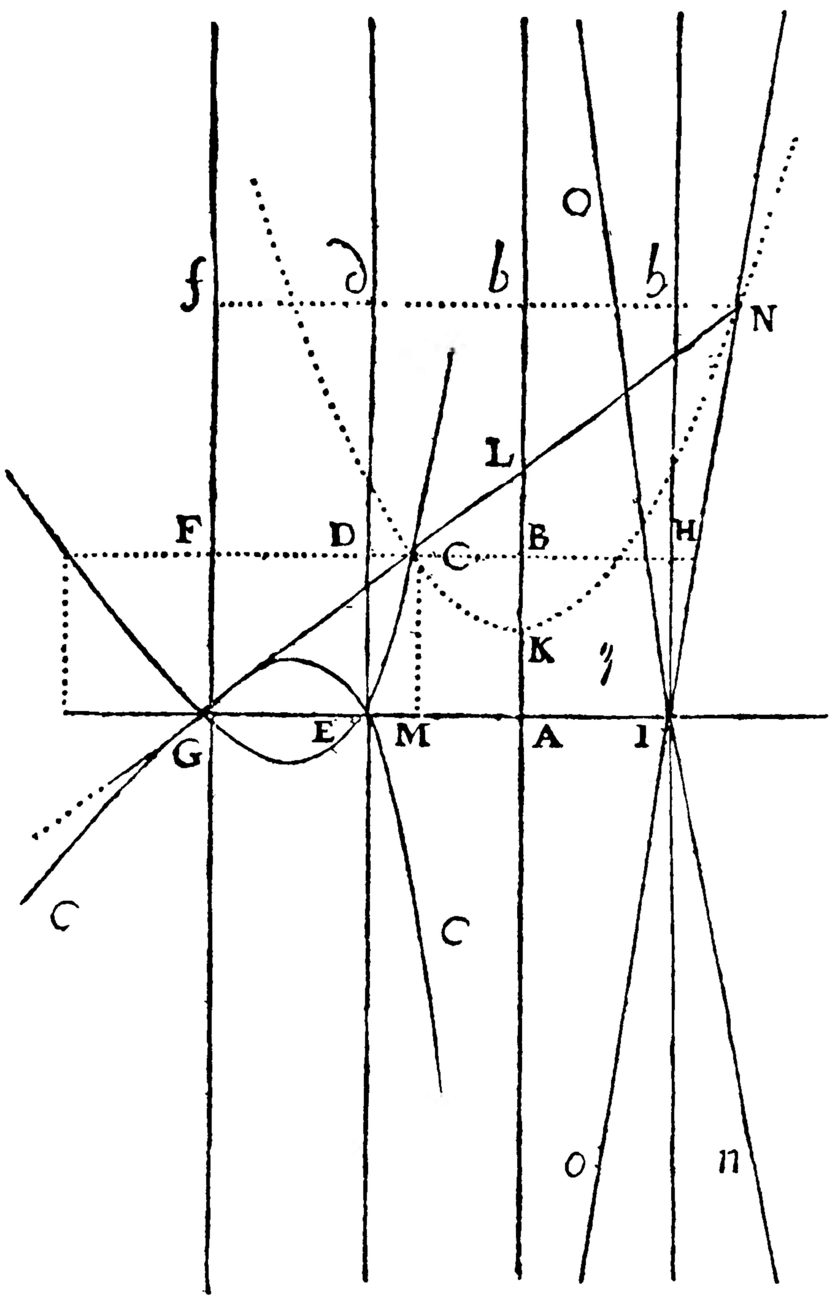
Quelle est la premiere & la plus simple de toutes les lignes courbes qui seruent en la question des anciens quand elle est proposée en cinq lignes.

De plus on voit icy que ce que i'ay pris pour le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'ellipse. qui est tout ce que i'auois entrepris de prouuer.

Que si la question des anciens est proposée en cinq lignes, qui soient toutes paralleles; il est euident que le point cherché sera tousiours en vne ligne droite. Mais si elle est proposée en cinq lignes, dont il y en ait quatre qui soient paralleles, & que la cinquiesme les couppe a angles droits, & mesme que toutes les lignes tirées du

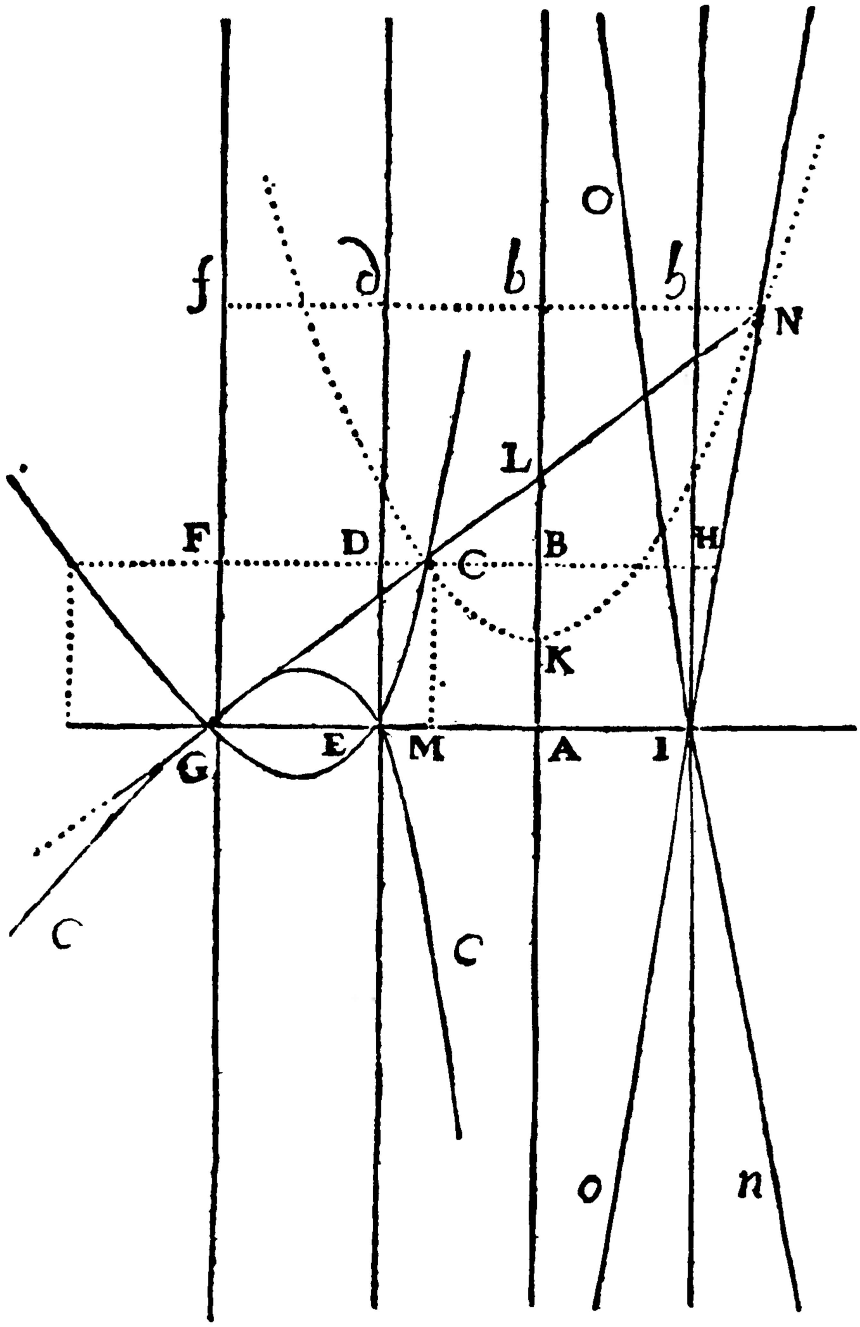
point

point cherché les rencontrent aussy a angles droits, & enfin que le parallelepipede composé de trois des lignes ainsi tirées sur trois de celles qui sont paralleles, soit esgal au parallelepipede composé des deux lignes tirées l'vne sur la quatriesme de celles qui sont paralleles & l'autre sur celle qui les couppe a angles droits, & d'vne troisiesme ligne donnée. ce qui est ce semble le plus simple cas qu'on puisse imaginer aprés le precedent ; le point cherché sera en la ligne courbe, qui est descrite par le mouuement d'vne parabole en la façon cy dessus expliquée.



Soient

Soient par exemple les lignes cherchées A B, I H, E D, G F, & G A. & qu'on demande le point C, en ſorte que tirant C B, C F, C D, C H, & C M a angles droits ſur les données, le parallelepipede des trois C F, C D, & C H ſoit eſgal a celuy des 2 autres C B, & C M, & d'vne troiſiesme qui ſoit A I. Ie poſe C B ∞y. C M ∞x. A I, ou A E, ou G E ∞a, de façon que le point C eſtant entre les lignes A B, & D E, iay C F $\infty 2a -- y$, C D $\infty a -- y$. & C H $\infty y + a$. & multipliant ces trois l'vne par l'autre, iay $y^3 -- 2ayy -- aay + 2a^3$ eſgal au produit des trois autres qui eſt axy. Aprés cela ie conſidere la ligne courbe C E G, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection, de la Parabole C K N, qu'on fait mouuoir en telle ſorte que ſon diametre K L eſt touſiours ſur la ligne droite A B, & de la reigle G L qui tourne cependant autour du point G en telle ſorte quelle paſſe touſiours dans le plan de cete Parabole par le point L. Et ie fais K L ∞a, & le coſté droit principal, c'eſt a dire celuy qui ſe rapporte a l'aiſſieu de cete parabole, auſſy eſgal à a, & G A $\infty 2a$, & C B ou M A ∞y, & C M ou A B ∞x. Puis a cauſe des triangles ſemblables G M C & C B L, G M qui eſt $2a - y$, eſt à M C qui eſt x, comme C B qui eſt y, eſt à B L qui eſt par conſequent $\frac{xy}{2a -- y}$. Et pourceque L K eſt a, B K eſt $a -- \frac{xy}{2a - y}$, oubien $\frac{2aa -- ay -- xy}{2a -- y}$. Et enfin pourceque ce meſme B K eſtant vn ſegment du diametre de la Parabole, eſt à B C qui luy eſt appliquée par ordre, comme celle cy eſt au coſté droit qui eſt a, le calcul monſtre que $y^3 -- 2ayy -- aay + 2a^3$, eſt eſgal à axy. & par conſequent



quent que le point C est celuy qui estoit demandé. Et il peut estre pris en tel endroir de la ligne C E G qu'on veuille choisir, ou aussy en son adiointe *c* E G *c* qui se descri t en mesme façon, excepté que le sommet de la Parabol e est tou rné vers l'autre costé, ou enfin en leurs contreposées N I *o*, *n* I O, qui sont descrites par l'interfection que fait la ligne G L en l'autre costé de la Parabole K N.

Or encore que les paralleles données A B, I H, E D, & G F ne fussent point esgalement distantes, & que G A ne les couppast point a angles droits, ny aussy les lignes tirées du point C vers elles, ce point C ne laisseroit pas de se trouuer tousiours en vne ligne courbe, qui seroit de cete mesme nature. Et il s'y peut aussy trouuer quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne soient paralleles. Mais si lorsqu'il y en a 4 ainsi paralleles, & vne cinquiesme qui les trauerse: & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'vne sur cete cinquiesme, & les 2 autres sur 2 de celles qui sont paralleles; soit esgal a celuy, des deux tirées sur les deux autres paralleles, & d'vne autre ligne donnée. Ce point cherché est en vne ligne courbe d'vne autre nature, a sçauoir en vne qui est telle, que toutes les lignes droites appliquées par ordre a son diametre estant esgales a celles d'vne section conique, les segmens de ce diametre, qui sont entre le sommet & ces lignes, ont mesme proportion a vne certaine ligne donnée, que cete ligne donnée a aux segmens du diametre de la section conique, ausquels les pareilles lignes sont appliquées par ordre. Et ie ne sçaurois veritablement dire que cete ligne soit moins simple que la precedente, laquelle iay creu toutefois deuoir prendre pour la premiere, a cause que la description, & le calcul en sont en quelque façon plus faciles.

Pour les lignes qui seruent aux autres cas, ie ne m'aresteray point a les distinguer par especes. car ie n'ay pas entrepris de dire tout ; & ayant expliqué la façon de trouuer vne infinité de poins par ou elles passent, ie pense auoir assés donné le moyen de les descrire.

Mesme il est a propos de remarquer, qu'il y a grande difference entre cete façon de trouuer plusieurs poins

pour

Quelles sont les lignes courbes qu'on descrit en trouuant plusieurs de leurs poins, qui peuuent estre receues en Geometrie.

pour tracer vne ligne courbe, & celle dont on se sert pour la spirale, & ses semblables. car par cete derniere on ne trouue pas indifferemment tous les poins de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuuent estre determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, & ainsi a proprement parler on ne trouue pas vn de ses poins. c'est a dire pas vn de ceux qui luy sont tellement propres, qu'ils ne puissent estre trouués que par elle: Au lieu qu'il ny a aucun point dans les lignes qui seruent a la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se determinent par la façon tantost expliquée. Et pourceque cete façon de tracer une ligne courbe, en trouuant indifferemment plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'a celles qui peuuent aussy estre descrites par vn mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie.

Quelles sont aussy celles qu'on descrit auec vne chorde, qui peuuent y estre receues.

Et on n'en doit pas reietter non plus, celle ou on se sert d'vn fil, ou d'vne chorde repliée, pour determiner l'egalité ou la difference de deux ou plusieurs lignes droites qui peuuent estre tirées de chasque point de la courbe qu'on cherche, a certains autres poins, ou sur certaines autres lignes a certains angles. ainsi que nous auons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipse & l'Hyperbole. car encore qu'on n'y puisse reçeuoir aucunes lignes qui semblent a des chordes, c'est a dire qui deuienent tantost droites & tantost courbes, a cause que la proportion, qui est entre les droites & les courbes, n'estant pas connuë, & mesme ie croy ne le pouuant estre par les hommes, on ne pourroit rien conclure de là qui

fust

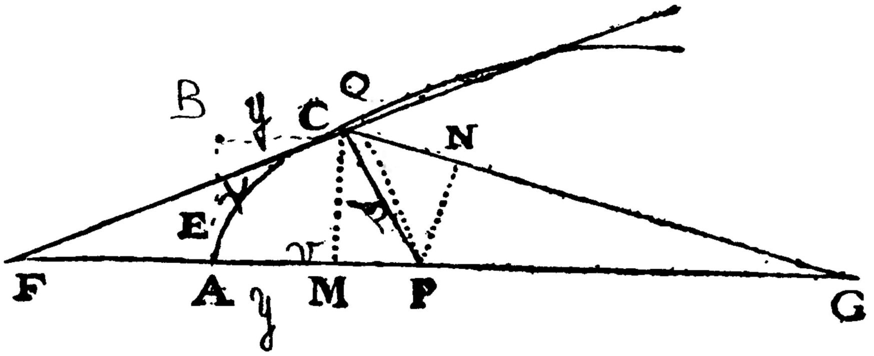
fust exact & assuré. Toutefois a cause qu'on ne se sert de chordes en ces constructions, que pour determiner des lignes droites, dont on connoist parfaitement la longeur, cela ne doit point faire qu'on les reiette.

Or de cela seul qu'on sçait le rapport, qu'ont tous les poins d'vne ligne courbe a tous ceux d'vne ligne droite, en la façon que iay expliquée; il est aysé de trouuer aussy le rapport qu'ils ont a tous les autres poins, & lignes données: & en suite de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes, ou poins, a qui chasque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres: & ainsi d'imaginer diuers moyens pour les descrire, & d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussy par cela seul trouuer quasi tout cequi peut estre determiné touchant la grandeur de l'espace quelles comprenent, sans qu'il soit besoin que i'en donne plus d'ouuerture. Et enfin pour cequi est de toutes les autres proprietés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font auec quelques autres lignes. Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, aux poins ou elles sont rencontrées par cellés auec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ceque ie prens icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée a trouuer, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy ie croyray auoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lorsque i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits sur tels

Que pour trouuer toutes les proprietés des lignes courbes, il suffist de sçauoir le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites, & la facon de tirer d'autres lignes qui les couppent en tous ces poins a angles droits.

tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problésme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

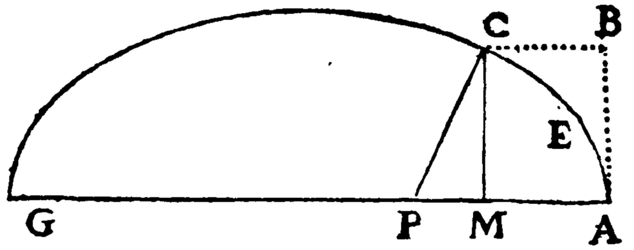
Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en sorte que faisant M A ou C B ∞y, & C M, ou B A ∞x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C ∞s, & P A ∞v, ou P M $\infty v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \infty v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; oubien

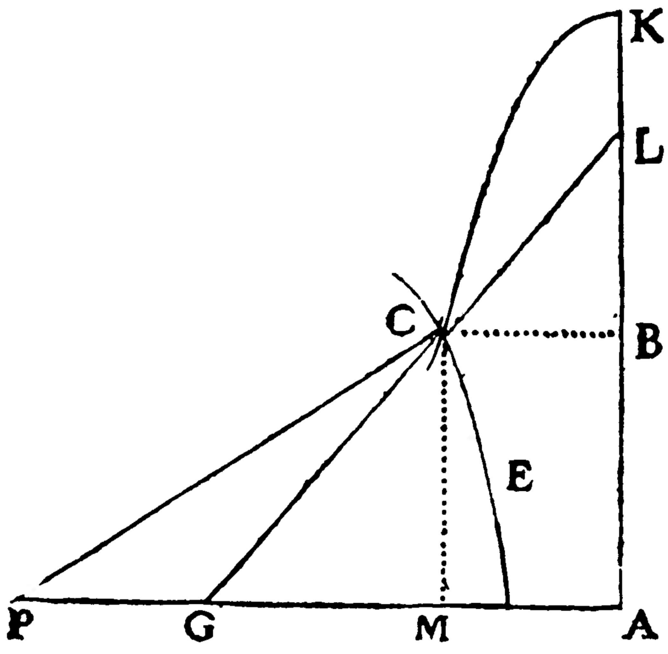
bien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius.



$xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'on ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$yy \frac{\maltese\, qry - 2qvy \maltese\, qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.



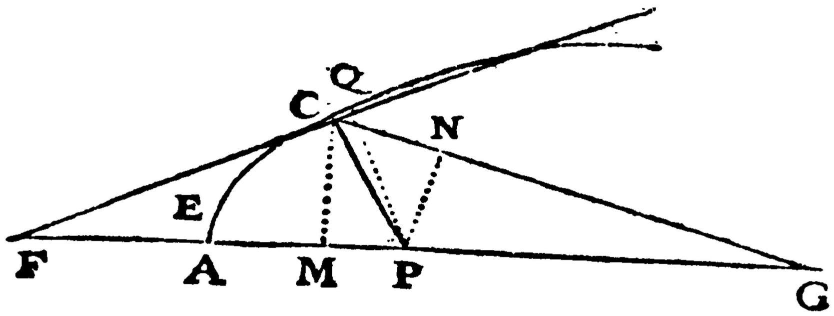
Tout de mesme si C E est la ligne courbe descrite par le mouuement d'vne Parabole en la façon cy dessus expliquée, & qu'on ait posé b pour G A, c pour K L, & d pour le costé droit du diametre K L en la parabole: l'equatiõ qui explique le rapport qui

qui est entre x & y, est $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$. d'où ostant x, on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. & remetrant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Et ainsi des autres.

Mesme encore que les poins de la ligne courbe ne se rapportassent pas en la façon que iay ditte a ceux d'vne ligne droite, mais en toute autre qu'on sçauroit imaginer, on ne laisse pas de pouuoir tousiours auoir vne telle equation. Comme si C E est vne ligne, qui ait tel rapport aux trois poins F, G, & A, que les lignes droites tirées de chascun de ses poins comme C, iusques au point F, surpassent la ligne F A d'vne quantité, qui ait certaine proportiõ donnée a vne autre quantité dont GA surpasse les lignes tirées des mesmes



poins iusques à G. Faisons G A ∞ b, A F ∞ c, & prenant à discretion le point C dans la courbe, que la quantité dont C F surpasse F A, soit à celle dont G A surpasse G C, commè d à e, en sorte que si cete quantité qui est indeterminée se nomme z, FC est $c + z$, & GC est $b - \frac{e}{d}z$. Puis posant M A ∞ y, G M est $b - y$, & F M est $c + y$, & a cause du triangle rectangle C M G, ostant le quarré de de G M du quarré de G C, on a le quarré de C M, qui est $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. puis ostant le quarré de F M du quarré de F C, on a encore le quarré de C M en d'autres termes, a sçauoir $zz + 2cz - 2cy - yy$, & ces termes estant esgaux aux precedens, ils font connoistre y, ou M A, qui est $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$, & substituant cete somme au lieu d'y dans le quarré de C M, on trouue qu'il s'exprime en ces termes.

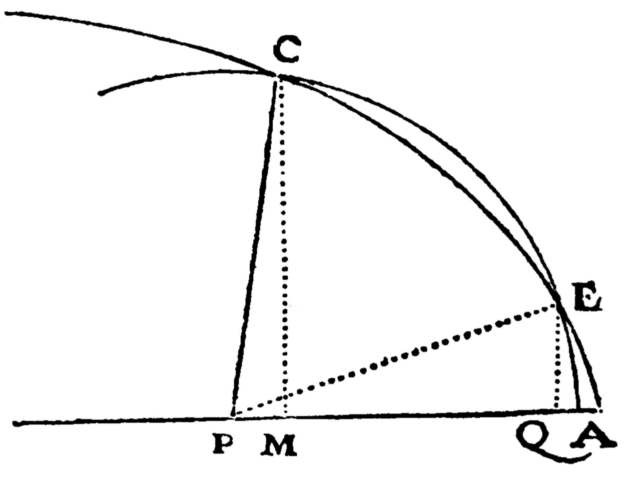
$$\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy.$$

Puis supposant que la ligne droite P C rencontre la courbe a angles droits au point C, & faisant P C ∞s, & P A ∞v comme deuant, P M est $v - y$; & a cause du triangle rectangle P C M, on à $ss - vv + 2vy - yy$ pour le quarré de C M, ou derechef ayant au lieu d'y substitué la somme qui luy est esgale, il vient

$$zz \frac{+ 2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee \quad eev - ddv} \infty 0$$ pour l'equation que nous cherchions.

