Elektronová optika a mikroskopie

Pole v elektronové optice

Tomáš Radlička

19. 10. 2020

Ústav přístrojové techniky, AV ČR, v.v.i.

Obsah

Rovnice pro stacionární pole

Maxwellovy rovnice

V elektronové optice lze pole uvažovat zpravidla jako stacionární

Elektromagnetické pole je zcela popsané Maxwellovými rovnicemi, které v lze v případě stacionárního pole psát ve tvaru

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\,. \tag{1b}$$

Tyto rovnice musí být doplněny materiálovými rovnicemi

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad (\boldsymbol{H} = \nu \boldsymbol{B})\,. \tag{2}$$

Ve feromagnetických materiálech je magnetický odpor ν funkcí velikosti magnetické indukce $B = \mid \boldsymbol{B} \mid$. Proudová hustota a hustota náboje jsou funkcemi prostorových souřadnic.

Elektrostatický a magnetický potenciál

Elektrostatický potenciál a magnetický vektorový potenciál jsou definované vztahy

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi\,, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3}$$

Skalární potenciál je řešením rovnice

$$-\nabla \cdot (\epsilon(\boldsymbol{r})\nabla\varphi) = \rho\,, \tag{4}$$

která se redukuje na

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{5}$$

v oblasti bez prostorového náboje. Obdobně můžeme nalézt rovnici pro magnetický vektorový potenciál

$$\nabla \times (\nu(|\nabla\times\boldsymbol{A}|)\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{j}\,, \tag{6}$$

která se při konstantním magnetickém odporu vychází ν a Coulombovské kalibraci $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ zjednodušuje na

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{j}\,. \tag{7}$$

Další zjednodušení je možné ve vakuu, kde nejsou přítomny žádné proudy a $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$. V tom případě můžeme psát

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\psi(\boldsymbol{r})\,. \tag{8}$$

Kde jsme zavedli magnetický skalární potenciál $\psi(\boldsymbol{r})$. Protože platí $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ skalární magnetický potenciál splňuje Laplaceovu rovnici $\nabla^2\psi = 0$.

Radial series expansion

Laplasova rovnice ve valcových souřadnicích

Je vhodné přejít do válcových souřadnic

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi), \quad z = z \tag{9}$$

Laplaceova rovnice tvar

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{10}$$

Standardní separací proměnných

$$\varphi(r,\phi,z) = \tilde{U}(r,z)f(\phi) \tag{11}$$

Multipólový rozvoj elektrostatického potenciálu

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \tilde{V}_m(r,z)(c_1\cos(m\phi) + c_2\sin(m\phi)) \tag{12}$$

kde $\tilde{V}_m = U_m/r^m$ je řešením parciální differenciální rovnice

$$\frac{\partial^2\tilde{V}_m}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r}\frac{\partial\tilde{V}_m}{\partial r} + \frac{\partial^2\tilde{V}_m}{\partial z^2} = 0 \tag{13}$$

Zavedením komplexní funkce $V_m = c_1\tilde{V}_m + \mathrm{i}c_2\tilde{V}_m$ a komplexni souřadnice $w = x + \mathrm{i}y$ můžeme multipólový rozvoj psát ve tvaru

$$\varphi = \sum_m \Re\{V_m\bar{w}^m\} \tag{14}$$

Radial series expansion - electrostatic potential

Rozvoj $\tilde{V}_m(r,z)$ do Taylorovy řady ve vzdálenostech od osy

$$\tilde{V}_m(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(z) r^n \tag{15}$$

dosazením do (13) a relativně dlouhých úpravách dostaneme

$$\tilde{V}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{r^2}{4}\right)^n a_{m,0}^{(2n)} \tag{16}$$

Zavedenímí komplexní multipólový koeficient $\Phi_m = c_1 a_{m,0} + \mathrm{i} c_2 a_{m,0}$ dostaneme

$$\varphi = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4}\right)^n \Re\{\Phi_m^{(2n)} \bar{w}^m\} \tag{17}$$

Význam jednotlivých koeficientů dostaneme relativně snadno z hodnot, nebo derivací skalárního potenciálu na ose

$$\Phi_0 = \varphi(0,z) \tag{18a}$$

$$\Phi_1 = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}}\right|_{w=0} = -E_x(0,z) - \mathrm{i} E_y(0,z) \tag{18b}$$

Magnetické pole

Magnetický skalární potenciál je řešením stejné rovnice jako elektrostatický

$$\Phi_m \to \Psi_m \tag{19}$$

$$\psi = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n m!}{n!(m+n)!} \left(\frac{w\bar{w}}{4}\right)^n \Re\{\Psi_m^{(2n)} \bar{w}^m\} \tag{20}$$

kde

$$\Psi_0 = \psi(0, z) = \int_{z_o}^{z} B(0, 0, z) \tag{21a}$$

$$\Psi_1 = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}}\right|_{w=0} = -B_x(0, z) - \mathrm{i} B_y(0, z) \tag{21b}$$

Pro index lomu ale potřebujeme znát také magnetický vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{B} = -\nabla\psi = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \tag{23a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{23b}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \tag{23c}$$

Radial series expansion - vektorový potenciál

Kalibrační podmínka: Maxwellovy rovnice jsou invariantní vzhledem ke kalibrační podmínce

$$\boldsymbol{A} \to A - \nabla f \tag{24}$$

kde f je libovolná funkce se spojitými derivacemi. My zvolíme $\partial f / \partial z = A_z$, pak platí, že $A_z = 0$ a zbyvající dvě složky dostaneme z rovnic (23a) a (23b)

$$A_x = -\int \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathrm{d}z \tag{25a}$$

$$A_y = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathrm{d}z \tag{25b}$$

Osově symetrické pole

Užitím vzorců (17,23a a 23b) dostaneme:

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)r^2 + \frac{1}{64}\Phi^{(4)}(z)r^4 + \cdots \tag{26}$$

$$\psi = -\int B(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{4}B'(z)r^2 - \frac{1}{64}B^{(3)}(z)r^4 + \cdots \tag{27}$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B(z)y + \frac{1}{16}B''(z)y(x^2 + y^2) + \cdots \tag{28}$$

$$A_y = \frac{1}{2}B(z)x - \frac{1}{16}B''(z)x(x^2 + y^2) + \cdots \tag{29}$$