Vincent van Gogh Starry Night Painting

Hvězdná noc, 1889

Struktura a kinematika galaxií

Bruno Jungwiert

Astronomical Institute of the Czech Academy of Sciences

III. Dráhy hvězd v galaxiích

a) Integrály pohybu (konzervativní silové pole, sférická symetrie, osová symetrie)

b) Epicyklická aproximace, epicyklická frekvence

Přírodovědecká fakulta MU - F7567 - 2022

ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE PODÉL DRÁHY

PODMÍNKA: konzervativní silové pole, tj. $\Phi(\vec r, \cancel{t}) = \Phi(\vec r)$

$$\ddot{\vec r} = -\nabla\Phi \qquad /\cdot\dot{\vec r}$$

$$\underbrace{\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}}_{\parallel} = -\nabla\Phi\cdot\dot{\vec r}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}^{2}\right) = -\nabla\Phi\cdot\dot{\vec r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}_{=0} + \nabla\Phi\cdot\frac{d\vec r}{dt} = \underbrace{\nabla\Phi\cdot\frac{d\vec r}{dt}}_{\nabla\Phi\cdot\dot{\vec r} = \nabla\Phi\cdot\vec v}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec r}^{2}}{2}+\Phi\right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\vec r}^{2}}{2}+\Phi = E = \text{konst.}$$

CELKOVÁ ENERGIE

KIN. EN. POT. EN

(na jednotku hmoty)

ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBOSTI PODÉL DRÁHY

1) SFÉRICKÁ SYMETRIE, tj. $\Phi(\vec{r}) = \Phi(|\vec{r}|) = \Phi(r)$

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\Rightarrow F(\vec{r}) = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$$

(CENTRÁLNÍ SILOVÉ POLE)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = f(r) \cdot \vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \parallel \vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = 0}$$

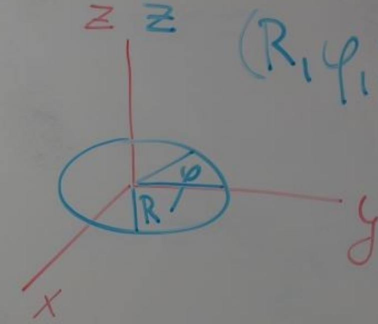
$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBOSTI PODÉL DRÁHY

2) OSOVÁ SYMETRIE, tj. $\Phi(\vec r) = \Phi(R, \cancel{\varphi}, z) = \Phi(R, z)$

(R, φ, z) - CYLINDRICKÉ S.



$$\ddot{\vec r} = -\nabla\Phi \Rightarrow$$

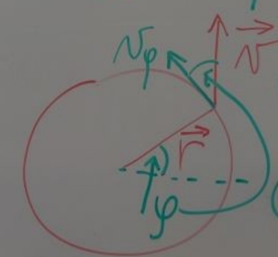
$$\Rightarrow \ddot R - R\dot\varphi^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} = F_R$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(R^2\dot\varphi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = RF_\varphi = 0$$

$$\ddot z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_z$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot\varphi) = 0 \Rightarrow \underbrace{R^2\dot\varphi} = konst$$

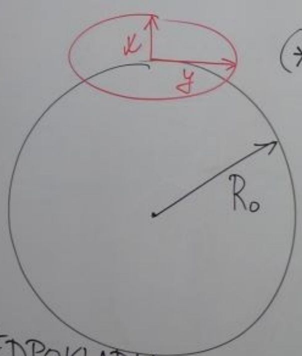


$$v_\varphi = R\dot\varphi$$

$$L_z = (\vec r \times \vec v)_z = R^2\dot\varphi$$

$$(\vec r \times \vec v)_z = R|\vec v|\cos\varphi = Rv_\varphi = R^2\dot\varphi$$

EPICYKLICKÁ APROXIMACE



$$(*)\quad \ddot{R} - R\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\underbrace{R^2\dot{\varphi}}_{L_z}\big) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

POHYBOVÁ ROVNICE V POLÁRNÍCH SOUŘADNICÍCH

PŘEDPOKLADY:

- osová symetrie, tj. $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$
- dráha blízká kruhové, tj. $R(t) = R_0 + x(t)$, $|x(t)| \ll R_0$

$$\Rightarrow L_z = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{R^2}$$

$\Rightarrow$ dosadit do $(*)$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{R} - \frac{L_z^2}{R^3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}}$$

Rozvoj v blízkosti kruhové dráhy

rozvijená dráha (rozeta) má stejné L_z jako kruhová dr.

$$(\underset{\overset{\|}{0}}{\ddot{R}_0} + \ddot{x}) - \frac{L_z^2}{(R_0 + x)^3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

$$\ddot{x} - \frac{L_z^2}{R_0^3} + \frac{3L_z^2}{R_0^4}\,x = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}\Big|_{R_0} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\Big|_{R_0} x$$

Taylorovy rozvoje v okolí R_0 (linearizace)

PODMÍNKA PRO KRUHOVOU DRÁHU

$$\Rightarrow \text{zbývá: } \ddot{x} + \left(\frac{3L_z^2}{R_0^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\Big|_{R_0}\right) x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\varkappa^2 x}$$

$\varkappa$ - EPICYKLICKÁ FREKV.

$$\boxed{\varkappa^2 \equiv \frac{3L_z^2}{R_0^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\Big|_{R_0} = \left(\frac{3}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)\Big|_{R_0}}$$

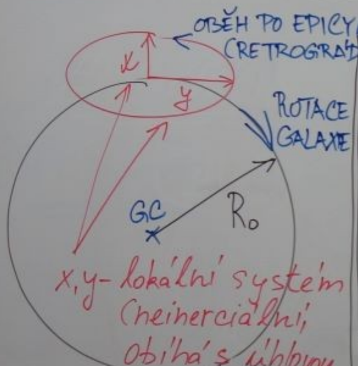
POMOCNÉ VZTAHY:

$$L_z = R_0 \cdot v_c = R_0^2\,\Omega$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} \Rightarrow$$

$$\frac{3L_z^2}{R_0^4} = \frac{3}{R_0}\frac{\partial \Phi}{\partial R}\Big|_{R_0}$$

EPICYKLICKÁ APROXIMACE – POKRAČOVÁNÍ



x, y – lokální systém (neinerciální, obíhá s úhlovou frekvencí $\Omega(R_0)$)

$$\ddot{x} = -\varkappa^2 x$$ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

$$x = X \sin(\varkappa t + \alpha)$$

fáze – zvolíme $\alpha = 0$, tj. $x = 0$ pro $t = 0$

X: amplituda radiálních kmitů

$$\Rightarrow R(t) = R_0 + X \sin(\varkappa t)$$

Rozbor pohybu v ose y:

1) návrat k azimutální složce poh. rovnice $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{R^2}$

2) rozvoj v okolí R_0 + linearizace

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{(R_0 + x)^2} \doteq \frac{L_z}{R_0^2} - \frac{2L_z}{R_0^3} x = \Omega(R_0) - \frac{2L_z}{R_0^3} x$$

$\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1$

ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{2L_z}{R_0^3} x = -\frac{2L_z}{R_0^3} X \sin \varkappa t$$

$\Rightarrow$ integrace přes čas: $\varphi_1 = \frac{2L_z X}{R_0^3 \varkappa} \cos \varkappa t$

– převod na lineární souřadnici:

$$y \doteq R_0 \varphi_1 = \frac{2L_z}{R_0^2} \frac{X}{\varkappa} \cos \varkappa t = \frac{2\Omega}{\varkappa} \cos \varkappa t$$

SHRNUTÍ:

1) PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ ROZETY:

$$R(t) = R_0 + X \sin \varkappa t$$
$$\varphi(t) = \Omega(R_0) \cdot t + \frac{Y}{R_0} \cos \varkappa t$$