Or aprés qu'on à trouué vne telle equation , au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantités x, ou y, ou z, qui sont desia données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point A, qu'il

A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre. Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle couppe la ligne courbe CE, l'equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant PA & PC estre connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inesgales. Car par exemple si ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré EQ parallele a CM, les noms des quantités indeterminées x & y, conuiendront aussy bien aux lignes EQ, & QA, qu'a CM, & MA; puis PE est esgale a PC, a cause du cercle, si bien que cherchant les lignes EQ & QA, par PE & PA qu'on suppose comme données, on aura la mesme equation, que si on cherchoit CM & MA par PC, PA. d'où il suit euidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposee, sera double en cete equation, c'est a dire qu'il y aura deux racines inesgales entre elles; & dont l'vne sera CM, l'autre EQ, si c'est x qu'on cherche; oubien l'vne sera MA, & l'autre QA, si c'est y. & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du mesme costé de la courbe que le point C, il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, sont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;

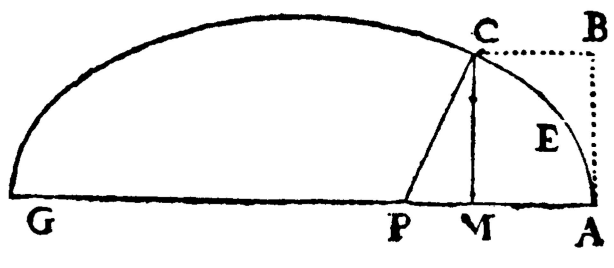


nes; & enfin elles ſont entierement eſgales, s'ils ſont tous deux ioins en vn; c'eſt a dire ſi le cercle, qui paſſe par C, y touche la courbe C E ſans la coupper.

De plus il faut conſiderer, que lorſqu'il y a deux racines eſgales en vne equation, elle a neceſſairement la meſme forme, que ſi on multiplie par ſoy meſme la quantité qu'on y ſuppoſe eſtre inconnuë moins la quantité connue qui luy eſt eſgale, & qu'aprés cela ſi cete derniere ſomme n'a pas tant de dimenſions que la precedente, on la multiplie par vne autre ſomme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puiſſe y auoir ſeparement equation entre chaſcun des termes de l'vne, & chaſcun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy deſſus, a ſçauoir

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit auoir la meſme forme que celle qui ſe produiſt en faiſant e eſgal a y, & multipliant $y - e$ par ſoy meſme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en ſorte qu'on peut comparer ſeparement chaſcun de leurs termes, & dire que puiſque le premier qui eſt yy eſt tout le meſme en l'vne qu'en l'autre, le ſecond qui eſt en l'vne $\frac{qry - 2qvy,}{q - r}$ eſt eſgal au ſecōd de l'autre qui eſt $- 2ey$, d'où cherchant la quantité v qui eſt la ligne P A, on à



$v \infty e - \frac{r}{q} e + \frac{1}{2} r$, oubiē a cauſe que nous auons ſuppoſé e eſgal a y, on a $v \infty y - \frac{r}{q} y + \frac{1}{2} r$. Et

ainſi

ainsi on pourroit trouuer s par le troisiesme terme $ee \infty \frac{qvv - qss,}{q - r}$ mais pourceque la quantité v determine assés le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.

Tout de mesme la seconde equation trouuée cy dessus, a sçauoir,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

doit auoir mesme forme, que la somme qui se produist lorsqu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par

$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, qui est

$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee, \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4;$$

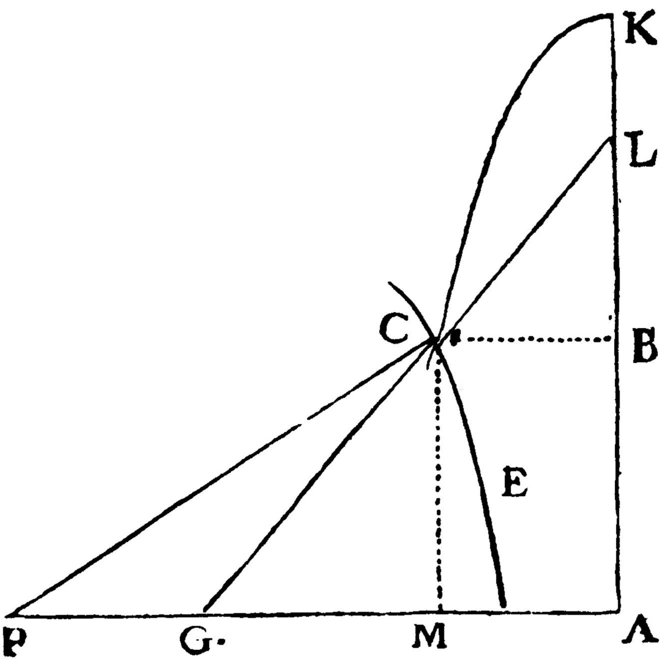
de façon que de ces deux equations i'en tire six autres, qui seruent a connoistre les six quantités f, g, h, k, v, & s: D'où il est fort aysé a entendre, que de quelque genre, que puisse estre la ligne courbe proposée, il vient tousiours par cete façon de proceder autant d'equations, qu'on est obligé de supposer de quantités, qui sont inconnués. Mais pour demesler par ordre ces equations, & trouuer enfin la quantité v, qui est la seule dont on a besoin, & à l'occasion de laquelle on cherche les autres: Il faut premierement par le second terme chercher f, la premiere des quantités inconnuës de la derniere somme, & on trouue $f \infty 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher k la derniere des quantités inconnuës de la mesme somme, & on trouue $k^4 \infty \frac{bbccdd.}{ee}$

Puis

Puis par le troisiesme terme il faut chercher g la seconde quantité, & on a $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$. Puis par le penultiesme il faut chercher h la penultiesme quantité, qui est $h^3 \infty \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainsi il faudroit continuer suiuant ce mesme ordre iusques a la derniere, s'il y en auoit d'auantage en cete somme; car c'est chose qu'on peut tousiours faire en mesme façon.

Puis par le terme qui suit en ce mesme ordre, qui est icy le quatriesme, il faut chercher la quantité v, & on a



$$v \infty \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

ou mettant y au lieu d'e qui luy est esgal on a

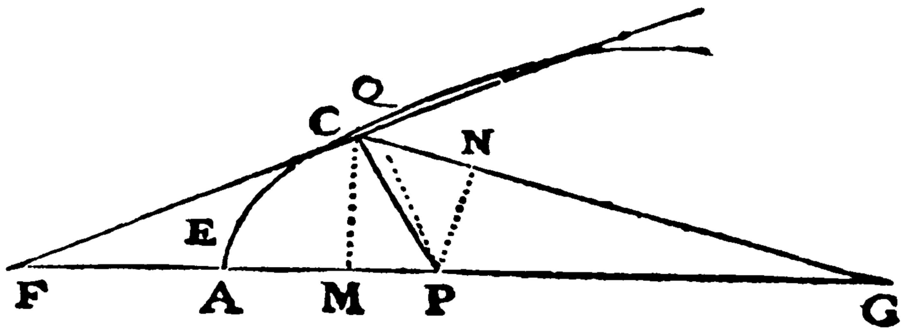
$$v \infty \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$$

pour la ligne A P.

Et ainsi la troisiesme equation, qui est

$$zz\,\frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv,}{bdd + cee + eev - ddv}$$ a la mesme forme que

$zz - 2fz + ff$, en supposant f esgal a z, si bienque il y a derechef equation entre $-2f$, ou $-2z$, & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev.}{bdd + cee + eev - ddv}$ d'où on connoist que la quantité v est $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$



C'est pourquoy composant la ligne A P, de cete somme esgale à v dont toutes les quantités sont connuës, & tirant du point P ainsi trouué, vne ligne droite vers C, elle y couppe la courbe C E a angles droits. qui est ce qu'il falloit faire. Et ie ne voy rien qui empesche, qu'on n'estende ce problesme en mesme façon a toutes les lignes courbes, qui tombent sous quelque calcul Geometrique.

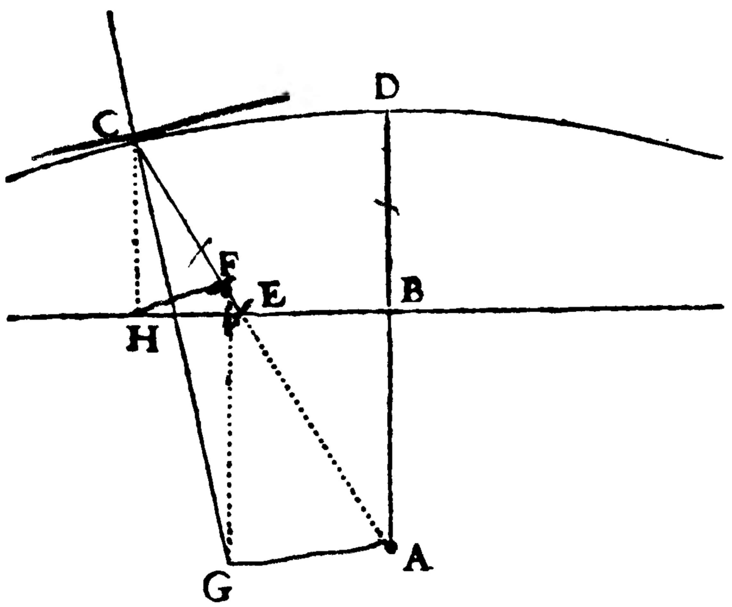
Mesme il est a remarquer touchant la derniere somme, qu'on prent a discretion, pour remplir le nombre des dimensions de l'autre somme , lorsqu'il y en manque , comme nous auons pris tantost $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$; que les signes + & – y peuuent estre supposés tels, qu'on veut, sans que la ligne v, ou A P, se trouue diuerse pour cela, comme vous pourrés aysement voir par experience. car s'il falloit que ie m'arestasse a demonstrer tous les theoresmes dont ie fais

fais quelque mention, ie ſerois contraint d'eſcrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne deſire. Mais ie veux bien en paſſant vous auertir que l'inuention de ſuppoſer deux equations de meſme forme, pour comparer ſeparement tous les termes de l'vne a ceux de l'autre, & ainſi en faire naiſtre pluſieurs d'vne ſeule, dont vous aués vû icy vn exemple, peut ſeruir a vne infinité d'autres Problesmes, & n'eſt pas l'vne des moindres de la methode dont ie me ſers.

Ie n'adiouſte point les conſtructions, par leſquelles on peut deſcrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en ſuite du calcul que ie viens d'expliquer, a cauſe qu'il eſt touſiours ayſé de les trouuer: Bienque ſouuent on ait beſoin d'vn peu d'adreſſe, pour les rendre courtes & ſimples.

Comme par exemple, ſi D C eſt la premiere conchoide des anciens, dont A ſoit le pole, & B H la regle: en ſorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & ſont compriſes entre la courbe C D, & la droite B H, comme D B & C E, ſoient eſgales: Et qu'on veuille trouuer la ligne C G qui la couppe au point C a angles droits. On pourroit en cherchant, dans la ligne B H, le point par où cete ligne C G doit paſſer, ſelon la methode icy expli-

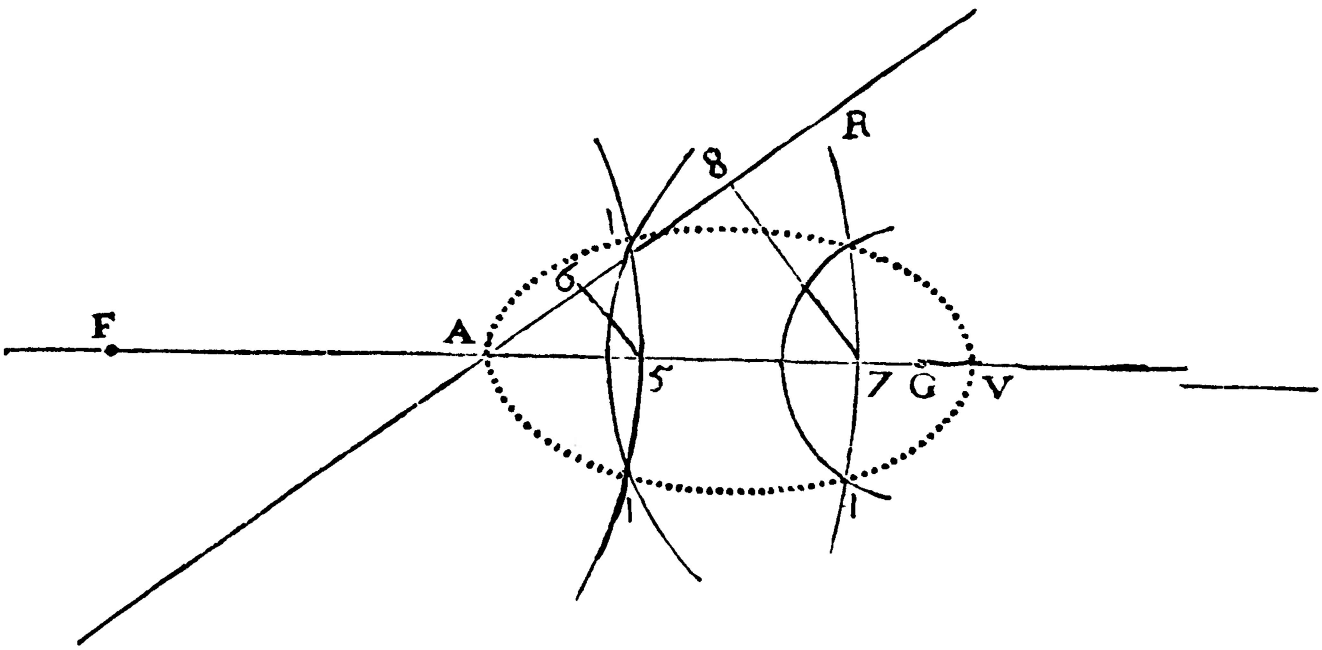
Exemple de la conſtruction de ce probleſme, en la conchoide.



expliquée, s'engager dans vn calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens: Et toutefois la construction, qui deuroit aprés en estre deduite, est fort simple. Car il ne faut que prendre C F en la ligne droite C A, & la faire esgale à C H qui est perpendiculaire sur H B: puis du point F tirer F G, parallele à B A, & esgale à E A: au moyen de quoy on a le point G, par lequel doit passer C G la ligne cherchée.

Explication de 4 nouueaux genres d'Ouales, qui seruent a l'Optique.

Au reste affin que vous sçachiées que la consideration des lignes courbes icy proposée n'est pas sans vsage, & qu'elles ont diuerses proprietés, qui ne cedent en rien a celles des sections coniques, ie veux encore adiouster icy l'explication de certaines Ouales, que vous verrés estre tres vtiles pour la Theorie de la Catoptrique, & de la Dioptrique. Voycy la facon dont ie les descris.

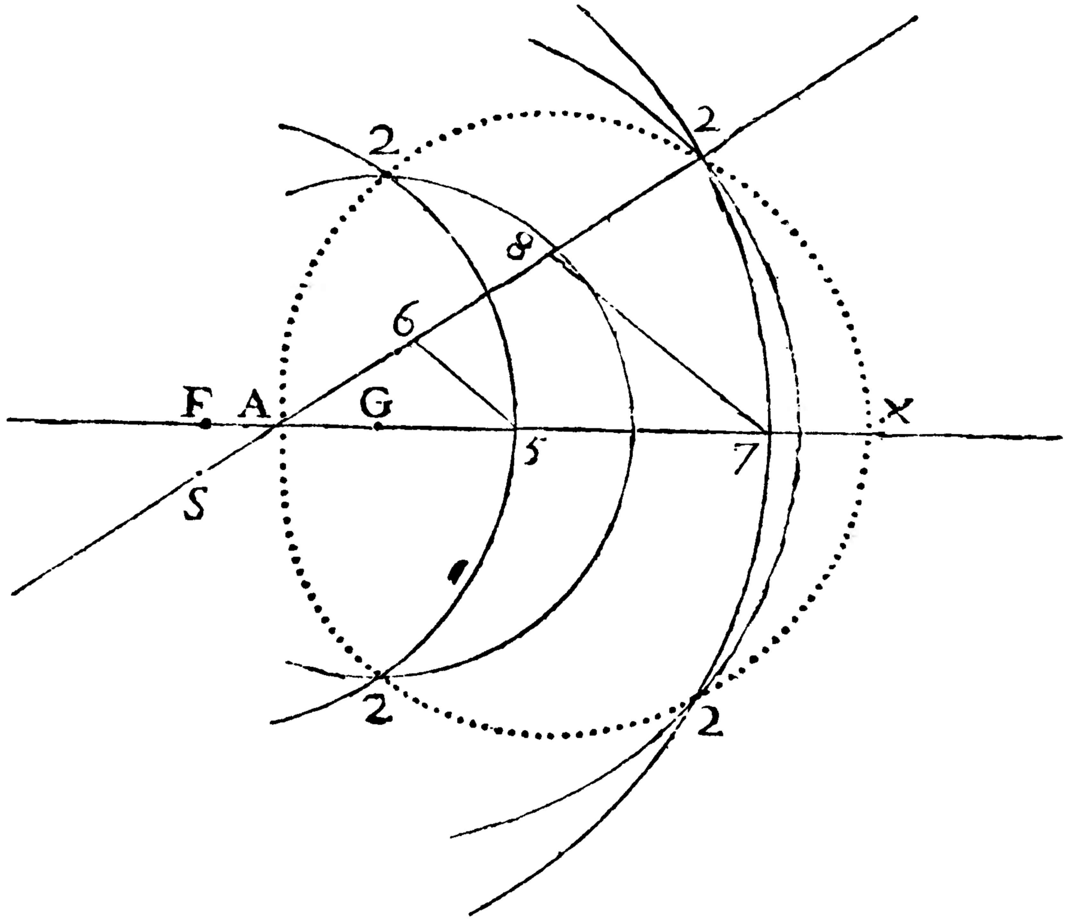


Premierement ayant tiré les lignes droites F A, & A R, qui s'entrecouppent au point A, sans qu'il importe a quels angles, ie prens en l'vne le point F a discretion, c'est a dire plus ou moins esloigné du point A selon que

ie

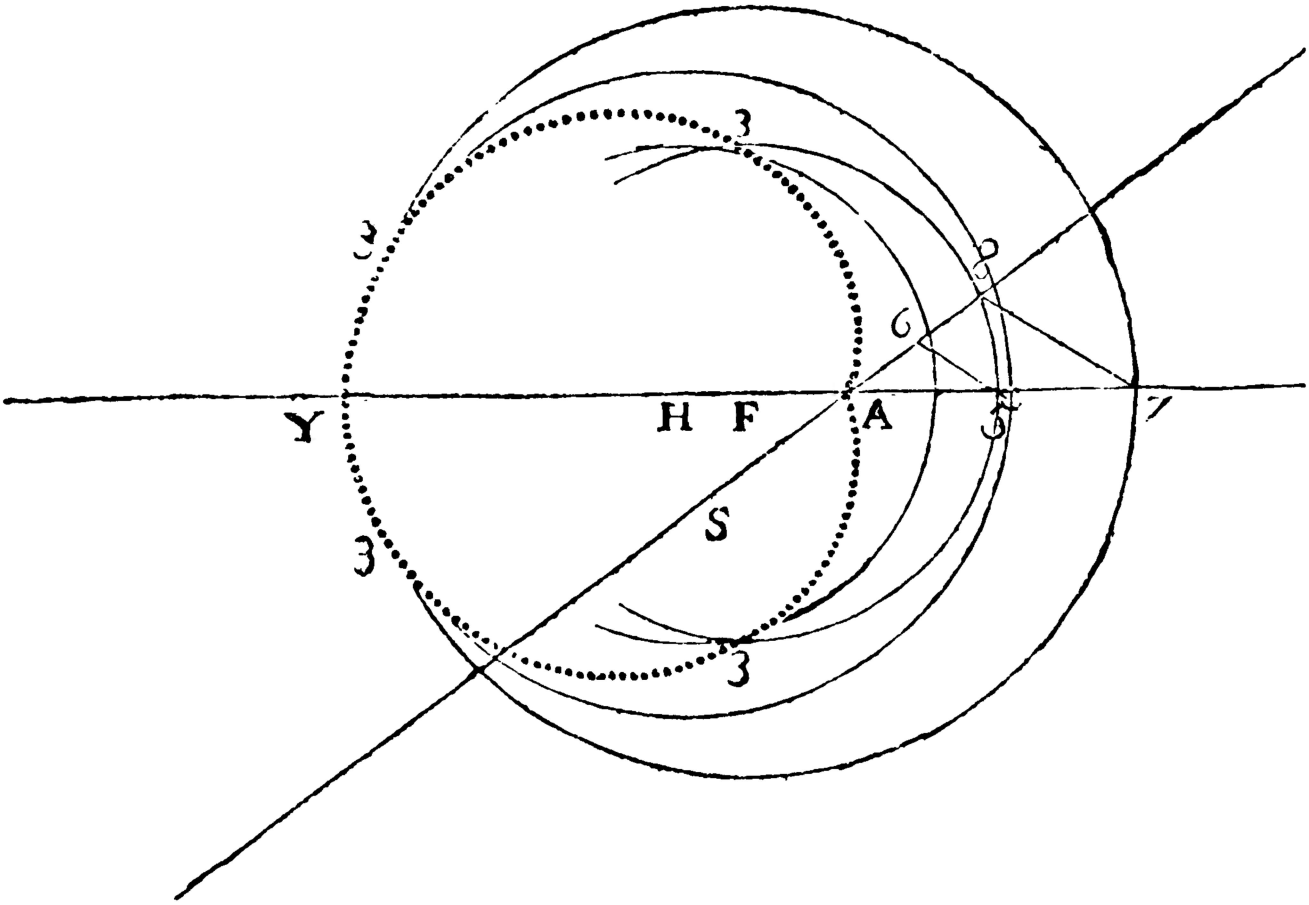
ie veux faire ces Ouales plus ou moins grandes, & de ce point F comme centre ie descris vn cercle , qui passe quelque peu au delà du point A, comme par le point 5, puis de ce point 5 ie tire la ligne droite 5 6, qui couppe l'autre au point 6, en sorte qu' A 6 soit moindre qu' A 5, selon telle proportion donnée qu'on veut, a sçauoir selon celle qui mesure les Refractions si on s'en veut seruir pour la Dioptrique. Aprés cela ie prens aussy le point G, en la ligne F A, du costé où est le point 5, a discretion, c'est a dire en faisant que les lignes A F & G A ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis ie fais R A esgale à G A en la ligne A 6. & du centre G descriuant vn cercle, dont le rayon soit esgal à R 6, il couppe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui est l'vn de ceux par où doit passer la premiere des Ouales cherchées. Puis derechef du centre F ie descris vn cercle, qui passe vn peu au deça, ou au delà du point 5, comme par le point 7, & ayant tiré la ligne droite 7 8 parallele a 5 6, du centre G ie descris vn autre cercle, dont le rayon est esgal a la ligne R 8. & ce cercle couppe celuy qui passe par le point 7 au point 1, qui est encore l'vn de ceux de la mesme Ouale. Et ainsi on en peut trouuer autant d'autres qu'on voudra , en tirant derechef d'autres lignes paralleles à 7 8, & d'autres cercles des centres F, & G.

