

F1421 – Základní matematické metody ve fyzice – k procvičení

1. V ortonormální pravotočivé bázi v \mathbf{R}^3 jsou svými složkami zadány vektory

$$\vec{a} = (1, -2, 2), \vec{b} = (-3, 1, 0), \vec{c} = (-1, -3, 4).$$

a) Zjistěte, zda jsou tyto vektory lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé. V kladném případě vyjádřete některý z nich jako lineární kombinaci ostatních.

b) Vypočtete složky vektoru $\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$ a charakterizujte všechny vektory, které jsou k vektoru \vec{u} kolmé.

2. Pohyb hmotného bodu se děje podél osy x a řídí se pohybovou rovnicí $\ddot{x} + Kx = 0$, kde K je nenulová konstanta. Určete časovou závislost polohy bodu na čase, jestliže jeho počáteční poloha je $x(0) = 0$ a počáteční rychlost $\dot{x}(0) = v_0$,

a) je-li $K > 0$, b) je-li $K < 0$. V obou případech zakreslete schematicky graf řešení $x = x(t)$.

3. a) Určete přirozený definiční obor funkce $f(x) = \frac{\ln \sqrt{\sin x^2}}{\cos x}$, definiční obor její derivace a derivaci vypočtete.

b) Určete přirozený definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ a nalezněte všechny její primitivní funkce.

4. Je dána funkce dvou proměnných $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

Dodefinováním vzniká funkce spojitá v celé rovině proměnných x, y .

a) Vypočtete parciální derivace prvního řádu (podle obou proměnných) této funkce v obecném bodě $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Zjistěte, zda funkce má parciální derivace prvního řádu také v bodě $(x, y) = (0, 0)$ a v kladném případě je určete. (Návod: vyjděte z definice parciálních derivací.)

c) Je funkce diferencovatelná v obecném bodě $(x, y) \neq (0, 0)$? Zdůvodněte. Pokud ano, vyjádřete její úplný diferenciál jako funkci přírůstků $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

5. Sportovní střelec vypálil na terč 50 ran. Jedná se o klasický terč s možnými hodnotami zásahu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (náhodná veličina X). Výsledky střelce ukazuje tabulka:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet	1	3	4	5	5	7	8	10	4	2	1

a) Zapište tabulkou rozdělení náhodné veličiny X .

b) Určete střední hodnotu veličiny X .

c) Určete rozptyl veličiny X .

d) Která z hodnot veličiny X je nejpravděpodobnější?