2) EPICYKL = ELIPSA

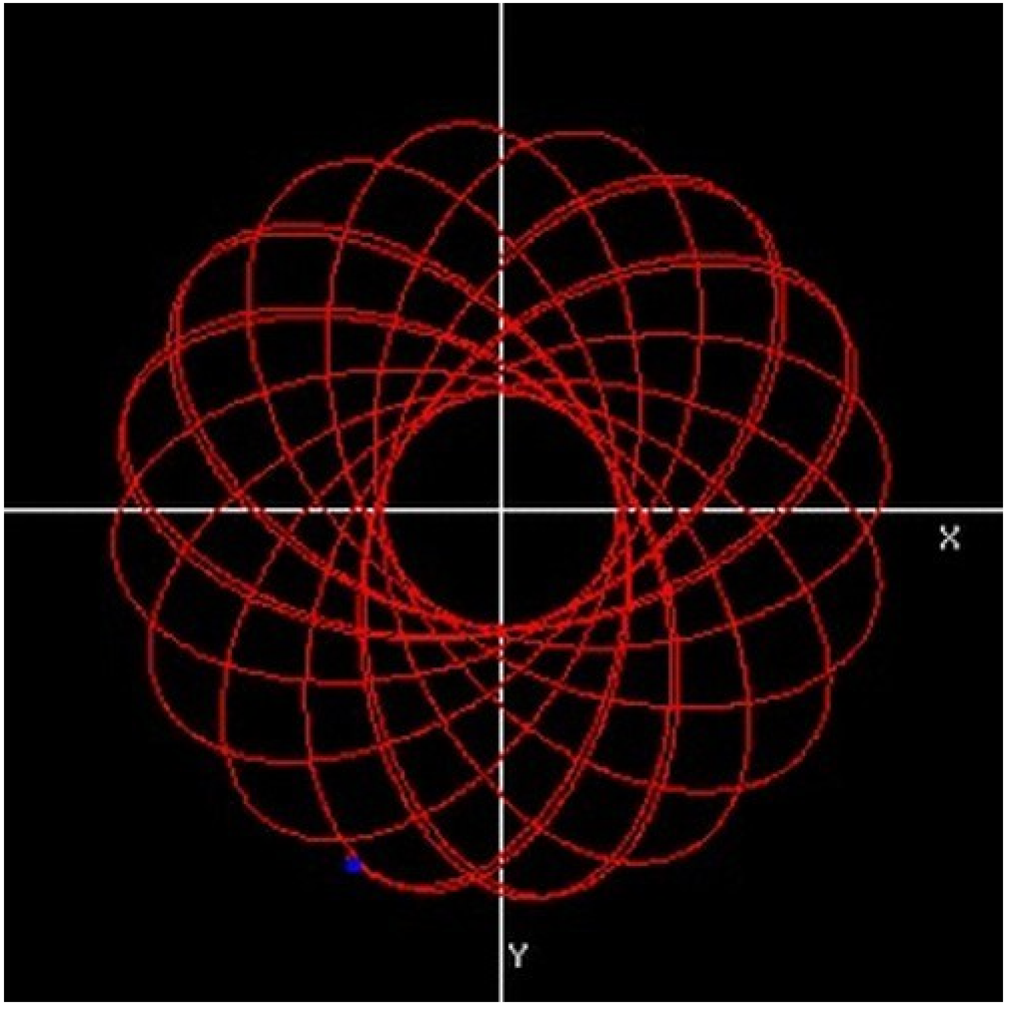
$$x = X \sin \varkappa t$$
$$y = Y \cos \varkappa t$$