Pour la seconde Ouale il n'y a point de difference, sinon qu'au lieu d' A R il faut de l'autre costé du point A prendre A S esgal à A G, & que le rayon du cercle descrit du centre G, pour coupper celuy qui est descrit du centre F & qui passe par le point 5, soit esgal a la ligne

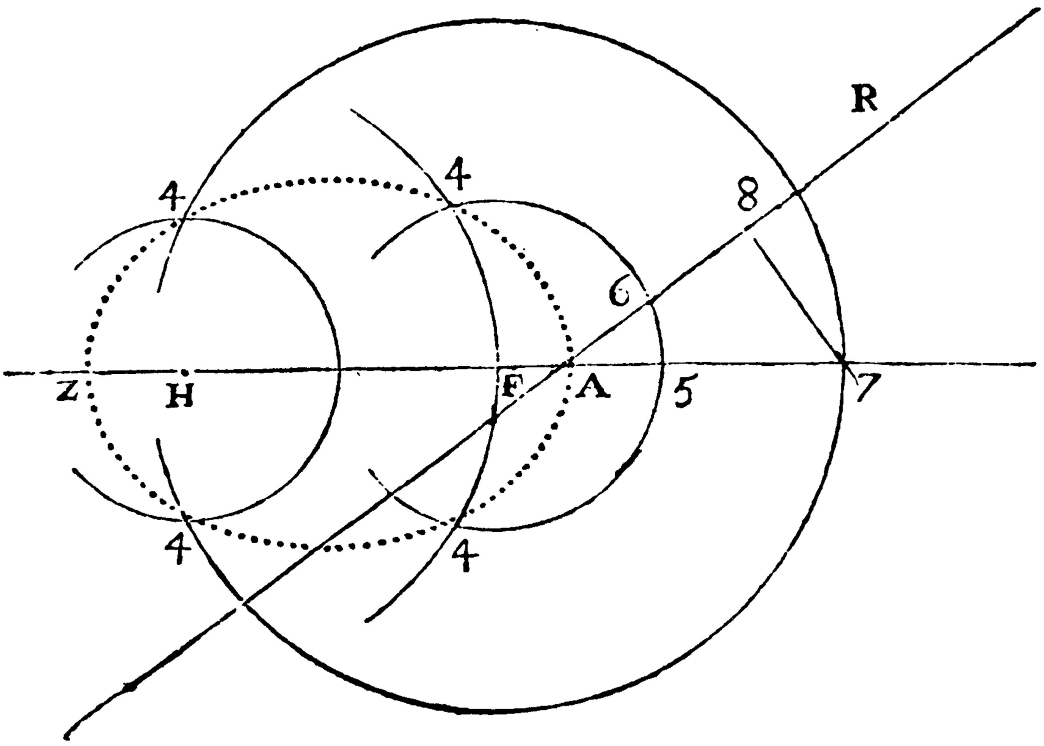


ligne S 6; ou qu'il ſoit eſgal à S 8, ſi c'eſt pour coupper celuy qui paſſe par le point 7. & ainſi des autres. au moyen dequoy ces cercles s'entrecouppent aux poins marqués 2, 2, qui ſont ceux de cete ſeconde Ouale A 2 X.

Pour la troiſieſme, & la quatrieſme, au lieu de la ligne A G il faut prendre A H de l'autre coſté du point A, à ſçauoir du meſme qu'eſt le point F. Et il y a icy de plus a obſeruer que cete ligne A H doit eſtre plus grande que A F: laquelle peut meſme eſtre nulle, en ſorte que le point F ſe rencontre où eſt le point A, en la deſcription de toutes ces ouales. Aprés cela les lignes A R, & A S eſtant eſgales à A H, pour deſcrire la troiſieſme ouale A 3 Y, ie fais vn cercle du centre H, dont le rayon eſt eſgal



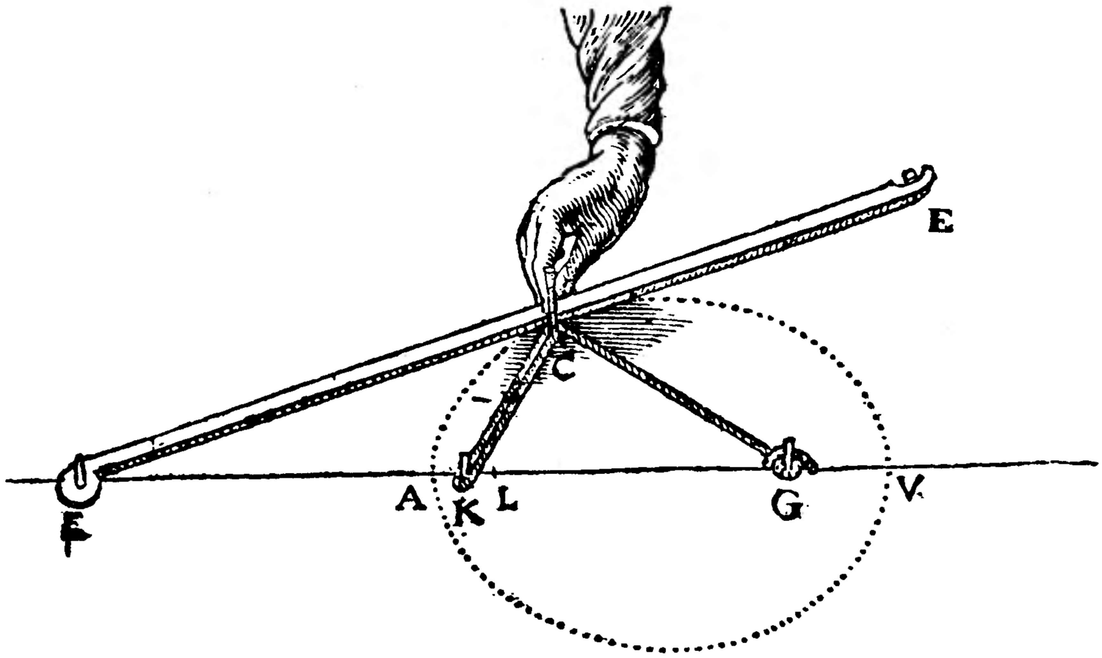
esgal à S 6, qui couppe au point 3 celuy du centre F, qui passe par le point 5; & vn autre dont le rayon est esgal a S 8, qui couppe celuy qui passe par le point 7, au point aussy marqué 3; & ainsi des autres. Enfin pour la derniere



ouale

ouale ie fais des cercles du centre H , dont les rayons sont esgaux aux lignes R 6, R 8, & semblables, qui couppent les autres cercles aux poins marqués 4.

On pourroit encore trouuer vne infinité d'autres moyens pour descrire ces mesmes ouales. comme par exemple, on peut tracer la premiere A V, lorsqu'on suppose les lignes F A & A G estre esgales, si on diuise la toute F G au point L, en sorte que F L soit a L G, com-



me A 5 à A 6. c'est à dire qu'elles ayent la proportion, qui mesure les refractions. Puis ayant diuisé A L en deux parties esgales au point K, qu'on face tourner vne reigle, comme F E, autour du point F, en pressant du doigt C, la chorde E C, qui estant attachée au bout de cete reigle vers E, se replie de C vers K, puis de K derechef vers C, & de C vers G, ou son autre bout soit attaché , en sorte que la longeur de cete chorde soit composée de celle des lignes G A plus A L plus F E moins A F. & ce sera le mouuement du point C, qui descrira cete ouale , a l'imitation de cequi a esté dit en la Dioptriq; de l'Ellipse,

&

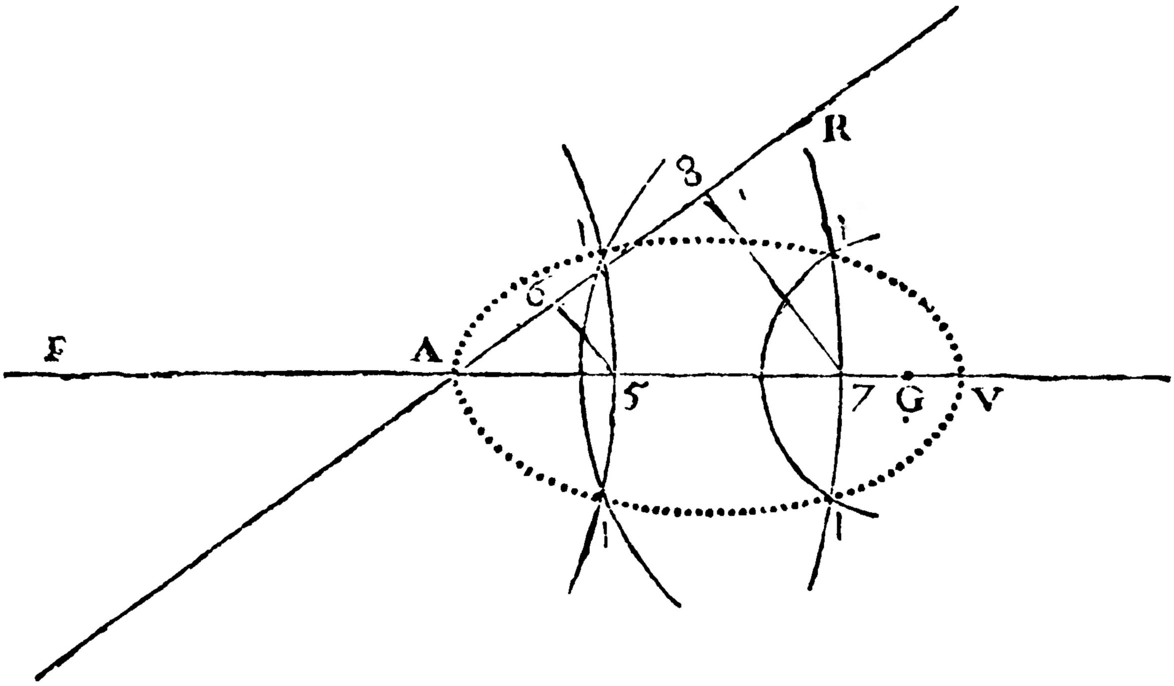
& de l'Hyperbole. mais ie ne veux point m'arester plus long tems sur ce suiet.

Or encore que toutes ces ouales semblent estre quasi de mesme nature, elles sont neanmoins de 4 diuers genres, chascun desquels contient sous soy vne infinité d'autres genres, qui derechef contienent chascun autant de diuerses especes, que fait le genre des Ellipses, ou celuy des Hyperboles. Car selon que la proportion, qui est entre les lignes A 5, A 6, ou semblables, est differente ; le genre subalterne de ces ouales est different. Puis selon que la proportion, qui est entre les lignes A F, & A G, ou A H, est changée, les ouales de chasque genre subalterne changent d'espece. Et selon qu' A G, ou A H est plus ou moins grande, elles sont diuerses en grandeur. Et si les lignes A 5 & A 6 sont esgales, au lieu des ouales du premier genre ou du troisiesme, on ne descrit que des lignes droites; mais au lieu de celles du second on a toutes les Hyperboles possibles; & au lieu de celles du dernier toutes les Ellipses.

Outre cela en chascune de ces ouales il faut considerer deux parties, qui ont diuerses proprietés ; a sçauoir en la premiere, la partie qui est vers A, fait que les rayons, qui estant dans l'air vienent du point F, se retournent tous vers le point G, lorsqu'ils rencontrent la superficie conuexe d'vn verre, dont la superficie est 1 A 1, & dans lequel les refractions se font telles, que suiuant ce qui a esté dit en la Dioptrique, elles peuuent toutes estre mesurées par la proportion, qui est entre les lignes A 5 & A 6, ou semblables, par l'ayde desquelles on a descrit cete ouale.

Les proprietés de ces oúales touchant les reflexions, & les refractions.

Mais



Mais la partie, qui est vers V, fait que les rayons qui vienent du point G se reflefchiroient tous vers F, s'ils y rencontroient la superficie concaue d'vn miroir, dont la figure fust 1 V 1, & qui fust de telle matiere qu'il diminuast la force de ces rayons, selon la proportion qui est entre les lignes A 5 & A 6: Car de ce qui a esté demonstré en la Dioptrique, il est euident que cela posé, les angles de la reflexion seroient inesgaus, aussy bien que sont ceux de la refraction, & pourroient estre mesurés en mesme sorte.

En la seconde ouale la partie 2 A 2 sert encore pour les reflexions dont on suppose les angles estre inesgaux. car estant en la superficie d'vn miroir composé de mesme matiere que le precedent, elle feroit tellement reflefchir tous les rayons, qui viendroient du point G, qu'ils sembleroient aprés estre reflefchis venir du point F. Et il est a remarquer, qu'ayant fait la ligne A G beaucoup

plus

plus grande que A F, ce miroir ſeroit conuexe au milieu, vers A, & concaue aux extrêmitez: car telle eſt la figure de cete ligne, qui en cela repreſente plutoſt vn coeur qu'vne ouale.

Mais ſon autre partie X 2 ſert pour les refractions, & fait que les rayons, qui eſtant dans l'air tendent vers F, ſe detournent vers G, en trauerſant la ſuperficie d'vn verre, qui en ait la figure.

La troiſieſme ouale ſert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui eſtant dans l'air tendent vers F, ſe vont rendre vers H dans le verre, aprés qu'ils ont trauerſé ſa ſuperficie, dont la figure eſt A 3 Y 3, qui eſt conuexe par tout, excepté vers A où elle eſt vn peu concaue, en ſorte qu'elle a la figure d'vn coeur auſſy bien que la precedente. Et la difference qui eſt entre les deux parties de cete ouale, conſiſte en ce que le point F eſt plus proche de l'vne, que n'eſt le point H; & qu'il eſt plus eſloigné de l'autre, que ce meſme point H.

En meſme façon la derniere ouale ſert toute aux reflexions, & fait que ſi les rayons, qui vienent du point H, rencontroient la ſuperficie concaue d'vn miroir de meſme matiere que les precedens, & dont la figure fuſt A 4 Z 4, ils ſe refleſchiroient tous vers F.

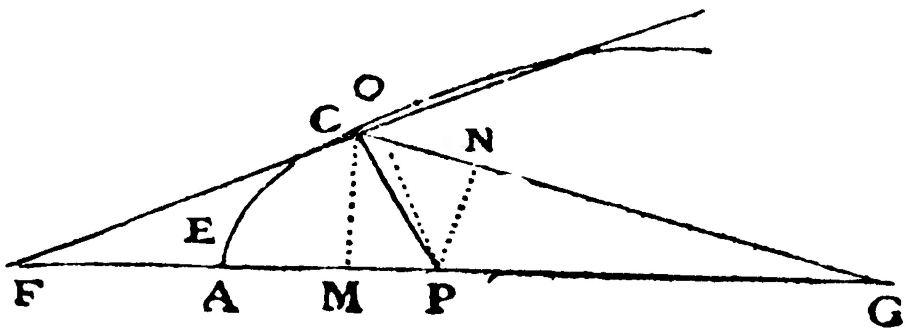
De façon qu'on peut nommer les poins F, & G, ou H les poins bruſlans de ces ouales, a l'exemple de ceux des Ellipſes, & des Hyperboles, qui ont eſté ainſi nommés en la Dioptrique.

I'omets quantité d'autres refractions, & reflexions, qui ſont reiglées par ces meſmes ouales : car n'eſtant que les conuerſes, ou les contraires de celles cy, elles en

peuuent

Demonstration des proprietés de ces ouales touchant les reflexions & refractions.

peuuent facilement estre deduites. Mais il ne faut pas que i'omette la demonstration de ceque iay dit. & a cet effect, prenons par exemple le point C a discretion en la premiere partie de la premiere de ces ouales; puis tirons



la ligne droite C P, qui couppe la courbe au point C à angles droits, cequi est facile par le problesme precedent; Car prenant b pour A G, c pour A F, $c + z$ pour F C; & supposant que la proportion qui est entre d & e, que ie prendray icy tousiours pour celle qui mesure les refractions du verre proposé, designe aussy celle qui est entre les lignes A 5, & A 6, ou semblables, qui ont serui pour descrire cete ouale, ce qui donne $b - \frac{e}{d}z$ pour G C: on trouue que la ligne A P est

$\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez.}{bde + cdd + ddz - eez}$ ainsi qu'il a esté monstré cy dessus.

De plus du point P ayant tiré P Q a angles droits sur la droite F C, & P N aussy a angles droits sur G C, considerons que si P Q est à P N, comme d est à e, c'est à dire, comme les lignes qui mesurent les refractions du verre conuexe A C, le rayon qui vient du point F au point C, doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre aprés vers G: ainsi qu'il est tres euident de cequi a esté dit en la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul, s'il est vray, que P Q soit à P N; comme d est à e. Les triangles rectangles P Q F, & C M F sont semblables;

blables; d'où il ſuit que C F eſt à C M, comme F P eſt a P Q; & par conſequent que F P, eſtant multipliée par C M, & diuiſée par C F, eſt eſgale a P Q. Tout de meſme les triangles rectangles P N G, & C M G ſont ſemblables; d'où il ſuit que G P, multipliée par C M, & diuiſée par C G, eſt eſgale a P N. Puis a cauſe que les multiplications, ou diuiſions, qui ſe font de deux quantités par vne meſme, ne changent point la proportion qui eſt entre elles; ſi F P multipliée par C M; & diuiſée par C F, eſt à G P multipliée auſſy par C M & diuiſée par C G; comme d eſt à e, en diuiſant l'vne & l'autre de ces deux ſommes par C M, puis les multipliant toutes deux par C F, & derechef par C G, il reſte F P multipliée par C G, qui doit eſtre à G P multipliée par C F, comme d eſt à e.

Or par la conſtruction F P eſt $c \dfrac{+ bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$

oubien F P $\propto \dfrac{bcdd + ccdd + bddz + cddz.}{bde + cdd + ddz - eez}$ & C G eſt

$b - \dfrac{e}{d}z$. ſibienque multipliant F P par C G il vient

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz.}{bde + cdd + ddz - eez}$$

Puis G P eſt $b \dfrac{- bcdd + bcde - bddz - ceez.}{bde + cdd + ddz - eez}$ oubien

G P $\propto \dfrac{bbde + bcde - beez - ceez,}{bde + cdd + ddz - eez}$ & C F eſt $c + z$;

ſibienque multipliant G P par C F, il vient

$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz.}{bde + cdd + ddz - eez}$$

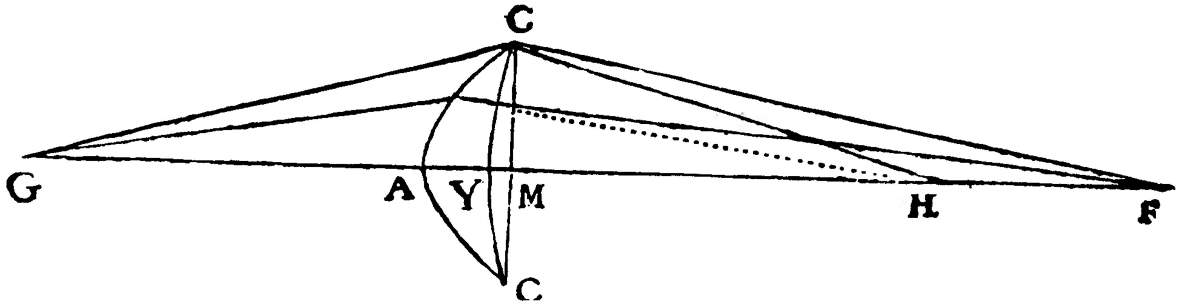
Et pourceque la premiere de ces ſommes diuiſée par d, eſt la meſme que la ſeconde diuiſée par e, il eſt manifeſte, que F P multipliée par C G eſt a G P multipliée par C F; c'eſt c'eſt a dire que P Q eſt à P N, comme d eſt à e, qui eſt tout ce qu'il falloit demonſtrer.

Et ſçachés, que cete meſme demonſtration s'eſtend a tout cequi a eſté dit des autres refractions ou reflexions, qui ſe font dans les ouales propoſées; ſans qu'il y faille changer aucune choſe, que les ſignes + & -- du calcul. c'eſt pourquoy chaſcun les peut ayſement examiner de ſoymeſme, ſans qu'il ſoit beſoin que ie m'y areſte.

Mais il faut maintenent, que ie ſatisface a ce que iay omis en la Dioptrique, lorſqu'aprés auoir remarqué qu'il peut y auoir des verres de pluſieurs diuerſes figures, qui facent auſſy bien l'vn que l'autre, que les rayons venans d'vn meſme point de l'obiet, s'aſſemblent tous en vn autre point aprés les auoir trauerſés. & qu'entre ces verres, ceux qui ſont fort conuexes d'un coſté, & concaues de l'autre, ont plus de force pour bruſler, que ceux qui ſont eſgalement conuexes des deux coſtés. au lieu que tout au contraire ces derniers ſont les meilleurs pour les lunetes. ie me ſuis contenté d'expliquer ceux, que i'ay crû eſtre les meilleurs pour la prattique, en ſuppoſant la difficulté que les artiſans peuuent auoir a les tailler. C'eſt pourquoy, affin qu'il ne reſte rien a ſouhaiter touchant la theorie de cete ſcience, ie doy expliquer encore icy la figure des verres, qui ayant l'vne de leurs ſuperficies autant conuexe, ou concaue, qu'on voudra, ne laiſſent pas de faire que tous les rayons, qui vienent vers eux d'vn meſme point, ou paralleles, s'aſſemblent aprés en vn meſme point; & celle des verres qui font le ſemblable, eſtant eſgalement conuexes des deux coſtés, oubien la

conue-

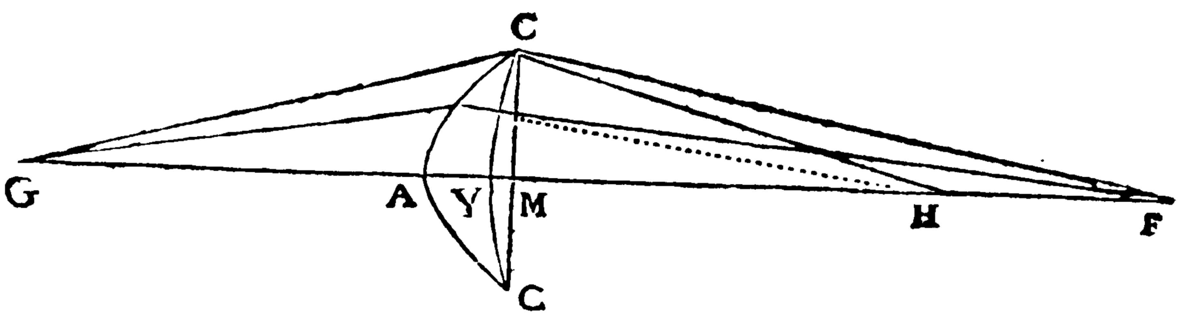
conuexité de l'vne de leurs ſuperficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.



