

F7567 – Struktura a kinematika galaxií – 2022/23 – příklady k procvičení

I. Potenciál a hustota galaxií, Poissonova rovnice, radiální síla, kruhová a úniková rychlost – sférické modely a osově symetrické 2D modely.

Úlohy:

1. Najděte potenciál uvnitř a vně homogenní sféry o poloměru R :

- integrací Poissonovy rovnice;
- s využitím 1. a 2. Newtonova teorému.

Načrtněte radiální průběh tohoto potenciálu.

2. Spočítejte a načrtněte radiální průběh následujících veličin vně a uvnitř gravitačního pole homogenní sféry:

- radiální síla
- kruhová rychlost
- úhlová rychlost rotace po kruhové dráze
- perioda rotace po kruhové dráze
- úniková rychlost

3. Předpokládejte, že kruhová rychlost v dané galaxii je konstantní a galaxie je sféricky symetrická. Ukažte, jak pro takovou galaxii vypadají následující veličiny:

- potenciál
- hustota
- hmotnost uvnitř sféry o daném poloměru r .
- perioda rotace po kruhové dráze.

4.

a) Vypočítejte a načrtněte radiální průběh kruhové rychlosti, kruhové frekvence a radiální síly pro tzv. Plummerovu sféru. Tato sféra má hustotu $\rho(r) = \rho_0 / [1 + (R/b)^2]^{5/2}$ a potenciál

$\Phi = -GM / [r^2 + b^2]^{1/2}$, kde M je hmotnost sféry, G gravitační konstanta, b je konstanta.

b) Srovnajte tyto průběhy s kruhovou a úhlovou rychlostí pro gravitační pole hmotného bodu a homogenní sféry.

c) Pro jakou hodnotu r/b má maximum radiální síla a kruhová rychlost ?

5. Odvodte radiální závislost plošné hustoty 2D disku s následujícím gravitačním potenciálem:

a) $\Phi = v_c^2 \cdot \ln [(R^2 + z^2)^{1/2} + |z|]$, kde v_c je konstanta;

b) $\Phi = -GM / [R^2 + (a + |z|)^2]^{1/2}$, kde M je hmotnost disku, G je gravitační konstanta, a je konstanta.

6. Odvodte radiální průběh kruhové rychlosti ve 2D discích z úlohy 5.

II. Pohyb částice ve sféricky symetrickém nebo osově symetrickém potenciálu. Úhlová a epicyklická frekvence, velikost a tvar epicyklu

Označení:

Ω – úhlová rychlost rotace (úhlová frekvence) po kruhové dráze

κ - epicyklická frekvence

Úlohy:

1. Napište vztahy mezi:

- potenciálem a úhlovou frekvencí
- epicyklickou frekvencí a potenciálem
- epicyklickou frekvencí a úhlovou frekvencí

(Pozn.: Předpokládejte blíže neurčený sféricky symetrický potenciál).

2. Spočítejte a načrtněte radiální profily κ , Ω a κ/Ω pro:

- potenciál hmotného bodu;
- potenciál homogenní sféry;
- galaxii s plochou rotační křivkou.

3. Jaký je poměr poloos epicyklu pro

- potenciál hmotného bodu;
- potenciál homogenní sféry;
- galaxii s plochou rotační křivkou ?

4. Napište a vyřešte pohybovou rovnici pro částici pohybující se uvnitř homogenní sféry.

5. Vypočítejte radiální průběh disperze rychlostí pro Plummerovu sféru.

6. Do jaké maximální výšky nad galaktickou rovinu se dostane hvězda v diskové galaxii, pokud je její vertikální rychlost v okamžiku průchodu galaktickou rovinou 10 km/s a hustota hmoty v galaktické rovině je $0.1 M_{\text{Sun}} / \text{pc}^3$.

7. Jaká je malá a velká poloosa epicyklu hvězdy, obíhá-li ve vzdálenosti 10 kpc od středu diskové galaxie a je-li její maximální radiální rychlost vůči středu galaxie 20 km/s. Předpokládejte plochou rotační křivku s kruhovou rychlostí 200 km/s.

III.

Pohyb částice v poli galaktické příčky

Pohybová rovnice v rotující soustavě. Lindbladovy rezonance, korotace.

Označení:

Ω – úhlová rychlost rotace (úhlová frekvence) po kruhové dráze

κ - epicyklická frekvence

OLR – vnější Lindbladova rezonance

ILR – vnitřní Lindbladova rezonance

CR – korotace

Úlohy:

1. Napište pohybovou rovnici částice v souřadné soustavě rotující konstantní rychlostí. Předpokládejte přitom, že částice se pohybuje v rovině, tj. napište tuto rovnici pro 2-dimenzionální případ, a to jednak v polárních, jednak v kartézských souřadnicích.
2. Napište vztahy pro Lindbladovy rezonance a korotační rezonance v potenciálu slabé příčky.
3. Jaký je poměr poloměrů OLR a CR v galaxii s příčkou a plochou rotační křivkou?
4. Je pozorována galaxie, jejíž příčka má velkou poloosu 2 kpc. Za předpokladů, že příčka končí na vlastní korotaci a že galaxie má plochou rotační křivku s kruhovou rychlostí 200 km/s, určete úhlovou rychlost pohybu příčky, její rotační periodu a polohu OLR.
5. Předpokládejte, že simulace galaxie vede ke vzniku příčky s úhlovou rychlostí 60 km/s/kpc. Za předpokladu ploché rotační křivky (s kruhovou rychlostí 300 km/s) určete polohy CR a OLR.

IV. Jeansova nestabilita

1. Vypočítejte Jeansovu délku pro hvězdný disk naší Galaxie v okolí Slunce. Předpokládejte hustotu disku $0.1 M_{\text{Sun}} / \text{pc}^3$ a disperzi rychlostí hvězd 30 km/s.