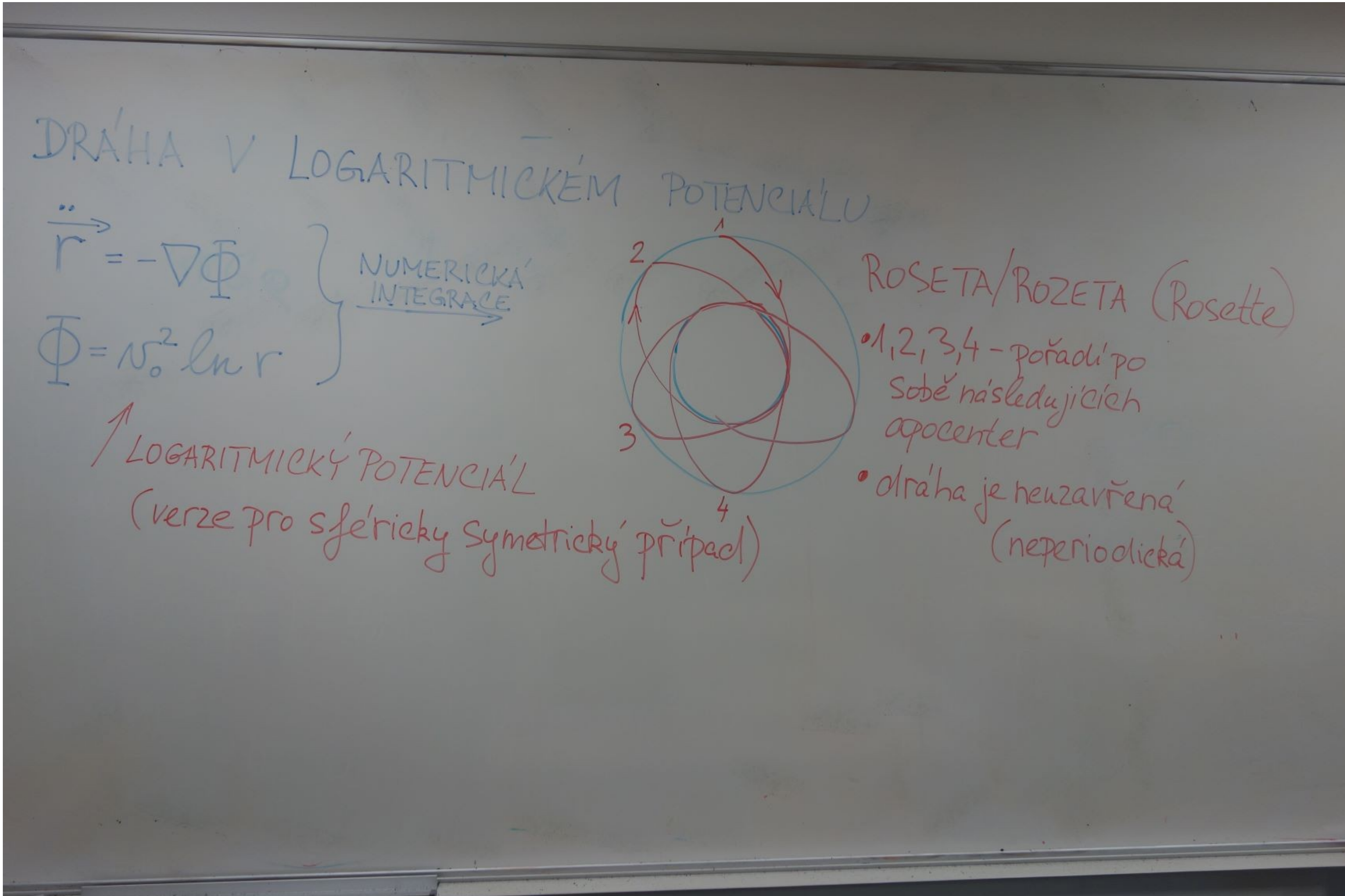
AMPLITUDY KMITŮ (= OSY EPICYKLU)

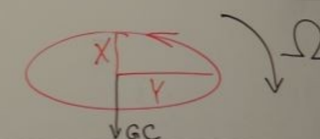
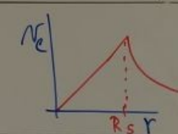
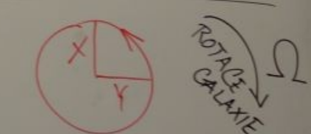
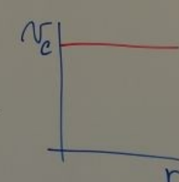
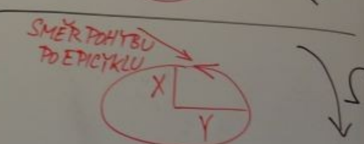
$$\frac{Y}{X} = \frac{2\Omega}{\varkappa}$$

POMĚR POLOOS JE FIXOVÁN POTENCIÁLEM!