Comment on peut faire vn verre autant conuexe ou concaue, en l'vne de ſes ſuperficies, qu'on voudra, qui raſſemble a vn point donné, tous les rayons qui vienent d'vn autre point donné.

Poſons pour le premier cas, que les poins G, Y, C, & F eſtant donnés, les rayons qui vienent du point G, oubien qui ſont paralleles à G A ſe doiuent aſſembler au point F, aprés auoir trauerſé vn verre ſi concaue, qu'Y eſtant le milieu de ſa ſuperficie interieure, l'extremité en ſoit au point C, en ſorte que la chorde C M C, & la fleche Y M de l'arc C Y C, ſont données. La queſtion va là, que premierement il faut conſiderer, de laquelle des ouales expliquées, la ſuperficie du verre Y C, doit auoir la figure, pour faire que tous les rayons, qui eſtant dedans tendent vers vn meſme point, comme vers H, qui n'eſt pas encore connu, s'aillent rendre vers vn autre, a ſçauoir vers F, aprés en eſtre ſortis. Car il n'y a aucun effect touchant le rapport des rayons changé par reflexion, ou refraction d'vn point a vn autre, qui ne puiſſe eſtre cauſé par quelqu'vne de ces ouales. & on voit ayſement que cetuycy le peut eſtre par la partie de la troiſieſme Ouale, qui a tantoſt eſté marquée 3 A 3, ou par celle de la meſme, qui a eſté marquée 3 Y 3, ou enfin par la partie de la ſeconde qui a eſté marquée 2 X 2. Et pourceque ces trois tombent icy ſous meſme calcul, on doit tant pour l'vne, que pour l'autre prendre Y pour leur

leur ſommet, C pour l'vn des poins de leur circonferen-ce, & F pour l'vn de leurs poins bruſlans ; aprés quoy il ne reſte plus a chercher que le point H, qui doit eſtre l'autre point bruſlant. Et on le trouue en conſiderant, que la difference, qui eſt entre les lignes F Y & F C, doit eſtre a celle, qui eſt entre les lignes H Y & H C, comme *d* eſt à *e*, c'eſt a dire, comme la plus grande des lignes qui meſurent les refractions du verre propoſé eſt à la moin-dre; ainſi qu'on peut voir manifeſtement de la deſcri-ption de ces ouales. Et pourceque les lignes F Y & F C ſont données, leur difference l'eſt auſſy, & en ſuite celle qui eſt entre H Y & H C ; pourceque la proportion qui eſt entre ces deux differences eſt donnée. Et de plus a cauſe que Y M eſt donnée, la difference qui eſt entre M H, & H C, l'eſt auſſy; & enfin pourceque C M eſt don-née, il ne reſte plus qu'à trouuer M H le coſté du triangle



rectangle C M H, dont on a l'autre coſté C M, & on a auſſy la difference qui eſt entre C H la baze, & M H le coſté demandé. d'où il eſt ayſé de le trouuer. car ſi on prent *k* pour l'excés de C H ſur M H, & *n* pour la longeur de la ligne C M, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour M H. Et aprés auoir ainſi le point H, s'il ſe trouue plus loin du point Y,

que

que n'en eſt le point F, la ligne C Y doit eſtre la premiere partie de l'ouale du troiſieſme genre, qui a tantoſt eſté nommée 3 A 3: Mais ſi H Y eſt moindre que F Y, oubien elle ſurpaſſe H F de tant, que leur difference eſt plus grande a raiſon de la toute F Y, que n'eſt e la moindre des lignes qui meſurent les refractions comparée auec d la plus grande, c'eſt a dire que faiſant H F ∞ c, & H Y ∞ $c + h$, dh eſt plus grande que $2ce + eh$, & lors C Y doit eſtre la ſeconde partie de la meſme ouale du troiſieſme genre, qui a tantoſt eſté nomée 3 Y 3; Oubien dh eſt eſgale, ou moindre que $2ce + eh$: & lors C Y doit eſtre la ſeconde partie de l'ouale du ſecond genre qui a cy deſſus eſté nommée 2 X 2. Et enfin ſi le point H eſt le meſme que le point F, ce qui n'arriue que lorſque F Y & F C ſont eſgales cete ligne Y C eſt vn cercle.

Aprés cela il faut chercher C A C l'autre ſuperficie de ce verre, qui doit eſtre vne Ellipſe, dont H ſoit le point bruſlant; ſi on ſuppoſe que les rayons qui tombent deſſus ſoiēt paralleles; & lors il eſt ayſé de la trouuer. Mais ſi on ſuppoſe qu'ils vienēt du point G, ce doit eſtre la premiere partie d'vne ouale du premier genre, dont les deux poins bruſlans ſoiēt G & H, & qui paſſe par le point C: d'où on trouue le point A pour le ſommet de cete ouale, en conſiderāt, que G C doit eſtre plus grāde que G A, d'vne quantité, qui ſoit a celle dont H A ſurpaſſe H C, comme d à e. car ayant pris k pour la difference, qui eſt entre C H, & H M, ſi on ſuppoſe x pour A M, on aura $x - k$, pour la difference qui eſt entre A H, & C H; puis ſi on prent g pour celle, qui eſt entre G C, & G M, qui ſont données, on aura $g + x$ pour celle, qui eſt entre G C, & G A; &

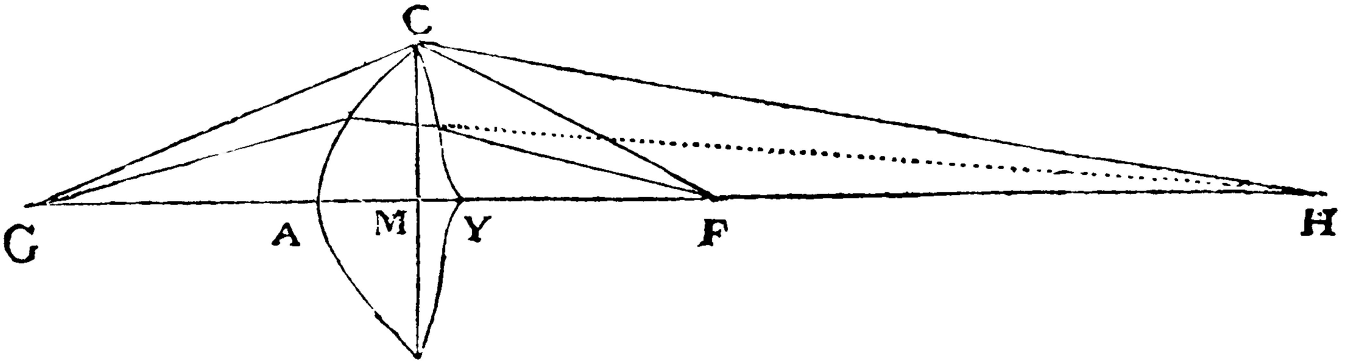
pour-

Commét on peut faire vn verre, qui ait le mesme effect que le precedét, & que la conuexité de l'vne de ses superficies ait la proportion donnée auec celle de l'autre.

pourceque cete derniere $g + x$ est à l'autre $x - k$, comme d est à e. on à $ge + ex \propto dx - dk$, oubien $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour la ligne x, ou A M, par laquelle on determine le point A qui estoit cherché.

Posons maintenent pour l'autre cas, qu'on ne donne que les poins G C, & F, auec la proportion qui est entre les lignes A M, & Y M, & qu'il faille trouuer la figure du verre A C Y, qui face que tous les rayons, qui vienent du point G s'assemblent au point F.

On peut derechef icy se seruir de deux ouales dont l'vne, A C, ait G & H pour ses poins bruslans; & l'autre,



C Y, ait F & H pour les siens. Et pour les trouuer, premierement supposant le point H qui est commun a toutes deux estre connu, ie cherche A M par les trois poins G, C, H, en la façon tout maintenent expliquée; a sçauoir preuant k pour la difference, qui est entre C H, & H M; & g pour celle qui est entre G C, & G M: & A C estant la premiere partie de l'Ouale du premier genre, iay $\frac{ge + dk}{d - e}$ pour A M: puis ie cherche aussy M Y par les trois poins F, C, H, en sorte que C Y soit la premiere partie d'vne ouale du troisiesme genre; & prenant y pour M Y,

&

& f pour la difference, qui est entre C F, & F M, i'ay $f+y$, pour celle qui est entre C F, & F Y: puis ayant desia k pour celle qui est entre C H, & H M, iay $k+y$ pour celle qui est entre C H, & H Y, que ie sçay deuoir estre à $f+y$ comme e est à d, a cause de l'Ouale du troisiesme genre, d'où ie trouue que y ou M Y est $\frac{fe - dk}{d - e}$, puis ioignant ensemble les deux quantités trouuées pour A M, & M Y, ie trouue $\frac{ge + fe}{d - e}$ pour la toute A Y; D'où il suit que de quelque costé que soit supposé le point H, cete ligne A Y est tousiours composée d'vne quantité, qui est a celle dont les deux ensemble G C, & C F surpassent la toute G F, Comme e, la moindre des deux lignes qui seruent a mesurer les refractions du verre proposé, est à $d - e$, la difference qui est entre ces deux lignes. cequi est vn assés beau theoresme. Or ayant ainsi la toute A Y, il la faut couper selon la proportion que doiuent auoir ses parties A M & M Y; au moyen de quoy pource qu'on a desia le point M, on trouue aussy les poins A & Y; & en suite le point H, par le problesme precedent. Mais auparauant il faut regarder, si la ligne A M ainsi trouuée est plus grande que $\frac{ge}{d - e}$, ou plus petite, ou esgale. Car si elle est plus grande, on apprent de là que la courbe A C doit estre la premiere partie d'vne ouale du premier genre; & C Y la premiere d'vne du troisiesme, ainsi qu'elles ont esté icy supposées: au lieu que si elle est plus petite, cela monstre que c'est C Y, qui doit estre la premiere partie d'vne ouale du premier genre; & que A C doit estre la premiere d'vne du troisiesme: Enfin si A M est esgale à

$\frac{ge}{d - e}$

$\frac{ge,}{d -- e}$ les deux courbes A C & C Y doiuent eſtre deux hyperboles.

On pourroit eſtendre ces deux problesſmes a vne infinité d'autres cas, que ie ne m'areſte pas a deduire, à cauſe qu'ils n'ont eu aucun vſage en la Dioptrique.

On pourroit auſſy paſſer outre, & dire, lorſque l'vne des ſuperficies du verre eſt donnée, pouruû qu'elle ne ſoit que toute plate, ou composée de ſections coniques, ou de cercles; comment on doit faire ſon autre ſuperficie, affin qu'il tranſmette tous les rayons d'vn point donné, a vn autre point auſſy donné. car ce n'eſt rien de plus difficile que ceque ie viens d'expliquer; ou plutoſt c'eſt choſe beaucoup plus facile, à cauſe que le chemin en eſt ouuert. Mais i'ayme mieux, que d'autres le cherchent, affinque s'ils ont encore vn peu de peine à le trouuer, cela leur face d'autant plus eſtimer l'inuention des choſes qui ſont icy demonſtrées.

Commēt on peut appliquer ce qui a eſté dit icy des lignes courbes deſcrites ſur vne ſuperficie plate, à celles qui ſe deſcriuēt dās vn eſpace qui a trois dimenſions.

Au reſte ie n'ay parlé en tout cecy, que des lignes courbes, qu'on peut deſcrire ſur vne ſuperficie plate; mais il eſt ayſé de rapporter ceque i'en ay dit, à toutes celles qu'on ſçauroit imaginer eſtre formées, par le mouuement regulier des poins de quelque cors, dans vn eſpace qui a trois dimenſions. A ſçauoir en tirant deux perpendiculaires, de chaſcun des poins de la ligne courbe qu'on veut conſiderer, ſur deux plans qui s'entrecouppent a angles droits, l'vne ſur l'vn, & l'autre ſur l'autre. car les extremités de ces perpendiculaires deſcriuent deux autres lignes courbes, vne ſur chaſcun de ces plans, deſquelles on peut, en la façon cy deſſus expliquée, determiner tous

les

les poins, & les rapporter a ceux de la ligne droite, qui eſt commune a ces deux plans, au moyen dequoy ceux de la courbe, qui a trois dimenſions, ſont entierement determinés. Meſme ſi on veut tirer vne ligne droite, qui couppe cete courbe au point donné a angles droits · il faut ſeulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, vne en chaſcun, qui couppent a angles droits les deux lignes courbes, qui y ſont, aux deux poins, ou tombent les perpendiculaires qui vienent de ce point donné. car ayant eſleué deux autres plans, vn ſur chaſcune de ces lignes droites, qui couppe a angles droits le plan où elle eſt, on aura l'interſection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainſi ie penſe n'auoir rien omis des elemens, qui ſont neceſſaires pour la connoiſſance des lignes courbes.

LA

GEOMETRIE.

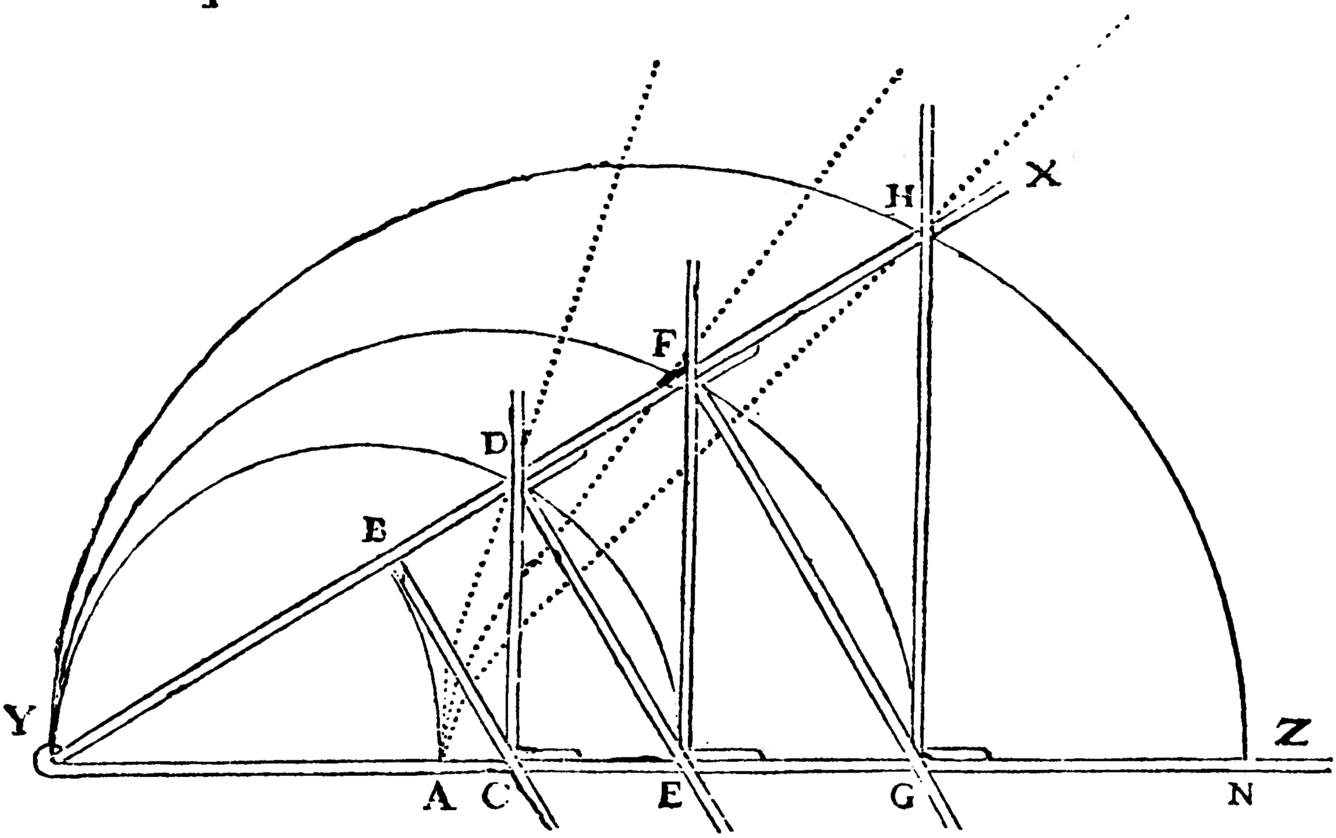
LIVRE TROISIESME.

De la conſtruction des Problesmes, qui ſont Solides, ou pluſque Solides.

De quelles lignes courbes on peut ſe ſeruir, en la conſtruction de chaſque probleſme.

ENCORE que toutes les lignes courbes, qui peuuent eſtre deſcrites par quelque mouuement regulier, doiuent eſtre receuës en la Geometrie, ce n'eſt pas a dire qu'il ſoit permis de ſe ſeruir indifferemment de la premiere qui ſe rencontre, pour la conſtruction de chaſque pro-

problesme: mais il faut auoir soin de choisir tousiours la plus simple, par laquelle il soit possible de le resoudre. Et mesme il est a remarquer, que par les plus simples on ne doit pas seulement entendre celles, qui peuuent le plus aysement estre descrites, ny celles qui rendent la construction, ou la demonstration du Problesme proposé plus facile, mais principalement celles, qui sont du plus simple genre, qui puisse seruir a determiner la quantité qui est cherchée.



Exemple touchant l'inuentiõ de plusieurs moyẽnes proprotionelles.

Comme par exemple ie ne croy pas, qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouuer autant de moyennes proportionnelles, qu'on veut, ny dont la demonstration soit plus euidente, que d'y employer les lignes courbes, qui se descriuent par l'instrument X Y Z cy dessus expliqué. Car voulant trouuer deux moyennes proportionnelles entre Y A & Y E, il ne faut que descrire vn cercle, dont le diametre soit Y E; & pource que ce cercle coup-

pe

pe la courbe A D au point D, Y D est l'vne des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la demonstration se voit a l'oeil par la seule application de cet instrument sur la ligne Y D. car comme Y A, ou Y B, qui luy est esgale est a Y C; ainsi Y C est a Y D; & Y D a Y E.

Toutdemesme pour trouuer quatre moyennes proportionelles entre Y A & Y G; ou pour en trouuer six entre Y A & Y N, il ne faut que tracer le cercle Y F G, qui couppant A F au point F, determine la ligne droite Y F, qui est l'vne de ces quatre proportionnelles; ou Y H N, qui couppant A H au point H, determine Y H l'vne des six, & ainsi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe A D est du second genre, & qu'on peut trouuer deux moyenes proportionelles par les sections coniques, qui sont du premier; & aussy pourcequ'on peut trouuer quatre ou six moyenes proportionelles, par des lignes qui ne sont pas de genres si composés, que sont A F, & A H, ce seroit vne faute en Geometrie que de les y employer. Et c'est vne faute aussy d'autre costé de se trauailler inutilement a vouloir construire quelque problesme par vn genre de lignes plus simple, que sa nature ne permet.

Or affin que ie puisse icy donner quelques reigles, pour euiter l'vne & l'autre de ces deux fautes, il faut que ie die quelque chose en general de la nature des Equations; c'est a dire des sommes composées de plusieurs termes partie connus, & partie inconnus, dont les vns sont esgaux aux autres, ou plutost qui considerés tous ensemble sont esgaux a rien. car ce sera souuent le meilleur de les considerer en cete sorte.

De la nature des Equatiōs.

Scachés

Combien il peut y auoir de racines en chaſq; Equatiõ.

Scachés donc qu'en chaſque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimenſions, autant peut il y auoir de diuerſes racines, c'eſt a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple ſi on ſuppoſe x eſgale a 2; oubien $x - 2$ eſgal a rien ; & derechef $x \infty 3$; oubien $x - 3 \infty 0$; en multipliant ces deux equatiòns $x - 2 \infty 0$, & $x - 3 \infty 0$, l'vne par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 \infty 0$, oubien $xx \infty 5x - 6$, qui eſt vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout enſemble vaut 3. Que ſi derechef on fait $x - 4 \infty 0$, & qu'on multiplie cete ſomme par $xx - 5x + 6 \infty 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, qui eſt vne autre Equation en laquelle x ayant trois dimenſions a auſſy trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Quelles ſont les fauſſes racines.

Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on ſuppoſe que x deſigne auſſy le defaut d'vne quantité, qui ſoit 5, on a $x + 5 \infty 0$, qui eſtant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui eſt 5.

Cõment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'vne Equation lorſqu'on connoiſt quelqu'vne de ſes racines.

Et on voit euidemment de cecy, que la ſomme d'vne equation, qui contient pluſieurs racines, peut touſiours eſtre diuiſée par vn binóme composé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce ſoit; ou plus la valeur de l'vne des fauſſés. Au moyen de quoy on diminue d'autant ſes dimenſions.

Et reciproquement que ſi la ſomme d'vne equation ne ne peut estre diuisée par vn binóme composé de la quantité inconnue + ou -- quelque autre quantité, cela tesmoigne que cete autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cete derniere

Cõment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'vne racine.

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

peut bien estre diuisée, par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par $x +$ ou -- aucune autre quantité. cequi monstre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

On connoist aussy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fausses en chasque Equation. A sçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les signes + & -- s'y trouuent de fois estre changés; & autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes +, ou deux signes -- qui s'entresuiuent. Comme en la derniere, a cause qu'aprés $+ x^4$ il y a $- 4x^3$, qui est vn changement du signe + en --, & aprés $- 19xx$ il y a $+ 106x$, & aprés $+ 106x$ il y a $- 120$ qui sont encore deux autres changemens, on connoist qu'il y a trois vrayes racines; & vne fausse, a cause que les deux signes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entresuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chasque Equatiõ.

