

# 8. Interagující populace

## Bi3101 Úvod do matematického modelování



### Modely dvou interagujících populací

# Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí



- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojitě) pro růst populace:

$$N(t + h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, N(0) = N_0$$

- Pro dvě populace  $N_1, N_2$  budeme mít koeficienty  $r_1, r_2, K_1$  a  $K_2$ .
- Zahrneme-li nyní do soustavy rovnic vzájemné ovlivnění populací, změníme koeficienty  $K_1$  a  $K_2$  na funkce  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  závislé na velikosti druhé populace.
- Pro funkce  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  musí platit:
  - Je-li velikost (té druhé) populace  $N_j=0$ , zůstává  $\kappa_i(0)= K_i$ .
  - Naopak pro  $N_j \rightarrow \infty$  se hodnota ustálí na nějaké konstantě  $\kappa_i(\infty)= C_i$ .

# Příklad



- Nalezněte vhodný předpis pro funkce  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  splňující následující podmínky:
  - Funkce  $\kappa_i$  necht' jsou spojité a hladké na oboru  $<0; \infty$ ).
  - Funkce  $\kappa_i$  necht' jsou neklesající na oboru  $<0; \infty$ ).
  - Je-li velikost (té druhé) populace  $N_j=0$ , zůstává  $\kappa_i(0)=K_i$ .
  - Naopak pro  $N_j \rightarrow \infty$  se hodnota ustálí na nějaké konstantě  $\kappa_i(\infty)=C_i$ .
- Ve specifických případech může být komensalizmus neomezený (tj.  $C_i = \infty$ ).

# Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí



- Varianty vzájemného ovlivnění dvou populací přes prostředí (ekologická klasifikace):
  - $K_i = C_i$       neutrální vztah (žádný vliv),
  - $K_i > C_i$       populace soupeří (amensály),
  - $K_i < C_i$       populace jsou na sobě závislé (komensály), přičemž:
    - ✦ pokud  $K_i = 0$ , je j-tá populace obligátním komensálem i-té populace (i-tá populace nemůže přežít v nepřítomnosti j-té),
    - ✦ pokud  $K_i > 0$ , je j-tá populace fakultativním komensálem i-té populace (i-tá populace může přežít i bez j-té).
- Amensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace uvolňuje do prostředí odpadní produkt nebo speciální látku, která populaci jiného druhu ovlivňuje negativně (potlačuje růst a vývoj, může způsobit i zánik).
- Komensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace využívá jinou bez jejího poškození (jedna populace má ze vztahu prospěch, druhá není ovlivněna)

# Příklad



- Využijte předpis funkcí  $\kappa_1(N_2)$  a  $\kappa_2(N_1)$  z předchozího příkladu, navrhněte jejich vhodné parametry a nahraďte jimi koeficienty úživnosti  $K_1$  a  $K_2$  z původní rovnice.
- Řešte takto získanou soustavu dvou rovnic pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah dvou populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. symbiózu obou populací (oboustranně výhodné ovlivnění),
  3. predaci (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).
- Zjistěte, jaký vztah se nazývá „orgie vzájemné dobročinnosti“, navrhněte a řešte jemu odpovídající model.

# Mezidruhové vztahy



		Vliv první populace na druhou		
		záporný	neutrální	kladný
Vliv druhé populace na první	První populace je vůči druhé			
	záporný	konkurent (kompetice)	amenzál	kořist hostitel
	neutrální		neutrál	
kladný		predátor parazit	komezál	mutuál (symbióza)

# Vzájemné ovlivnění populací přes přírůstek



- Mimo úživnosti se mohou populace ovlivňovat také jinými mechanismy.
- Typickým příkladem je ovlivnění koeficientu růstu (resp. přesněji relativního přírůstku).
- V případě lineárního vlivu na relativní přírůstek

$$N_i(t+h) = N_i(t) + N_i(t) \cdot \left[ r_i \cdot \left( 1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \right) \pm \beta_{i,j} \cdot N_j(t) \right] \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

označujeme získanou soustavu rovnic jako Lotkův-Volterrův systém.

# Domácí úkol č. 4 (do 8. 11. 2021)



- Navrhnete soustavu Lotkových-Volterrových rovnic tří populací.
- Řešte takto získanou soustavu pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah všech tří populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. predaci jedné populace vůči dvěma symbiotickým populacím (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).