Neperiodická rozeta ve sférickém potenciálu
nebo
v rovině z=0 osově symetrického potenciálu




DRÁHA V LOGARITMICKÉM POTENCIÁLU
$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\Phi$
$\Phi = v_0^2 \ln r$
NUMERICKÁ INTEGRACE
LOGARITMICKÝ POTENCIÁL
(verze pro sféricky symetrický případ)
1
2
3
4
ROSETA/ROZETA (Rosette)
• 1,2,3,4 – pořadí po sobě následujících apocenter
• dráha je neuzavřená (neperiodická)

	Φ	$\Omega = \sqrt{\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}}$	$v_c = \sqrt{\frac{\partial \Phi}{\partial r}} = \Omega \cdot r$	$\frac{\kappa}{\Omega}$	$\frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{2\Omega}$	TVAR EPICYKLU
HMOTNÝ BOD (HB)	$-\frac{GM}{r}$	$\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$	$\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 	1	$\frac{1}{2}$	
HOMOGENNÍ SFÉRA (HS) (o poloměru R_s)	$-\frac{GM}{2R_s}\left(3-\frac{r^2}{R_s^2}\right)$	$\sqrt{\frac{GM}{R_s^3}} = \text{Const.}$	$\sqrt{\frac{GM}{R_s^3}} \cdot r$ 	2	1	
LOGARITMICKÝ POTENCIÁL	$v_0^2 \ln r$	$\frac{v_0}{r}$	$v_0 = \text{konst}$ 	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}7$	

$$1 \leq \frac{\kappa}{\Omega} \leq 2 \qquad \nabla$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\kappa}{2\Omega} \leq 1 \qquad O$$

ODBOČKA: GRAVITAČNÍ POLE HOMOGENNÍ SFÉRY (UVNITŘ A VNĚ)

(PRAKTICKÉ POUŽITÍ: CENTRÁLNÍ ČÁST GALAXIÍ S „JÁDREM" TÉMĚŘ KONSTANTNÍ HUSTOTY)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM(r)}{r^2}\vec{e}_r$$

(díky 1. a 2. Newtonovu teorému)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\, r\cdot\vec{e}_r$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot x = -\Omega^2\cdot x$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot y = -\Omega^2\cdot y$$

kolmé harmonické kmity se stejnou frekvencí $\Omega_x = \Omega_y = \Omega$

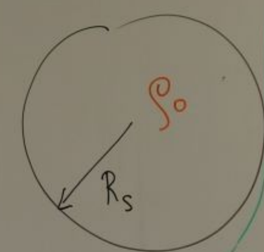
DRÁHA JE ELIPSA

$M(r)$ - hmotnost uvnitř poloměru r

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$$

$$M_{tot} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_s^3$$

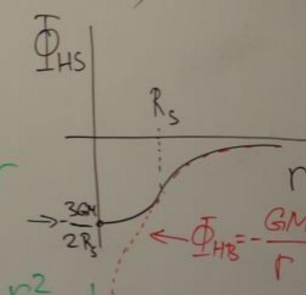
$$\Rightarrow M(r) = \frac{r^3}{R_s^3}\cdot M_{tot}$$



Výpočet $\Phi(r)$:

$$F_r = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot r$$

$$\Phi(r) = \int F_r\,dr = -\frac{GM_{tot}}{2R_s^3}r^2 + \text{konst.}$$



určení konstanty: $\Phi(R_s) = -\frac{GM_{tot}}{2R_s} + \text{konst} \Rightarrow \text{konst} = -\frac{3}{2}\frac{GM_{tot}}{R_s}$

$\| -\frac{GM_{tot}}{R_s}$ (potenciál hm. bodu o stejné hmotnosti)

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{GM_{tot}}{2R_s}\left(3 - \frac{r^2}{R_s^2}\right), \text{ pro } r \le R_s$$

GRAVITAČNÍ POLE HOMOGENNÍ SFÉRY – POKRAČOVÁNÍ

Alternativa k odvození potenciálu:

- uvnitř sféry: $\rho = \rho_0$

$$M_{tot} = \frac{4\pi}{3}R_s^3\rho_0 \Rightarrow 4\pi\rho_0 = \frac{3M_{tot}}{R_s^3}$$

Poissonova rovnice: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \underbrace{\text{členy s } \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \text{ a } \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}}_{0} = 4\pi G\rho_0 = \frac{3GM_{tot}}{R_s^3} \Big/ \cdot r^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{3GM_{tot}}{R_s^3}r^2$$

$$\Rightarrow r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{GM_{tot}}{R_s^3}r^3 + \underbrace{\text{const.}}_{0}$$

0 (z podmínky kontinuity síly $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ v R_s: $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{R_s} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^2}$)