De plus il est aysé de faire en vne mesme Equation, que toutes les racines qui estoient fausses deuienent vrayes, & par mesme moyen que toutes celles qui estoiẽt vrayes deuienent fausses: a sçauoir en changeant tous les signes + ou -- qui sont en la seconde, en la quatriesme, en la sixiesme, ou autres places qui se designent par les nombres pairs, sans changer ceux de la premiere, de la troisiesme, de la cinquiesme & semblables qui se designent par les nombres impairs.

Cõment on fait que les fausses racines d'vne Equation deuienẽt vrayes, & les vrayes fausses.

impairs. Comme ſi au lieu de

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

on eſcrit

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$$

on a vne Equation en laquelle il n'y a qu'vne vraye racine, qui eſt 5, & trois fauſſes qui ſont 2, 3, & 4.

Cõment on peut augmenter ou diminuer les racines d'vne Equation, ſans les connoiſtre.

Que ſi ſans connoiſtre la valeur des racines d'vne Equation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connuë, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer vn autre, qui ſoit plus ou moins grand de cete meſme quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier.

Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cete Equation

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$$

il faut prendre y au lieu d'x, & penſer que cete quantité y eſt plus grande qu'x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt eſgal a x, & au lieu d'xx, il faut mettre le quarré d'$y - 3$ qui eſt $yy - 6y + 9$ & au lieu d'x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9yy + 27y - 27$, & enfin au lieu d'x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$. Et ainſi deſcriuant la ſomme precedente en ſubſtituant par tout y au lieu d'x on a

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
 & - 19yy & + 114y & - 171 \\
 & & - 106y & + 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
y^4 - 8y^3 & - 1yy & + 8y^* & & \infty 0
\end{array}$$

oubien

oubien $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$.
où la vraye racine qui estoit 5 est maintenant 8, a cause du nombre trois qui luy est aiousté.

Que si on veut au contraire diminuer de trois la racine de cete mesme Equation, il faut faire $y + 3 \propto x$ & $yy + 6y + 9 \propto xx$. & ainsi des autres de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

on met

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\
 & - 19yy & - 114y & - 171 \\
 & & - 106y & - 318 \\
 & & & - 120 \\
\hline
\end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0.$$

Qu'en augmentant les vrayes racines on diminue les fausses, & au contraire.

Et il est a remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'vne Equation, on diminue les fausses de la mesme quantité; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fausses. Et que si on diminue soit les vnes soit les autres, d'vne quantité qui leur soit esgale, elles deuienent nulles, & que si c'est d'vne quantité qui les surpasse, de vrayes elles deuienent fausses, ou de fausses vrayes. Comme icy en augmentant de 3 la vraye racine qui estoit 5, on a diminué de 3 chascune des fausses, en sorte que celle qui estoit 4 n'est plus qu' 1, & celle qui estoit 3 est nulle, & celle qui estoit 2 est deuenue vraye & est 1, a cause que $-2 + 3$ fait $+1$. c'est pourquoy en cete Equation $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$ il ny a plus que 3 racines, entre lesquelles il y en a deux qui sont vrayes, 1, & 8, & vne fauſſe qui eſt auſſy 1. & en cete autre

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$$

il n'y en a qu'vne vraye qui eſt 2, a cauſe que $+5 - 3$ fait $+2$, & trois fauſſes qui ſont 5, 6, & 7.

Cõment on peut oſter le ſecond terme d'vne Equation.

Or par cete façon de changer la valeur des racines ſans les connoiſtre, on peut faire deux choſes, qui auront cy aprés quelque vſage: la premiere eſt qu'on peut touſiours oſter le ſecond terme de l'Equation qu'on examine, a ſçauoir en diminuant les vrayes racines, de la quantité connuë de ce ſecond terme diuiſée par le nombre des dimenſions du premier, ſi l'vn de ces deux termes eſtant marqué du ſigne +, l'autre eſt marqué du ſigne −; oubien en l'augmentant de la meſme quantité, s'ils ont tous deux le ſigne +, ou tous deux le ſigne −. Comme pour oſter le ſecond terme de la derniere Equatiõ qui eſt

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$$

ayant diuiſé 16 par 4, a cauſe des 4 dimenſions du terme y^4, il vient derechef 4, c'eſt pourquoy ie fais $z - 4 \propto y$, & i'eſcris

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 - 16z^3 & + 96zz & - 256z & + 256 \\
+ 16z^3 & - 192zz & + 768z & - 1024 \\
 & + 71zz & - 568z & + 1136 \\
 & & - 4z & + 16 \\
 & & & - 420 \\
\hline
z^4 \quad * & - 25zz & - 60z & - 36 \propto 0.
\end{array}$$

ou la vraye racine qui eſtoit 2, eſt 6, a cauſe qu'elle eſt augmentée de 4; & les fauſſes qui eſtoient 5, 6, & 7, ne ſont plus que 1, 2, & 3, a cauſe qu'elles ſont diminuées chaſcune de 4.

Tout

Tout de mesme si on veut oster le second terme de

$$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\ -cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0,$$

pourceque diuisant $2\,a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}\,a$; il faut faire $z + \frac{1}{2}a \propto x$ & escrire

$$\begin{array}{llllll}
z^4 & + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 & \\
 & - 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 & \\
 & & + 2aazz & + 2a^3 & + \frac{1}{2}a^4 & \\
 & & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc & \\
 & & & - 2a^3 & - a^4 & \\
 & & & & + a^4 & \\
\hline
z^4 & * & + \frac{1}{2}aa\ zz & - a^3\ z & + \frac{5}{16}a^4 & \propto 0 \\
 & & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc &
\end{array}$$

& si on trouue aprés la valeur de z, en luy adioustant $\frac{1}{2}\,a$ on aura celle de x.

La seconde chose, qui aura cy aprés quelque vsage, est, qu'on peut tousiours en augmentant la valeur des vrayes racines, d'vne quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deuienent toutes vrayes, en sorte qu'il n'y ait point deux signes $+$, ou deux signes $-$ qui s'entresuiuent, & outre cela que la quantité connuë du troisiesme terme soit plus grande, que le quarré de la moitié de celle du second. Car encore que cela se face, lorsque ces fausses racines sont inconnuës, il est aysé neanmoins de iuger a peu pré de leur grandeur, & de prendre vne quantité, qui les surpasse d'autant, ou de plus, qu'il n'est requis a cet effect. Comme si on a

Cõment on peut faire que toutes les fausses racines d'vne Equation deuienẽt vrayes, sans que les vrayes deuienẽt fausses.

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \propto 0.$$

en faisant $y - 6n \propto x$, on trouuera

$$\begin{array}{llllll}
\left.\begin{array}{l} y^6 - 36n \\ \quad + n \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l} y^5 + 540nn \\ \quad - 30nn \\ \quad - 6nn \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l} y^4 - 4320n^3 \\ \quad + 360n^3 \\ \quad + 144n^3 \\ \quad + 36n^3 \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l} y^3 + 19440n^4 \\ \quad - 2160n^4 \\ \quad - 1296n^4 \\ \quad - 648n^4 \\ \quad - 216n^4 \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l} yy - 46656n^5 \\ \quad + 6480n^5 \\ \quad + 5184n^5 \\ \quad + 3888n^5 \\ \quad + 2592n^5 \\ \quad + 1296n^5 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} y + 46656n^6 \\ \quad - 7776n^6 \\ \quad - 7776n^6 \\ \quad - 7776n^6 \\ \quad - 7776n^6 \\ \quad - 7776n^6 \end{array}
\end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y \ * \propto 0.$$

Ou il est manifeste, que $504nn$, qui est la quantité connuë du troisiesme terme est plus grande, que le quarré de $\frac{35}{2}n$, qui est la moitié de celle du second. Et il n'y a point de cas, pour lequel la quantité, dont on augmente les vrayes racines, ait besoin a cet effect, d'estre plus grande, a proportion de celles qui sont données, que pour cetuy cy.

Cõment on fait que toutes les places d'vne Equation soient remplies.

Mais a cause que le dernier terme s'y trouue nul, si on ne desire pas que cela soit, il faut encore augmenter tant soit peu la valeur des racines ; Et ce ne sçauroit estre de si peu, que ce ne soit assés pour cet effect. Non plus que lorsqu'on veut accroistre le nombre des dimensions de quelque Equation, & faire que toutes les places de ses termes soient remplies. Comme si au lieu de $x^5 * * * * - 6 \propto 0$, on veut auoir vne Equation, en laquelle la quantité inconnue ait six dimensions, & dont aucun des termes ne soit nul, il faut premierement pour

$x^5 \ * \ * \ * \ * - b \propto 0$ escrire
$x^6 \ * \ * \ * \ * - bx \ * \propto 0$

puis ayant fait $y - a \propto x$, on aura

$$\begin{array}{l} y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a^5y + a^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - by + ab \propto 0 \end{array}$$

Qu il est manifeste que tant petite que la quantité a soit supposée ſuppoſee toutes les places de l'Equation ne laiſſent pas d'eſtre remplies.

Commẽt on peut multiplier ou diuiſer les racines ſans les connoiſtre.

De plus on peut, ſans connoiſtre la valeür des vrayes racines d'vne Equation, les multiplier, ou diuiſer toutes, par telle quantité connuë qu on veut. Cequi ſe fait en ſuppoſant que la quantité inconnuë eſtant multipliée, ou diuiſée, par celle qui doit multiplier, ou diuiſer les racines, eſt eſgale a quelque autre. Puis multipliant, ou diuiſant la quantité connuë du ſecond terme, par cete meſme qui doit multiplier, ou diuiſer les racines; & par ſon quarré, celle du troiſieſme; & par ſon cube, celle du quatrieſme; & ainſi iuſques au dernier. Ce qui peut ſeruir pour reduire a des nombres entiers & rationaux, les fractions, ou ſouuent auſſy les nombres ſours, qui ſe trouuent dans les termes des Equations. Comme ſi on a

Cõment on reduiſt les nombres rompus d'vne Equation a des entiers.

$$x^3 - \sqrt{3}\; xx + \tfrac{26}{27}x - \tfrac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& qu'on veuille en auoir vne autre en ſa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux; il faut ſuppoſer $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connuë du ſecond terme, qui eſt auſſy $\sqrt{3}$, & par ſon quarré qui eſt 3 celle du troiſieſme qui eſt $\frac{26}{27}$, & par ſon cube qui eſt $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui eſt $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \tfrac{26}{9}\, y - \tfrac{8}{9} \infty 0$$

Puis ſi on en veut auoir encore vne autre en la place de celle cy, dont les quantites connuës ne s'expriment que par des nombres entiers; il faut ſuppoſer $z \infty 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27 on trouue

$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0$, où les racines eſtant 2, 3, & 4, on connoiſt de là que celles de l'autre d'auparauant

eſtoient

estoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere estoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Cõment on rend la quantité connuë de l'vn des termes d'vne Equation esgale a telle autre qu'on veut.

Cete operation peut aussy seruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'Equatiõ esgale a quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 \;*\; -bbx + c^3 \infty 0$$

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë, du terme qui occupe la troisiesme place, a sçauoir celle qui est icy bb, soit $3aa$, il faut supposer $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis escrire $y^3 \;*\; -3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.

Que les racines, tant vrayes que fausses peuuent estre reelles ou imaginaires.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La reduction des Equatiõs cubiques lorsque le problesme est plan.

Or quand pour trouuer la construction de quelque problesme, on vient a vne Equation, en laquelle la quantité inconnuë a trois dimensions; premierement si les quantités connuës, qui y sont, contienent quelques nombres rompus, il les faut reduire a d'autres entiers, par la multiplication tantost expliquée; Et s'ils en contienent de sours, il faut aussy les reduire a d'autres rationaux, autant qu'il sera possible, tant par cete mesme multiplication,

tiplication, que par diuers autres moyens, qui sont assés faciles a trouuer. Puis examinant par ordre toutes les quantités, qui peuuent diuiser sans fraction le dernier terme, il faut voir, si quelqu'vne d'elles, iointe auec la quantité inconnuë par le signe $+$ ou $-$, peut composer vn binome, qui diuise toute la somme; & si cela est le Problesme est plan, c'est a dire il peut estre construit auec la reigle & de compas; Car oubien la quantité connuë de ce binosme est la racine cherchée; oubien l'Equation estant diuisée par luy, se reduist a deux dimensions, en sorte qu'on en peut trouuer aprés la racine, par ce qui a esté dit au premier liure.

Par exemple si on a

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \propto 0.$$

le dernier terme, qui est 64, peut estre diuisé sans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; C'est pourquoy il faut examiner par ordre si cete Equation ne peut point estre diuisée par quelqu'vn des binomes, $yy - 1$ ou $yy + 1$, $yy - 2$ ou $yy + 2$, $yy - 4$ &c. & on trouue qu'elle peut l'estre par $yy - 16$, en cete sorte.

$$\begin{array}{llllll}
+ & y^6 & - 8y^4 & - 124yy & - 64 & \propto 0 \\
- & 1y^6 & \underline{- 8y^4} & \underline{- 4yy} & --- & \\
 & & & & -16 & \\
0 & - & \underline{16}y^4 & - \underline{128}yy & & \\
 & & 16 & 16 & & \\
\hline
+ & & y^4 & + 8yy & + 4 & \propto 0.
\end{array}$$

Ie commence par le dernier terme, & diuise -64 par -16, ce qui fait $+4$, que i'escris dans le quotient, puis ie multiplie $+4$ par $+yy$, ce qui fait $+4yy$; c'est pourquoy i'escris $-4yy$ en la somme, qu'il faut diuiser. car il y faut

La facon de diuiser vne Equation par vn binome qui contiêt sa racine.

faut tousiours escrire le signe $+$ ou $-$ tout contraire a celuy que produist la multiplication. & ioignant $-124yy$ auec $-4yy$, iay $-128yy$, que ie diuise derechef par -16, & iay $+8yy$, pour mettre dans le quotient & en le multipliant par yy, iay $-8y^4$, pour ioindre auec le terme qu'il faut diuiser, qui est aussy $-8y^4$, & ces deux ensemble font $-16y^4$, que ie diuise par -16, ce qui fait $+1y^4$ pour le quotient, & $-1y^6$ pour ioindre auec $+1y^6$, cequi fait 0, & monstre que la diuision est acheuée. Mais s'il estoit resté quelque quantité, oubien qu'on n'eust pû diuiser sans fraction quelqu'vn des termes precedens, on eust par la reconnu, quelle ne pouuoit estre faite.

Tout de mesme si on a $y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0.$

le dernier terme se peut diuiser sans fraction par a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & semblables. Mais il n'y en a que deux qu'on ait besoin de considerer, a sçauoir aa & $aa+cc$; car les autres donnant plus ou moins de dimensions dans le quotient, qu'il n'y en a en la quantité connuë du penultiesme terme, empescheroient que la diuision ne s'y pûst faire. Et notés, que ie ne conte icy les dimensions d'y^6, que pour trois, a cause qu'il ny a point d'y^5, ny d'y^3, ny d'y en toute la somme. Or en examinant le binóme $yy-aa-cc \propto 0$, on trouue que la diuision se peut faire par luy en cete sorte.

$$
\begin{array}{llll}
+y^6 & \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 & \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy & \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0, \\
\hline
\dfrac{-y^6}{0} & \dfrac{\begin{smallmatrix}-2aa\\+cc\end{smallmatrix}}{-aacc} & \dfrac{\begin{smallmatrix}-a^4\\-aacc\end{smallmatrix}}{-aa-cc} & \dfrac{\quad}{-aa-cc} \\
\hline
 & +y^4 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} yy & \begin{smallmatrix}+a^4\\+aacc\end{smallmatrix} & \propto 0.
\end{array}
$$

Ce-

Ce qui monſtre que la racine cherchée eſt $aa + cc$. Et la preuue en eſt ayſée a faire par la multiplication.

Quels probleſmes ſont ſolides, lorſque l'Equation eſt cubique

Mais lorſqu'on ne trouue aucun binóme, qui puiſſe ainſi diuiſer toute la ſomme de l'Equation propoſee, il eſt certain que le Probleſme qui en depend eſt ſolide. Et ce n'eſt pas vne moindre faute aprés cela, de taſcher a le conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce ſeroit d employer des ſections coniques a conſtruire ceux auſquels on n'a beſoin que de cercles. car enfin tout ce qui teſmoigne quelque ignorance s'appele faute.

La reduction des Equations qui ont quatre dimenſions, lorſque le probleſme eſt plan. Et quels ſonr ceux qui ſont ſolides.

Que ſi on a vne Equation dont la quantité inconnuë ait quatre dimenſions, il faut en meſme façon, aprés en auoir oſté les nombres ſours, & rompus, s'il y en a, voir ſi on pourra trouuer quelque binóme, qui diuiſe toute la ſomme, en le compoſant de l'vne des quantités, qui diuiſent ſans fraction le dernier terme. Et ſi on en trouue vn, oubien la quantité connuë de ce binóme eſt la racine cherchée; on du moins aprés cete diuiſion, il ne reſte en l'Equation, que trois dimenſions, en ſuite dequoy il faut derechef l'examiner en la meſme ſorte. Mais lorſqu'il ne ſe trouue point de tel binóme, il faut en augmentant, ou diminuant la valeur de la racine, oſter le ſecond terme de la ſomme, en la façon tantoſt expliquée. Et aprés la reduire a vne autre, qui ne contiene que trois dimenſions. Ce qui ſe fait en cete ſorte.

Au lieu de $+ x^4 \ * \ . pxx \ . qx \ . r \ \infty \ 0$,

il faut eſcrire $+ y^6 . 2py^4 \begin{smallmatrix} + pp \\ - 4r \end{smallmatrix} yy - qq \ \infty \ 0$.

Et pour les ſignes + ou — que iay omis, s'il y a en eu $+p$ en la precedente Equation, il faut mettre en cellecy $+2p$, ou s'il y a eu $-p$, il faut mettre $-2p$. & au contraire s'il y a eu $+r$, il faut mettre $-4r$, ou s'il y a eu $-r$, il faut mettre $+4r$. & soit qu'il y ait eu $+q$, ou $-q$, il faut tousiours mettre $-qq$, & $+pp$. au moins si on suppose que x^4, & y^6 sont marqués du signes $+$, car ce seroit tout le contraire si on y supposoit le signe $-$.

Par exemple si on a $+x^4 * -4xx - 8x + 35 \propto 0$ il faut escrire en son lieu $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$. car la quantité que iay, nommée p estant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$. & celle, que iay nommée r estant 35, il faut mettre $\begin{smallmatrix}+16\\-140\end{smallmatrix}yy$, c'est a dire $-124yy$, au lieu de $\begin{smallmatrix}+pp\\-4r\end{smallmatrix}yy$. & enfin q estant 8, il faut mettre -64, pour $-qq$. Toutdemesme au lieu de $+x^4 * -17xx - 20x - 6 \propto 0$. il faut escrire $+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$. Car 34 est double de 17, & 313 en est le quarré ioint au quadruple de 6, & 400 est le quarré de 20.

Tout de mesme aussy au lieu de

$$+z^4 * \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{smallmatrix}zz \begin{smallmatrix}-a^3\\-acc\end{smallmatrix}z \begin{smallmatrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix} \propto 0,$$

Il faut escrire

$$y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0.$$

Car p est $+\frac{1}{2}aa - cc$, & pp, est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$, & enfin $-qq$ est $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

Aprés que l'Equation est ainsi reduite a trois dimensions, il faut chercher la valeur d'yy par la methode desia expliquée; Et si celle ne peut estre trouuée, on n'a point

besoin

besoin de passer outre; car il suit de là infalliblement, que le problesme est solide. Mais si on la trouue, on peut diuiser par son moyen la precedente Equation en deux antres, en chascune desquelles la quantité inconnuë n aura que deux dimensions, & dont les racines seront les mesmes que les sienes. A sçauoir, au lieu de

$$+x^4 * . pxx . qx . r \propto 0,$$

il faut escrire ces deux autres

$$+xx - yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0, \&$$

$$+xx + yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0.$$

Et pour les signes + & -- que iay omis, s'il y a $+p$ en l'Equation precedente, il faut mettre $+\frac{1}{2}p$ en chascune de celles cy; & $-\frac{1}{2}p$, s'il y a en l'autre $-p$. Mais il faut mettre $+\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $+yx$, lorsqu'il y a $+q$ en la premiere. Et au contraire s'il y a $-q$, il faut mettre $-\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$, en celle où il y a $+yx$. En suite dequoy il est aysé de connoistre toutes les racines de l'Equation proposée, & par consequent de construire le problesme, dont elle contient la solution, sans y employer que des cercles, & des lignes droites.

Par exemple a cause que faisant

$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$, pour

$x_4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$, on trouue que yy est 16, on doii au lieu de cete Equation

$+x^4 * - 17xx - 20x - 20x - 6 \propto 0$, escrire ces deux

autres

autres $+xx - 4x - 3 \infty 0$. Et $+xx + 4x + 2 \infty 0$. car y eſt 4, $\frac{1}{2}yy$ eſt 8, p eſt 17, & q eſt 20, de façonque $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait -3, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait $+2$. Et tirant les racines de ces deux Equations, on trouue toutes les meſmes, que ſi on les tiroit de celle où eſt x^4, a ſçauoir on en trouue vne vraye, qui eſt $\sqrt{7} + 2$, & trois fauſſes, qui ſont $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$. Ainſi ayant $x^4 - 4xx - 8x + 35 \infty 0$, pourceque la racine de $y^6 - 8y^4 - 124yy + 64 \infty 0$, eſt derechef 16, il faut eſcrire

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \ \& \ xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Car icy $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait 7. Et pourcequ'on ne trouue aucune racine, ny vraye, ny fauſſe, en ces deux dernieres Equations, on connoiſt de là que les quatre de l'Equation dont elles procedent ſont imaginaires; & que le Probleſme, pour lequel on l'a trouuée, eſt plan de ſa nature; mais qu'il ne ſçauroit en aucune façon eſtre conſtruit, a cauſe que les quantités données ne peuuent ſe ioindre.

Tout de meſme ayant

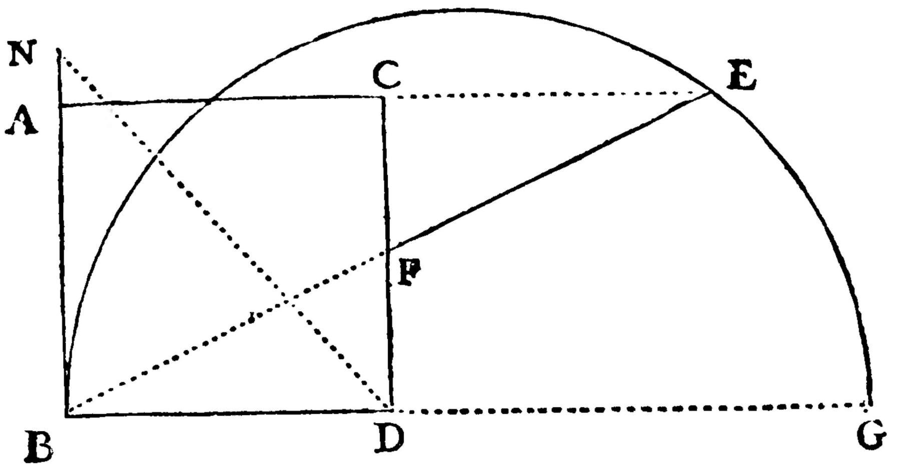
$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} \Big\} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} \Big\} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0,$$

pourcequ'on trouue $aa + cc$ pour yy, il faut eſcrire

$$zz - \sqrt{aa+cc}\, z + \tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \ \&$$
$$zz + \sqrt{aa+cc}\, z + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Car y eſt $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ eſt $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ eſt $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. D'où on connoiſt que la valeur de z eſt

eſt $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
oubien $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.
Et pourceque nous auions fait cy deſſus $z+\frac{1}{2}a \propto x$, nous apprenons que la quantité x, pour la connoiſſance de laquelle nous auons fait toutes ces operations, eſt $+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.



Mais affin qu'on puiſſe mieux connoiſtre l'vtilité de cete reigle il faut que ie l'applique a quelq; Probleſme. Exemple de l'vſage de ces reductions.

Si le quarré A D, & la ligne B N eſtant donnés, il faut prolonger le coſté A C iuſques a E, en ſorte qu'E F, tirée d'E vers B, ſoit eſgale a N B. On apprent de Pappus, qu'ayant premierement prolongé B D iuſques à G, en ſorte que D G ſoit eſgale à D N, & ayant deſcrit vn cercle dont le diametre ſoit B G, ſi on prolonge la ligne droite A C, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne ſçauroiet point cete cōſtruction elle ſeroit aſſés difficile à rencōtrer, & en la cherchāt par la methode icy propoſée, ils ne s'auiſeroiēt iamais de prēdre D G pour la quātité inconnuë, mais plutoſt C F, ou F D, a cauſe que ce ſont

sont elles qui conduisent le plus aysement a l'Equatiõ: & lors ils en trouueroiēt vne qui ne seroit pas facile a demesler, sans la reigle que ie viens d'expliquer. Car posant a pour B D ou C D, & c pour E F, & x pour D F, on a C F $\infty\ a - x$, & cõme C F ou $a - x$, est à F E ou c, ainsi F D ou x, est a B F, qui par consequent est $\frac{cx}{a - x}$. Puis a cause du triangle rectangle B D F, dont les costés sont l'vn x & l'autre a, leurs quarrés, qui sont $xx + aa$, sont esgaux a celuy de la baze, qui est $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$, de façon que multipliant le tout par $xx - 2ax + aa$, on trouue que l'Equation est $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty\ ccxx$, oubien $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix}\, xx - 2a^3x + a^4 \infty\ 0$. Et on connoist par les reigles precedentes, que sa racine, qui est la longeur de la ligne D F, est $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

Que si on posoit B F, ou C E, ou B E pour la quantité inconnuë, on viendroit derechef à vne Equation, en laquelle il y auroit 4 dimensions, mais qui seroit plus aysée a démesler, & on y viendroit assés aysement; au lieu que si c'estoit D G qu'on supposast, on viendroit beaucoup plus difficilement a l'Equation, mais aussy elle seroit tres simple. Ce que ie mets icy pour vous auertir, que lorsque le Problesme proposé n'est point solide, si en le cherchant par vn chemin on vient a vne Equation fort composee, on peut ordinairement venir a vne plus simple, en le cherchant par vn autre.

Ie pourrois encore aiouster diuerses reigles pour démesler les Equations, qui vont au Cube, ou au Quarre de de quarré, mais elles feroient fuperfluës; car lorfque les Problefmes font plans, on en peut toufiours trouuer la conftruction par celles cy.

Regle generale pour reduire les Equatiõs qui paffent le quarré de quarré.

Ie pourrois auffy en adioufter d autres pour les Equations qui montent iufques au furfolide, ou au Quarré de cube, ou au delà, mais i'ayme mieux les comprendre toutes en vne, & dire en general, que lorfqu'on a tafché de les reduire a mefme forme, que celles d'autant de dimenfions, qui vienent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, & qu'ayant dénombré tous les moyens, par lefquels cete multiplication eft poffible, la chofe n'a pû fucceder par aucun, on doit s'affurer qu'elles ne fçauroient eftre reduites a de plus fimples. En forte que fi la quantité inconnuë a 3 on 4 dimenfions, le Problefme pour lequel on la cherche eft folide; & fi elle en a 5, on 6, il eft d'vn degré plus compofé; & ainfi des autres.

Au refte i'ay omis icy les demonftrations de la plus part de ce que iay dit a caufe qu'elles m'ont femblé fi faciles, que pourvû que vous preniés la peine d'examiner methodiquement fi iay failly, elles fe prefenteront a vous d'elles mefme: & il fera plus vtile de les apprendre en cete façon, qu'en les lifant.

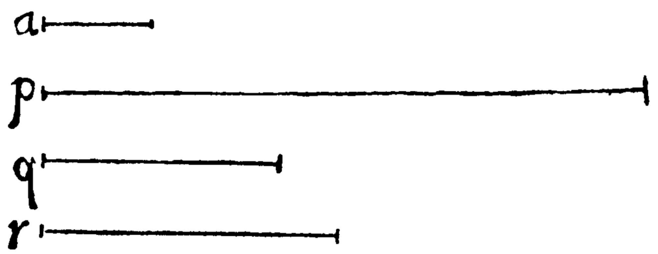
Facon generale pour conftruire tous les problefmes folides, reduits a vne Equatiõ de trois ou quatre dimenfions.

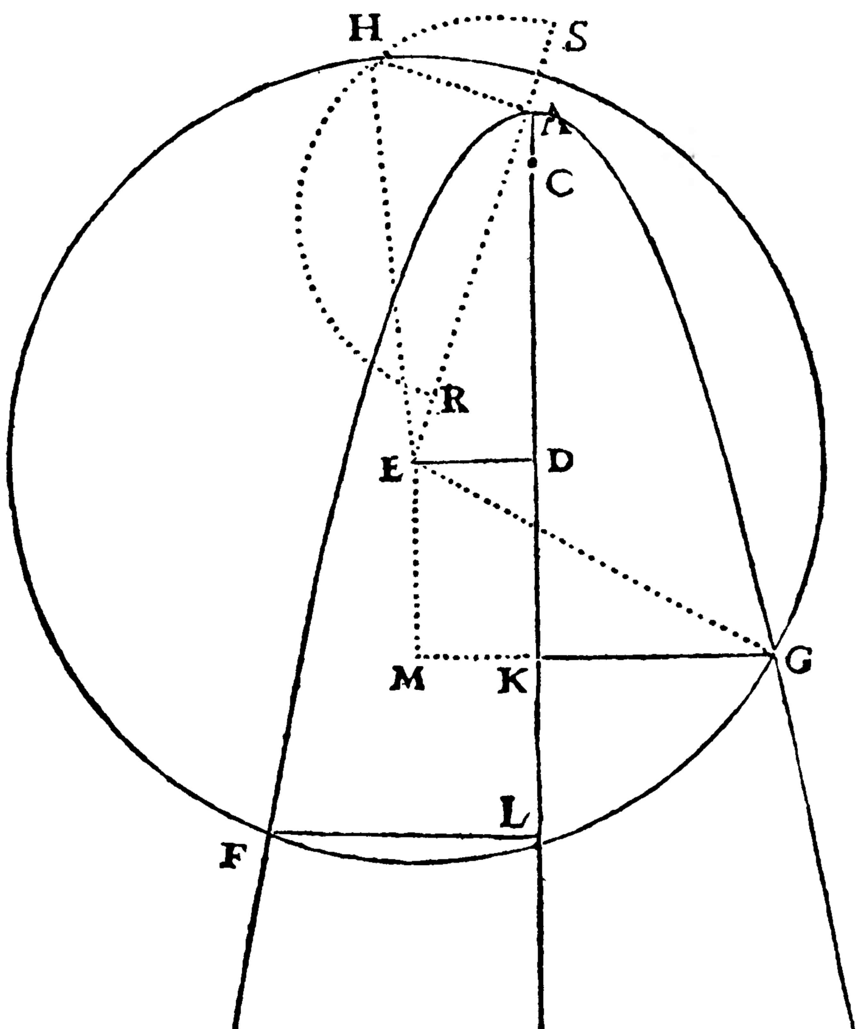
Or quand on eft affuré, que le Problefme propofé eft folide, foit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, foit qu elle ne monte que iufques au cube, on peut toufiours en trouuer la racine par l'vne des trois fections coniques, laquelle que ce foit ou mefme par quelque partie de l'vne d'elles, tant petite qu'elle puiffe eftre; en ne fe feruãt au refte que de lignes droites, & de cercles. Mais ie me contenteray icy de

donner

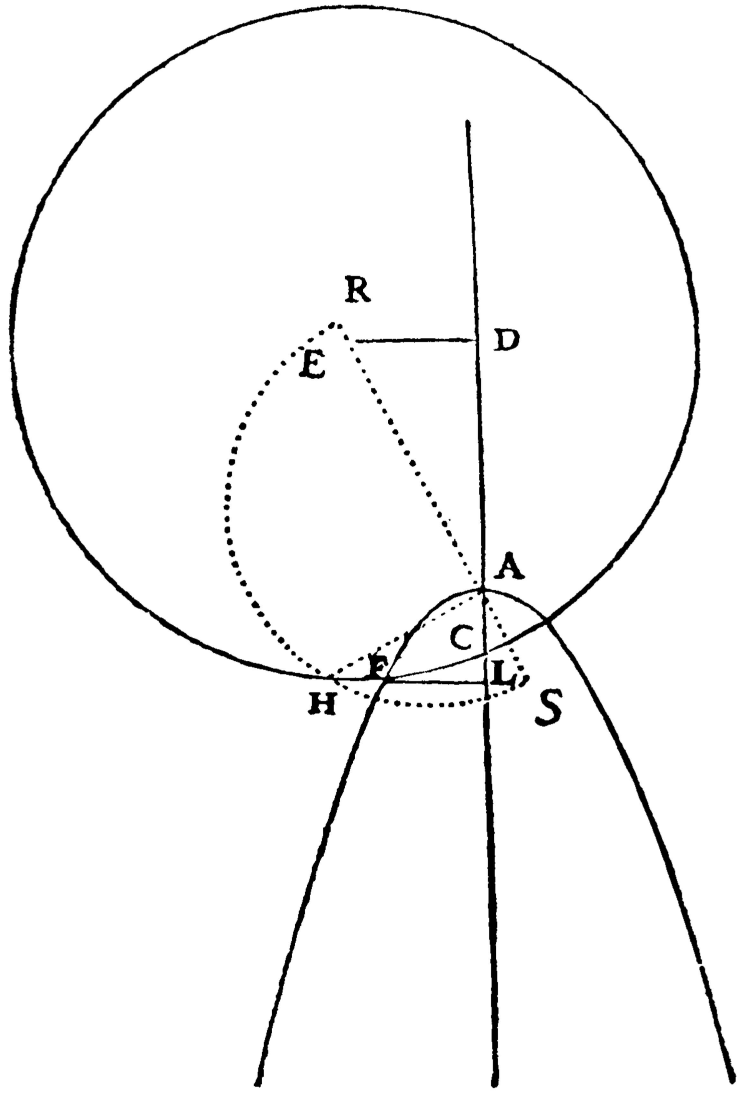
donner vne reigle generale pour les trouuer toutes par le moyen d'vne Parabole, a cause qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Premierement il faut oster le second terme de l'Equation proposée, s'il n'est desia nul, & ainsi la reduire à telle forme, $z^3 \infty * . apz . aaq$, si la quantité inconnuë n'a que trois dimensions; oubien à telle, $z^4 \infty * . apzz . aaqz . a^3r$, si elle en a quatre; oubien en prenant a pour l'vnité, à telle, $z^3 \infty * . pz . q$, & à telle
$z^4 \infty * . pzz . qz . r$.

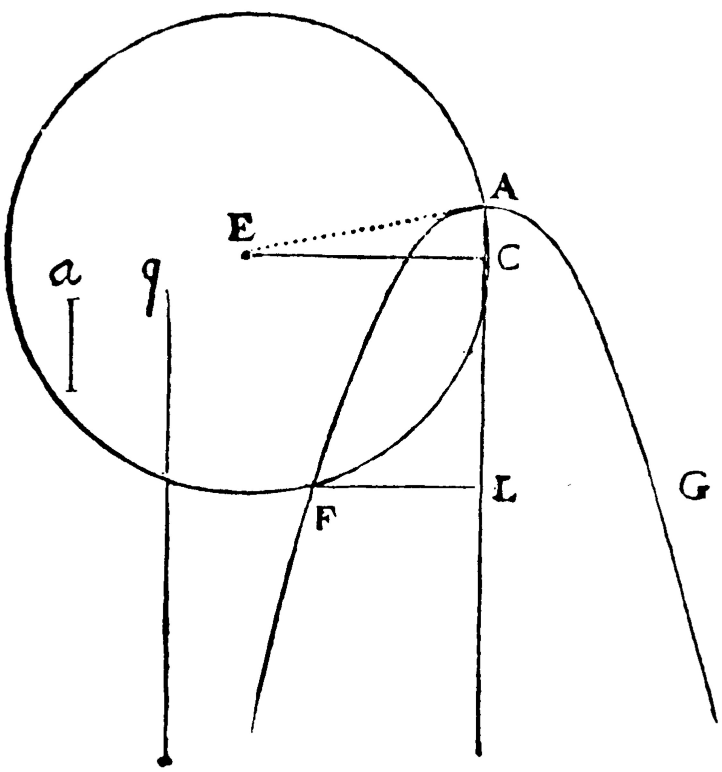




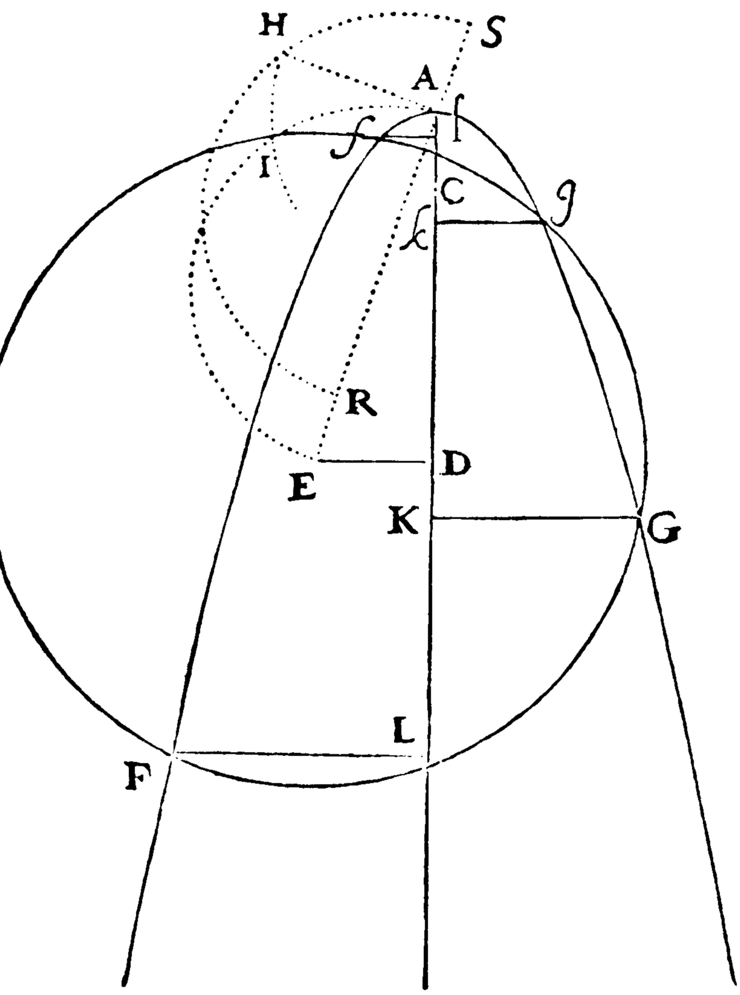
Aprés cela ſuppoſant que la Parabole F A G eſt deſia deſcrite, & que ſon aiſſieu eſt A C D K L, & que ſon coſté droit eſt a, ou 1, dont A C eſt la moitié, & enfin que le point C eſt au dedans de cete Parabole, & que A en eſt le ſommet; Il faut faire C D $\infty\ \frac{1}{2}p$, & la prendre du meſme coſté, qu'eſt le point A au regard du point C, s'il y a $+\,p$ en l'Equation; mais s'il y a $-\,p$ il faut la prendre de l'autre coſte. Et du point D, oubien, ſi la quantité



p eſtoit nulle, du point C il faut eſleuer vne ligne a angles droits iuſques a E, en ſorte qu'elle ſoit eſgale a $\frac{1}{2}q$. Et enfin du centre E il faut deſcrire le cercle F G, dont le



le demidiametre ſoit A E, ſi l'Equation n'eſt que cubique, en ſorte que la quantité r ſoit nulle. Mais quand il y a $+ r$ il faut dans cete ligne A E prolongée, prendre d'vn coſté A R eſgale à r, & de l'autre A S eſgale au coſté droit de la Parabole qui eſt 1, & ayant deſcrit vn cercle dont le diametre ſoit R S, il faut faire A H



perpẽdiculaire ſur A E, laquelle A H rencontre ce cercle R H S au point H, qui eſt celuy par où l'autre cercle F H G doit paſſer. Et quand il y a $-- r$ il faut aprés auoir ainſi trouué la ligne A H, inſcrire A I, qui luy ſoit eſgale, dans vn autre cercle, dont A E ſoit le diametre, & lors c'eſt par le point I,

que

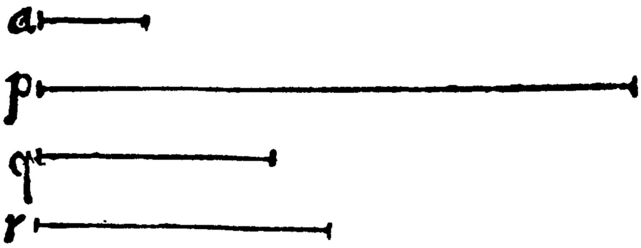
que doit passer F I G le premier cercle cherché. Or ce cercle F G peut coupper, ou toucher la Parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 poins, desquels tirant des perpendiculaires sur laissieu, on a toutes les racines de l'Equation tant vrayes, que fausses. A sçauoir si la quantité q est marquée du signe +, les vrayes racines seront celles de ces perpendiculaires, qui se trouueront du mesme costé de la parabole, que E le centre du cercle, comme F L; & les autres, comme G K, seront fausses: Mais au contraire si cete quantité q est marquée du signe -- les vrayes seront celles de l'autre costé; & les fausses, ou moindres que rien seront du costé ou est E le centre du cercle. Et enfin si ce cercle ne couppe, ny ne touche la Parabole en aucun point, cela tesmoigne qu'il n'y a aucune racine ny vraye ny fausse en l'Equation, & qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cete reigle est la plus generale, & la plus accomplie qu'il soit possible de souhaiter.