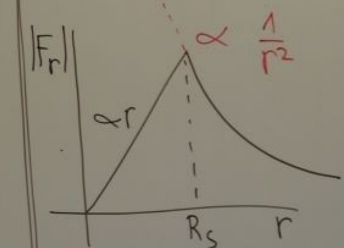
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot r} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{GM_{tot}}{2R_s^3}r^2 + \text{konst.}}$$

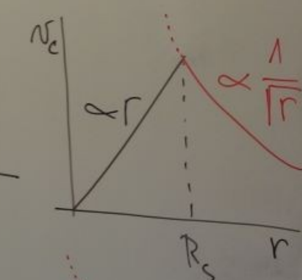
← určit z podmínky $\Phi(R_s) = -\frac{GM}{R_s}$ (viz minulá tabule)

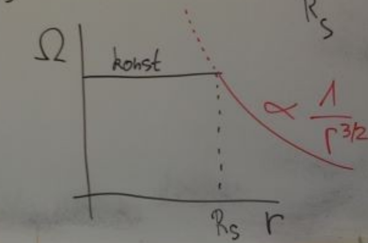
$$F_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{GM_{tot}}{R_s^3}\cdot r$$

$$v_c = \sqrt{r|F_r|} = \sqrt{r\frac{\partial\Phi}{\partial r}} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}}\cdot r$$

$$\Omega = \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}} = \text{konst}$$







EPICYKLICKÁ APROXIMACE A DRÁHY V POTENCIÁLECH
- HOMOGENNÍ SFÉRY (HS)
- HMOTNÉHO BODU (HB)

HS : $\varkappa = 2\Omega$,

(dvě radiální oscilace během jednoho oběhu)

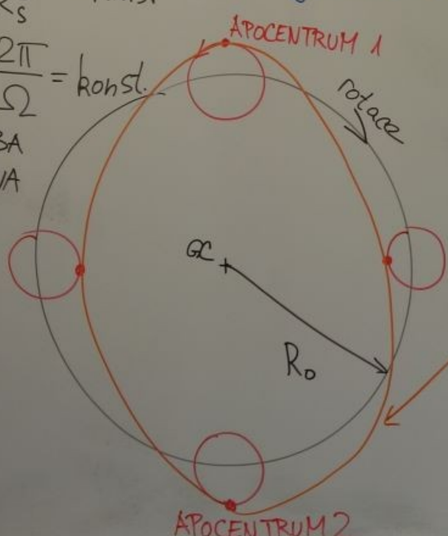
$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{R_s^3}} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = \text{konst.}$$

$\Rightarrow$ OBĚŽNÁ DOBA NEZÁVISÍ NA VELIKOSTI ELIPSY

$$\frac{X}{Y} = \frac{\varkappa}{2\Omega} = 1$$

($\Rightarrow$ kruhový epicykl)



DRÁHA = ELIPSA S GEOM. STŘEDEM VE STŘEDU HOM. SFÉRY

HB : $\varkappa = \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \neq \text{konst}$

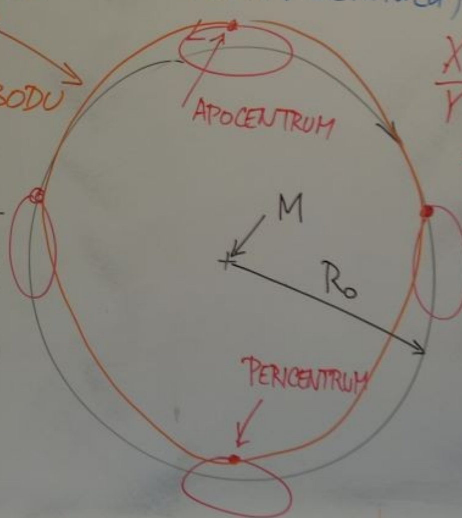
(jedna radiální oscilace za jeden oběh v azimutu)

DRÁHA = ELIPSA S OHNISKEM VE HMOTNÉM BODU

OBĚŽNÁ DOBA

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

(3. KEPLERŮV ZÁKON)



$$\frac{X}{Y} = \frac{\varkappa}{2\Omega} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ eliptický epicykl s $b = \frac{a}{2}$