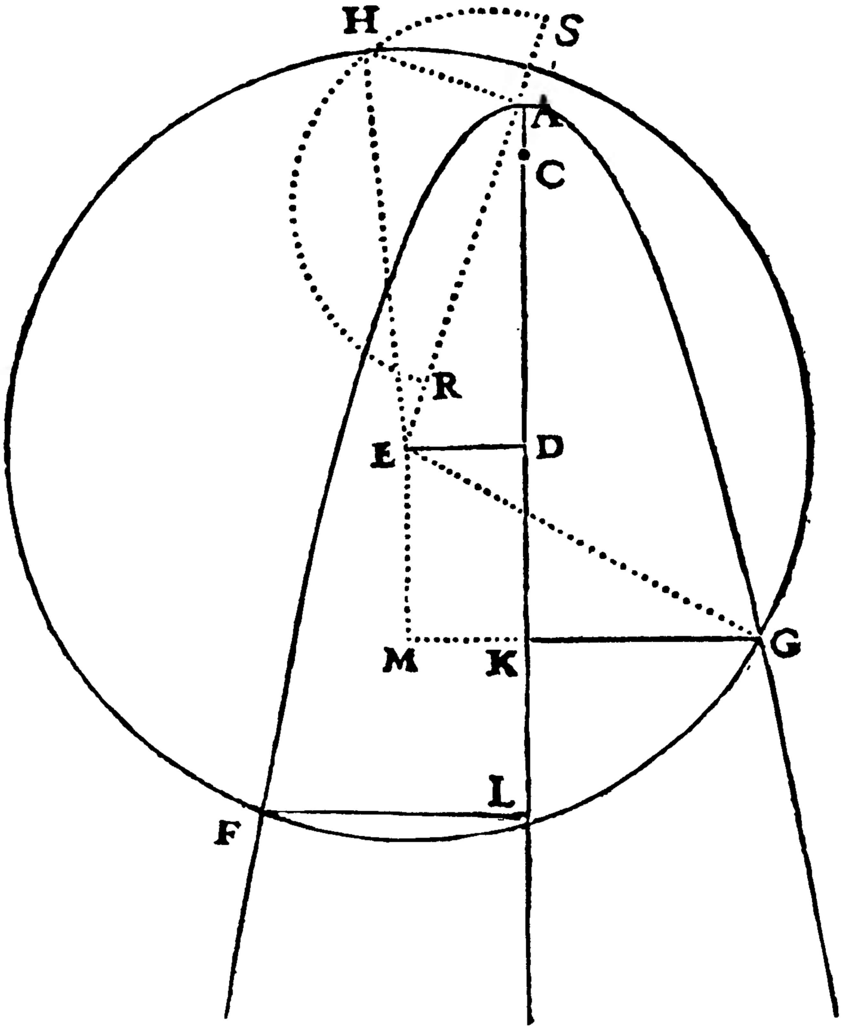
Et la demonstration en est fort aysée. Car si la ligne G K, trouuée par cete construction, se nomme z, A K sera zz, a cause de la Parabole, en laquelle G K doit estre moyene proportionelle, entre A K, & le costé droit qui est 1. puis si de A K i'oste A C, qui est $\frac{1}{2}$, & C D qui est $\frac{1}{2}p$, il reste D K, ou E M, qui est $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré est

$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. & a cause que D E, ou K M est $\frac{1}{2}q$, la toute G M est $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, & assemblant ces deux quarrés, on a

$z^4 - pz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$,

pour



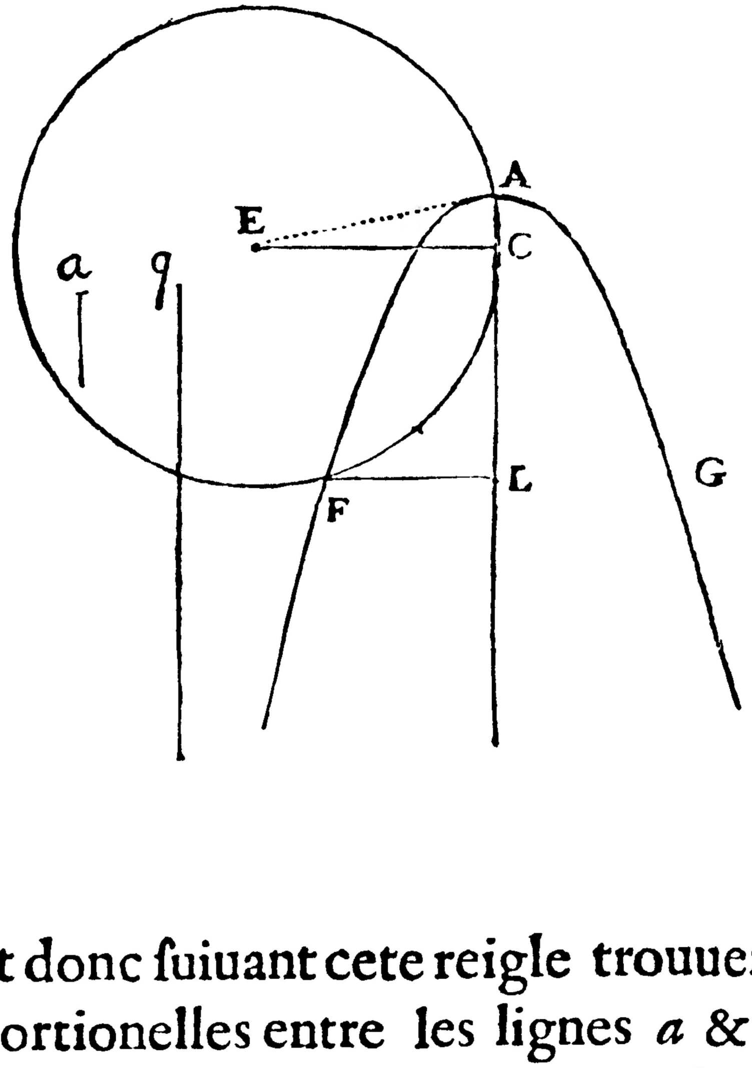


pour le quarré de la ligne G E, a cauſe qu'elle eſt la baze du triangle rectangle E M G.

Mais a cauſe que cete meſme ligne G E eſt le demi-diametre du cercle F G, elle ſe peut encore expliquer en d'autres termes, a ſçauoir E D eſtant $\frac{1}{2}q$, & A D eſtant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, E A eſt $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ a cauſe de l'angle droit A D E, puis H A eſtant moyene proportionelle entre A S qui eſt 1 & A R qui eſt r, elle eſt $\sqrt{r}$. & à cauſe de l'angle droit E A H, le quarré de H E, ou E G eſt $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: ſibienque il y a Equation

entre

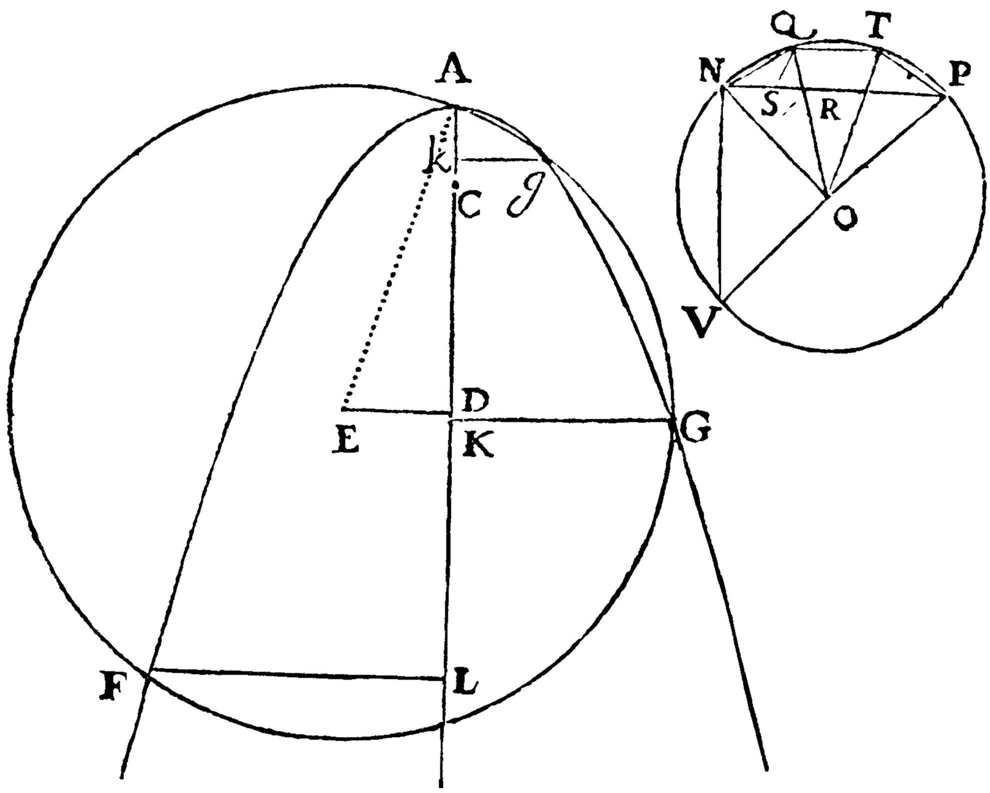
entre cete ſomme & la precedente. cequi eſt le meſme que $z^4 \infty * pzz - qz + r$. & par conſequent la ligne trouuee GK qui a eſté nommée z eſt la racine de cete Equation. ainſi qu'il falloit demonſtrer. Et ſi vous appliqués ce meſme calcul a tous les autres cas de cete reigle, en changeant les ſignes + & -- ſelon l'occaſion, vous y trouuerés voſtre conte en meſme ſorte, ſans qu'il ſoit beſoin que ie m'y areſte.



Si on veut donc ſuiuant cete reigle trouuer deux moyennes proportionelles entre les lignes a & q; chaſcun ſçait que poſant z pour l'vne, comme a eſt à z, ainſi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q & $\frac{z^3}{aa}$, c'eſt a dire, $z^3 \infty * * aaq$. Et la Parabole F A G eſtant de-

L'inuention de deux moyenes proportionelles.

descrite, auec la partie de son aissieu A C, qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du costé droit ; il faut du point C esleuer la perpendiculaire C E esgale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A, descriuant le cercle A F, on trouue F L, & L A, pour les deux moyennes cherchées.



La façon de diuiser vn angle en trois.

Tout de mesme si on veut diuiser l'angle N O P, oubien l'arc, ou portion de cercle N Q T P, en trois parties esgales; faisant N O ∞ 1, pour le rayon du cercle, & N P ∞ q, pour la subtendue de l'arc donné, & N Q ∞ z, pour la subtendue du tiers de cet arc ; l'Equation vient,

$z^3 \infty * 3z - - q$. Car ayant tiré les lignes N Q, O Q, O T ; & faisant Q S parallele a T O, on voit que comme N O est a N Q, ainsi N Q a Q R, & Q R a R S ; en sorte que

que N O estant 1, & N Q estant z, Q R est zz, & R S est z^3: Et a cause qu'il s'en faut seulement R S, ou z^3, que la ligne N P, qui est q, ne soit triple de N Q, qui est z, ou à $q \infty 3z - z^3$ oubien,

$$z^3 \infty * 3z - q.$$

Puis la Parabole F A G estant descrite, & C A la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prent C D $\infty \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire D E $\infty \frac{1}{2} q$, & que du centre E, par A, on descriue le cercle F A g G, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cete Equation, à sçauoir les deux G K, & $g\,k$, qui sont vrayes; & la troisiesme qui est fausse, á sçauoir F L. Et de ces deux vrayes c'est $g\,k$ la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne N Q qui estoit cherchée. Car l'autre G K, est esgale à N V, la subtendue de la troisiesme partie de l'arc N V P, qui auec l'autre arc N Q P acheue le cercle. Et la fausse F L est esgale a ces deux ensemble Q N & N V, ainsi qu'il est aysé a voir par le calcul.

Il seroit superflus que ie m'arestasse a donner icy d'autres exemples; car tous les Problesmes qui ne sont que solides se peuuent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cete reigle pour les construire, sinon entant qu'elle sert a trouuer deux moyennes proportionelles, oubien a diuiser vn angle en trois parties esgales. Ainsi que vous connoistrés en considerant, que leurs difficultés peuuent tousiours estre comprises en des Equations, qui ne montent que iusque au quarré de quarré, ou au cube: Et que toutes celles qui montent au quarré de quarré, se reduisent au quarré, par le moyen de quelques autres, qui ne montent

Que tous les problesmes solides se peuüent reduire a ces deux constructions.

montent que iusques au cube: Et enfin qu'on peut oster le second terme de celles cy. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse reduire a quelq; vne de ces trois formes.

$$z^3 \propto * - pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz - q.$$

Or si on a $z^3 \propto * - pz + q$, la reigle dont Cardan attribue l'inuention a vn nommé Scipio Ferreus, nous apprent que la racine est,

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

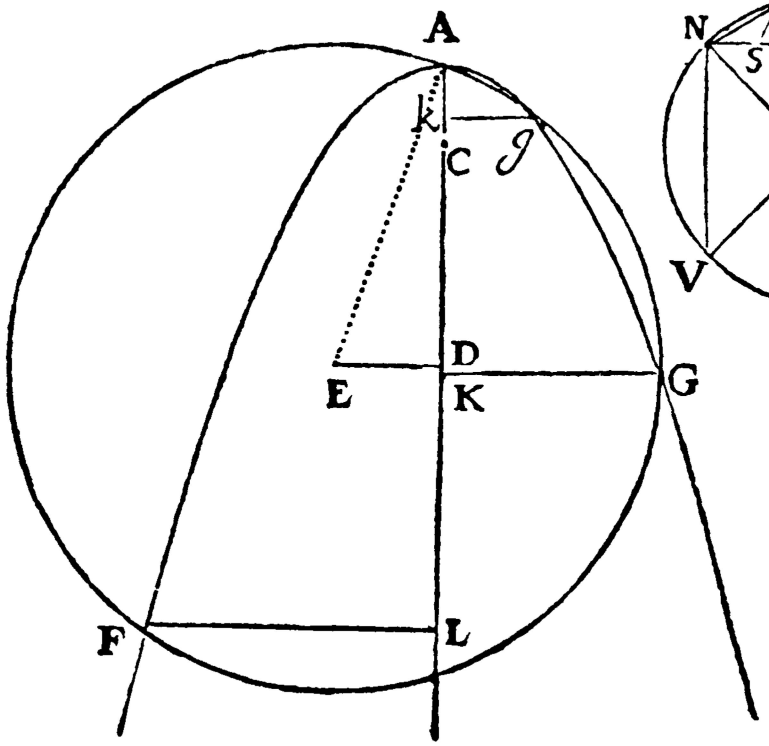
Comme aussy lorsqu'on a $z^3 \propto * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiesme, vne pareille reigle nous apprent que la racine est,

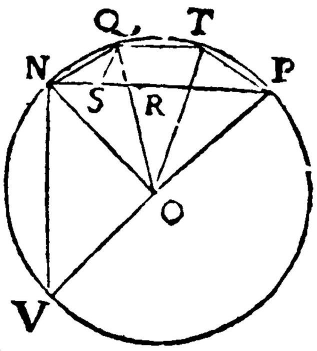
$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.+\tfrac{1}{4}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

D'où il paroist qu'on peut construire tous les Problesmes, dont les difficultés se reduisent a l'vne de ces deux formes, sans auoir besoin des sections coniques pour autre chose, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantités données, c'est a dire, pour trouuer deux moyennes proportionelles entre ces quantités & l'vnité.

Puis si on a $z^3 \propto * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme ne soit point plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiesme, en supposant le cercle N Q P V, dont le demidiametre NO soit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, c'est a dire la moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p & l'vnité; & supposant aussy la ligne N P inscrite dans ce cercle qui soit $\frac{3q}{p}$

c'est





c'eſt a dire qui ſoit à l'autre quantité donnée q comme l'vnité eſt au tiers de p; il ne faut que diuiſer chaſcun des deux arcs N Q P & N V P en trois parties eſgales, & on aura N Q, la ſubtendue du tiers de l'vn, & N V la ſubtendue du tiers de l'autre, qui iointes enſemble composeront la racine cherchée.

Enfin ſi on a $z^3 \propto * p z -- q$, en ſuppoſant derechef le cercle N Q P V, dont le rayon N O ſoit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, & l'inſcrite NP ſoit $\frac{3p}{q}$, N Q la ſubtenduë du tiers de l'arc NQP ſera l'vne des racines cherchées, & N V la ſubtendue du tiers de l'autre arc ſera l'autre. Au moins ſi le quarré de la moitié du dernier terme, n'eſt point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuë du penultieſme. car s'il eſtoit plus grand, la ligne N P ne pourroit eſtre inſcrite dans le cercle , a cauſe quelle ſeroit plus longue que ſon diametre: Ce qui ſeroit cauſe que les deux vrayes racines

cines de cete Equation ne ſeroient qu'imaginaires, & qu'il ny en auroit de reelles que la fauſſe, qui ſuiuant la reigle de Cardan ſeroit,

$$\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

La facon d'exprimer la valeur de toutes les racines des Equations cubiques: & en ſuite de toutes celles qui ne montent que iuſques au quarré de quarré.

Au reſte il eſt a remarquer que cete façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux coſtés de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoiſſe, n'eſt en rien plus intelligible, ny plus ſimple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux ſubtenduës de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple eſt donné. En ſorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuuent eſtre exprimées par les reigles de Cardan, le peuuent eſtre autant ou plus clairement par la façon icy propoſée.

Car ſi par exemple, on penſe connoiſtre la racine de cete Equation, $z^3 \propto * - qz + p$. a cauſe qu'on ſçait qu'elle eſt compoſée de deux lignes. dont l'vne eſt le coſté d'vn cube, duquel le contenu eſt $\frac{1}{2}q$, adiouſté au coſté d'vn quarré, duquel derechef le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; Et l'autre eſt le coſté d'vn autre cube, dont le contenu eſt la difference, qui eſt entre $\frac{1}{2}q$, & le coſté de ce quarré dont le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, qui eſt tout ce qu'on en apprent par la reigle de Cardan. Il ny a point de doute qu'on ne connoiſſe autant ou plus diſtinctement la racine de celle cy, $z^3 \propto * + q - p$, en la conſiderant inſcrite dans vn cercle, dont le demidiametre eſt $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & ſçachant qu'elle y eſt la ſubtenduë d'vn arc dont le triple a pour ſa ſubtendue $\frac{3q}{p}$. Meſme ces ter-

mes

mes sont beaucoup moins embarassés que les autres, & ils se trouueront beaucoup plus cours si on veut vser de quelque chiffre particulier pour exprimer ces subtendües, ainsi qu'on fait du chiffre $\sqrt{C}$. pour exprimer le costé des cubes.

Et on peut aussy en suite de cecy exprimer les racines de toutes les Equations qui montent iusques au quarré de quarré, par les reigles cy dessus expliquées. En sorte que ie ne sçache rien de plus a desirer en cete matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus simples, ny qu'on les determine par aucune construction qui soit ensemble plus generale & plus facile.

Pourquoy les froblesmes solides ne peuuent estre construits sans les sections coniques, ny ceux qui sont plus composés sans quelques autres lignes plus composées.

Il est vray que ie n'ay pas encore dit sur quelles raisons ie me fonde, pour oser ainsi assurer, si vne chose est possible, ou ne l'est pas. Mais si on prent garde comment, par la methode dont ie me sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres, se reduist a vn mesme genre de Problesmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation; on iugera bien qu'il n'est pas malaysé de faire vn dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouuer, qui soit suffisant pour demonstrer qu'on a choisi la plus generale, & la plus simple. Et particulierement pour cequi est des Problesmes solides, que iay dit ne pouuoir estre construis, sans qu'on y employe quelque ligne plus composée que la circulaire, c'est chose qu'on peut assés trouuer, de ce qu'ils se reduisent tous a deux constructions; en l'vne desquelles il faut auoir tout ensemble les deux poins, qui determinent deux moyenes proportionelles entre deux

lignes

lignes données, & en l'autre les deux poins, qui diuisent en trois parties esgales vn arc donné: Car d'autant que la courbure du cercle ne depend, que d'vn simple rapport de toutes ses parties, au point qui en est le centre; on ne peut aussy s'en seruir qu a determiner vn seul point entre deux extremes, comme a trouuer vne moyenne proportionelle entre deux lignes droites données, ou diuiser en deux vn arc donné: Au lieu que la courbure des sections coniques, dependant tousiours de deux diuerses choses, peut aussy seruir a determiner deux poins differens.

Mais pour cete mesme raison il est impossible, qu'aucun des Problesmes qui sont d'vn degré plus composés que les solides, & qui presupposent l'inuention de quatre moyennes proportionelles, ou la diuision d'vn angle en cinq parties esgales, puissent estre construits par aucune des sections coniques. C'est pourquoy ie croyray faire en cecy tout le mieux qui se puisse, si ie donne vne reigle generale pour les construire, en y employant la ligne courbe qui se descrit par l'intersectiõ d'vne Parabole & d'vne ligne droite en la façon cy dessus expliquée. car i'ose assurer qu'il ny en a point de plus simple en la nature, qui puisse seruir a ce mesme effect; & vous aués vû comme elle suit immediatement les sections coniques, en cete question tant cherchée par les anciens, dont la solution enseigne par ordre toutes les lignes courbes, qui doiuent estre receuës en Geometrie.

Facon generale pour construire tous les problesmes reduits a

Vous sçaues desia comment, lorsqu'on cherche les quantités qui sont requises pour la construction de ces Problesmes, on les peut tousiours reduire a quelque Equation, qui ne monte que iusques au quarré de cube, ou

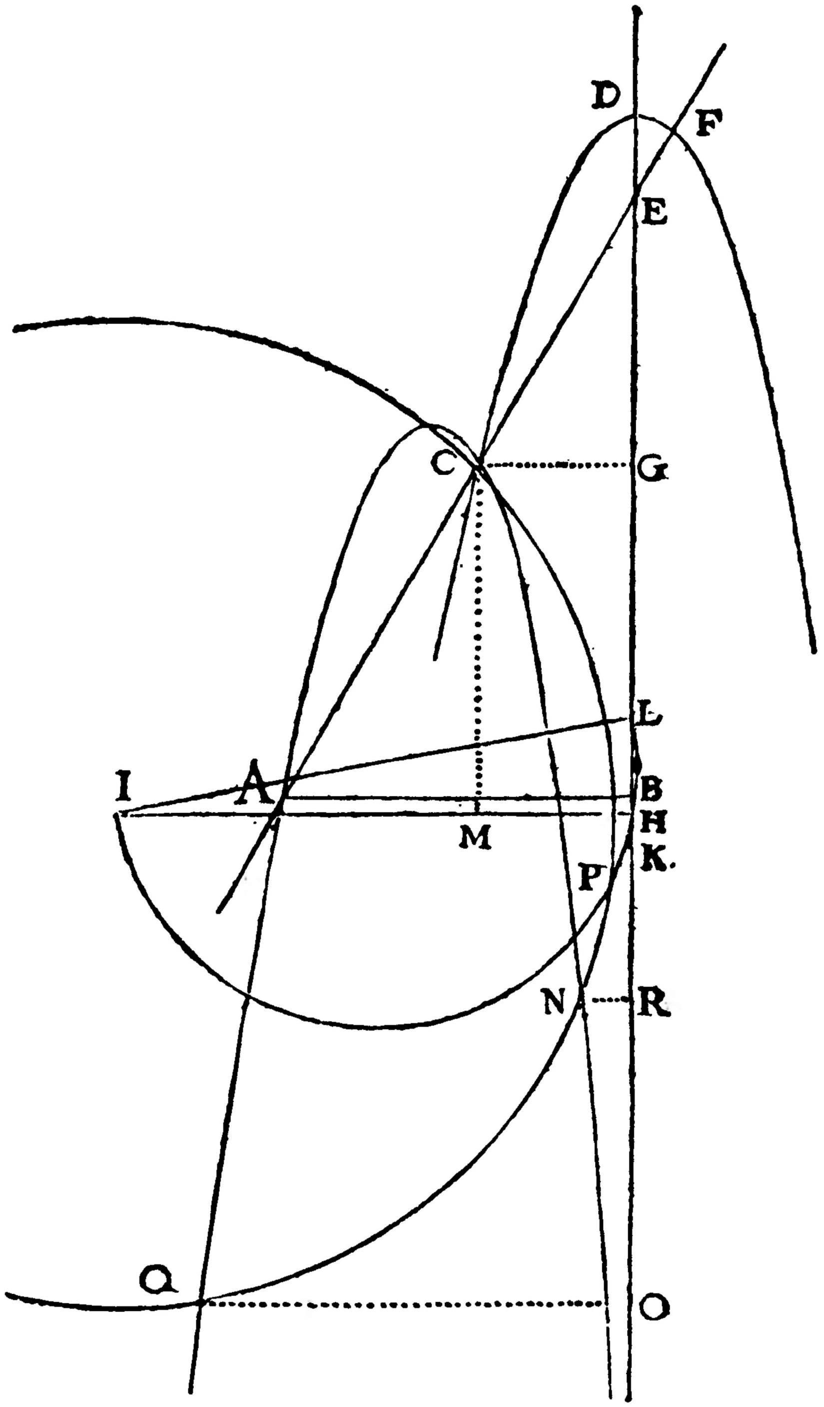
au

au ſurſolide. Puis vous ſçaués auſſy comment, en augmentant la valeur des racines de cete Equation, on peut touſiours faire qu'elles deuienent toutes vrayes; & auec cela que la quãtité connuë du troiſieſme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle du ſecond: Et enfin comment, ſi elle ne monte que iuſques au ſurſolide, on la peut hauſſer iuſques au quarré de cube; & faire que la place d'aucun de ſes termes ne manque d'eſtre remplie. Or affin que toutes les difficultés, dont il eſt icy queſtion, puiſſent eſtre reſoluës par vne meſme reigle, ie deſire qu'on face toutes ces choſes, & par ce moyen qu'on les reduiſe touſiours a vne Equation de telle forme,

vneEquation qui n'a point plus de ſix dimẽſions.

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0,$$

& en laquelle la quantité nommée q ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle qui eſt nommée p.



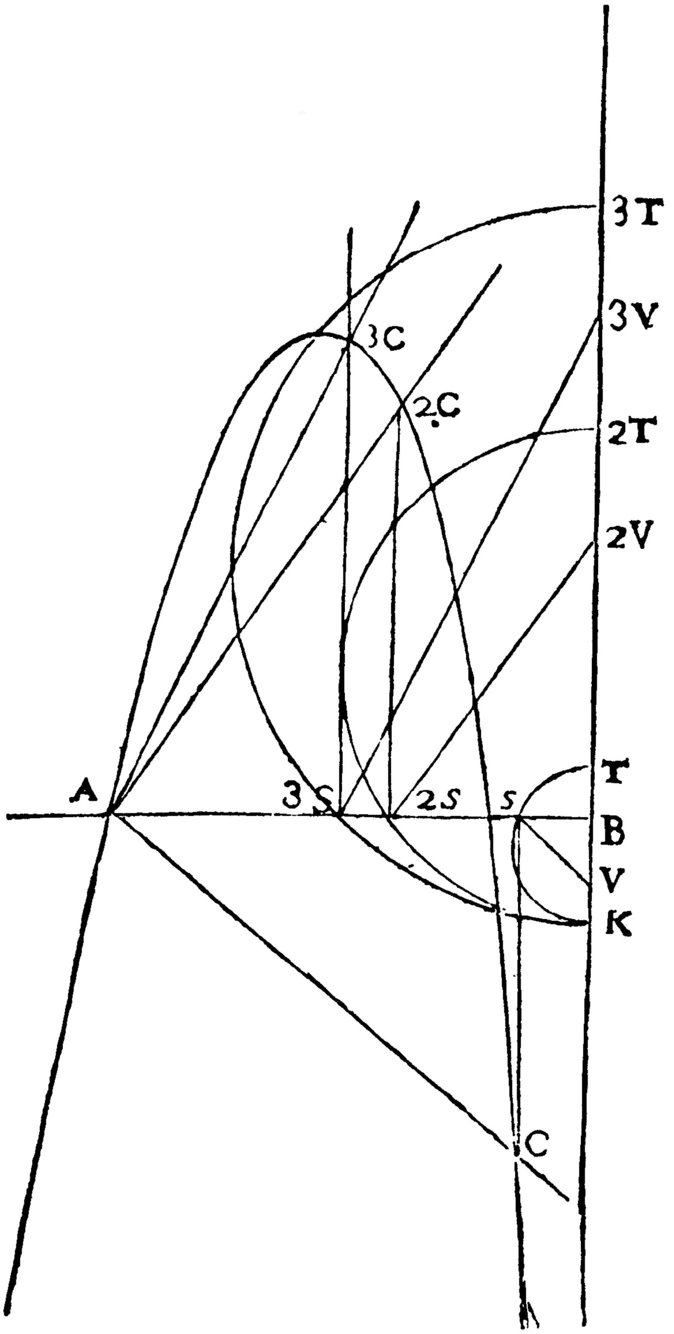
Puis ayant fait a ligne B K indefiniement longue des deux coſtés; & du point B ayant tiré la perpendiculaire A B, dontla longueur ſoit $\frac{1}{2}p$; il faut dans vn plan ſeparé deſcrire vne Parabole, comme C D F dont le coſté droit principal ſoit

$$\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp},$$

que ie nommeray n pour abreger. Aprés cela il faut poſer le plan dans lequel eſt cete Parabole ſur celuy ou ſont les lignes A B & B K, en ſorte que ſon aiſſieu D E ſe rencontre iuſtement au deſſus de la ligne droite B K: Et ayant pris la partie de cet aiſſieu, qui eſt entre les poins E & D, eſgale à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, il faut appliquer ſur ce point E vne longue reigle, en telle façon qu'eſtant auſſy appliquée ſur le point A du plan de deſſous, elle demeure touſiours iointe a ces deux poins, pendant qu'on hauſſera ou baiſſera la Parabole

bole tout le long de la ligne B K, sur laquelle son aissieu est appliqué au moyen dequoy l'intersection de cete Parabole, & de cete reigle, qui se fera au point C, descrira la ligne courbe A C N, qui est celle dont nous auons besoin de nous seruir pour la construction du Problesme proposé. Car aprés qu'élle est ainsi descrite, si on prent le point L en la ligne B K, du costé vers lequel est tourné le sommet de la Parabole, & qu'on face B L esgale à D E, c'est à dire à $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$: Puis du point L, vers B, qu'on prene en la mesme ligne B K, la ligne L H, esgale à $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & que du point H ainsi trouué, on tire à angles droits, du costé qu'est la courbe A C N, la ligne H I, dont la longeur soit $\frac{r}{2nn}+\frac{\sqrt{v}}{nn}+\frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, qui pour abreger sera nommée $\frac{m}{nn}$: Et aprés, ayant ioint les poins L & I, qu'on descriue le cercle L P I, dont I L soit le diametre; & qu'on inscriue en ce cercle la ligne L P dont la longeur soit $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$: Puis enfin du centre I, par le point P ainsi trouué, qu'on déscriue le cercle P C N. Ce cercle couppera ou touchera la ligne courbe A C N, en autant de poins qu'il y aura de racines en l'Equation: En sorte que les perpendiculaires tirées de ces poins sur la ligne B K, comme C G, N R, Q O, & semblables, seront les racines cherchées. Sans qu'il y ait aucune exception ny aucun deffaut en cete reigle. Car si la quantité s estoit si grande, à proportion des autres p, q, r, t, & v, que la ligne L P se trouuast plus grande que le diametre du cercle

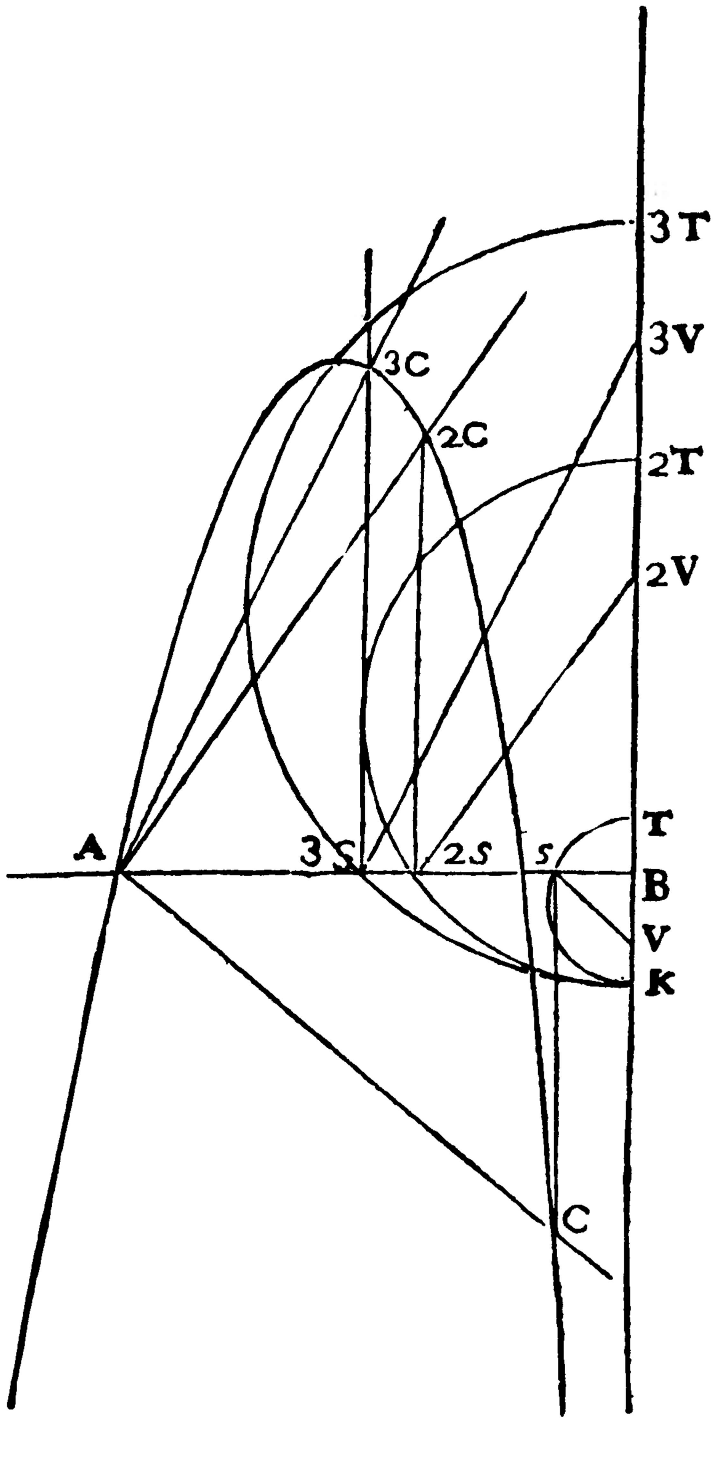
cle I L, en ſorte qu'elle n'y puſt eſtre inſcrite, il ny auroit aucune racine en l'Equation propoſée qui ne fuſt imaginaire: Non plus que ſi le cercle I P eſtoit ſi petit, qu'il ne coupaſt la courbe A C N en aucun point. Et il la peut couper en ſix differens, ainſi qu'il peut y auoir ſix diuerſes racines en l'Equation. Mais lorſqu'il la coupe en moins, cela teſmoigne qu'il y a quelques vnes de ces racines qui ſont eſgales entre elles, oubien qui ne ſont qu'imaginaires.



Que

Que ſi la'façon de tracer la ligne A C N par le mouuement d'vne Parabole vous ſemble incommode, il eſt ayſé de trouuer pluſieurs autres moyens pour la deſcrire. Comme ſi ayant les meſmes quantités que deuant pour A B & B L; & la meſme pour B K, qu'on auoit poſée pour le coſté droit principal de la Parabole; on deſcrit le demicercle K S T dont le centre ſoit pris a diſcretion dans la ligne B K, en ſorte qu'il couppe quelq; part la ligne A B, comme au point S, & que du point T, ou il finiſt, on prene vers K la ligne T V, eſgale à B L; puis ayant tiré la ligne S V, qu'on en tire vne autre, qui luy ſoit parallele, par le point A, comme A C; & qu'on en tire auſſy vne autre par S, qui ſoit parallele a B K, comme S C; le point C, ou ces deux paralleles ſe rencontrent, ſera l'vn de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouuer, en meſme ſorte, autant d'autres qu'on en deſire.

Or la demonſtration de tout cecy eſt aſſés facile. car appliquant la reigle A E auec la Parabole E D ſur le point C; comme il eſt certain qu'elles peuuent y eſtre appliquées enſemble , puiſque ce point C eſt en la courbe A C N, qui eſt deſcrite par leur interſection ; ſi C G ſe nomme y, G D ſera $\frac{yy}{n}$, à cauſe que le coſté droit, qui eſt n, eſt à C G, comme C G a G D. & oſtant D E, qui eſt $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, de G D, on à $\frac{yy}{n}$ -- $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pour G E. Puis à cauſe que A B eſt a B E, comme C G eſt a G E ; A B eſtant $\frac{1}{2}p$, B E eſt $\frac{py}{2n}$ -- $\frac{\sqrt{v}}{ny}$.



Et tout de meſme en ſuppoſant que le point C de la courbe à eſté trouué par l'interſectiõ des lignes droites, S C parallele à B K, & A C parallele a S V. S B qui eſt eſgale à C G, eſt y : & B K eſtant eſgale au coſté droit de la Parabole, que iay nommé n, B T eſt $\frac{yy}{n}$. car comme K B eſt a B S, ainſi B S eſt a B T. Et T V eſtant

estant la mesme que BL, c'est a dire $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV est $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$: & comme SB est a BV, ainsi AB est à BE, qui est par consequent $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$ comme deuant, d'où on voit que c'est vne mesme ligne courbe qui se descrit en ces deux façons.

Aprés cela, pourceque BL & DE sont esgales, DL & BE le sont aussy: de façon qu'adioustãt LH, qui est $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, à DL, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on à la toute DH, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & en ostant GD, qui est $\frac{yy}{n}$ on à GH, qui est $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Ceque i'escris par ordre en cete sorte $GH \propto \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$.

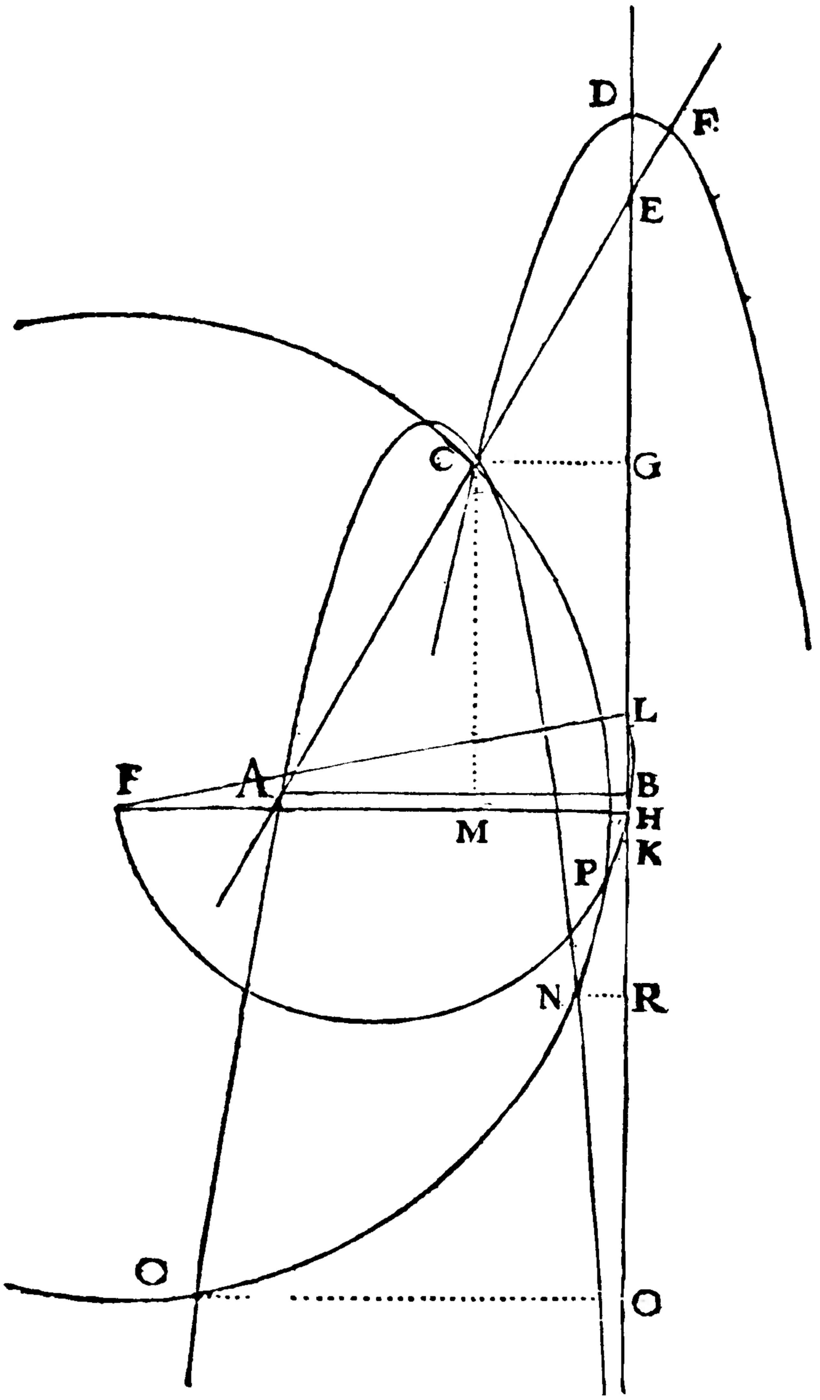
Et le quarré de GH est,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nn\,yy}$$

Et en quelque autre endroit de cete ligne courbe qu'on veuille imaginer le point C, comme vers N, ou vers Q, on trouuera tousiours que le quarré de là ligne droite, qui est entre le point H & celuy où tombe la perpendiculaire du point C sur BH, peut estre exprimé en ces mesmes termes, & auec les mesmes signes + & --.

De plus IH estant $\frac{m}{nn}$, & LH estant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL est $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{2n\sqrt{v}}}$, à cause de l'angle droit IHL; & LP estãt

$\sqrt{}$



$\sqrt{\frac{s}{nn}+\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, I P ou I C eſt,
$\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, a cauſe auſſy de l'angle droit I P L. Puis ayant fait C M perpendiculaire ſur I H, I M eſt la difference qui eſt entre I H, & H M ou C G, c'eſt a dire entre $\frac{m}{nn}$, & y, en ſorte que ſon quarré eſt touſiours $\frac{mm}{n^4}-\frac{2my}{nn}+yy$, qui eſtant oſté du quarré

de

de IC, il reste $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$.
pour le quarré de CM, qui est esgal au quarré de GH desia trouué. Oubien en faisant que cete somme soit diuisée comme l'autre par $nnyy$, on a

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}\,yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$ Puis

remettant $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$, pour nny^4; & $ry^3 + 2\sqrt{v}\,y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$, pour $2my^3$: & multipliant l'vne & l'autre somme par $nnyy$, on a

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v$$

esgal à

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy$$

C'est a dire qu'on a,

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0.$$

D'où il paroist que les lignes CG, NR, QO, & semblables sont les racines de cete Equation, qui est ce qu'il falloit demonstrer.

Ainsi donc si on veut trouuer quatre moyennes proportionelles entre les lignes a & b, ayant posé x pour la premiere, l'Equation est $x^5 * * * * - a^4 b \propto 0$ oubien $x^6 * * * * - a^4 b x * \propto 0$. Et faisant $y - a \propto x$ il vient

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4 b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ +a^5 b \end{matrix} \propto 0.$$

C'est pourquoy il faut prendre $3a$ pour la ligne AB, & $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}} + 6aa}$ pour BK, ou le costé droit de la Parabole

rabole que iay nommé n. & $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pour D E ou B L. Et aprés auoir descrit la ligne courbe A C N sur la mesure de ces trois, il faut faire L H, $\propto \frac{6a^3+aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$. & H I $\propto \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4+3a^3b}{nn\sqrt{aa+ab}}$. & L P $\propto$ $\sqrt{\frac{15a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$ Car le cercle qui ayant son centre au point I passera par le point P ainsi trouue, couppera la courbe aux deux poins C & N ; desquels ayant tiré les perdendiculaires N R & C G, si la moindre, N R, est ostée de la plus grande, C G, le reste sera, x, la premiere des quatre moyennes proportionelles cherchées.

Il est aysé en mesme façon de diuiser vn angle en cinq parties esgales, & d'inscrire vne figure d'vnze ou treze costés esgaux dans vn cercle, & de trouuer vne infinité d'autres exemples de cete reigle.

Toutefois il est a remarquer, qu'en plusieurs de ces exemples, il peut arriuer que le cercle couppe si obliquement la parabole du second genre; que le point de leur intersection soit difficile a reconnoistre: & ainsi que cete construction ne soit pas commode pour la pratique. A quoy il seroit aysé de remedier en composant d'autres regles, à l'imitation de celle cy , comme on en peut composer de mille sortes.

Mais mon dessein n'est pas de faire vn gros liure, & ie tasche plutost de comprendre beaucoup en peu de mots: comme on iugera peutestre que iay fait, si on considere, qu'ayant reduit à vne mesme construction tous

les

les Problesmes d'vn mesme genre, iay tout ensemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerses; & ainsi de resoudre chascun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui sont solides, en coupant aussy d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui sont d'vn degré plus composés, en coupant tout de mesme d'vn cercle vne ligne qui n'est que d'vn degré plus composée que la Parabole; il ne faut que suiure la mesme voye pour construire tous ceux qui sont plus composés a l'infini. Car en matiere de progressions Mathematiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaysé de trouuer les autres. Et i'espere que nos neueux me sçauront gré, non seulement des choses que iay icy expliquées; mais aussy de celles que iay omises volontairement, affin de leur laisser le plaisir de les inuenter.

FIN.

PAr grace & priuilege du Roy tres chrestien il est permis a l'Autheur du liure intitulé *Discours de la Methode &c. plus la Dioptrique, les Meteores, & la Geometrie &c.* de le faire imprimer en telle part que bon luy semblera dedans & dehors le royaume de France, & ce pendant le terme de dix annees consequutiues, a conter du iour qu'il sera parachevé d'imprimer, sans qu aucun autre que le libraire qu'il aura choisi le puisse imprimer, ou faire imprimer, en tout ny en partie, sous quelque pretexte ou deguisement que ce puisse estre; ny en vendre ou debiter d'autre impression que de celle qui aura esté faite par sa permission, a peine de mil liures d'amande, confiscation de tous les exemplaires &c. Ainsi qu'il est plus amplement declaré dans les lettres donnees a Paris le 4 iour de May 1637. signees par le Roy en son conseil *Ceberet* & seellees du grand sceau de cire iaune sur simple queuë.

l'Autheur a permis a Ian Maire marchand libraire a Leyde, d'imprimer le dit liure & de iouir du dit priuilege pour le tems & aux conditions entre eux accordeés.

Acheué d'imprimer le 8. iour de Iuin 1637.