

A. Písemka v semestru z M1035, podzim 2022

Příklad 1. [3 body] Uvažujme funkci $f(x) = |2x + 3| - |x - 5|$.

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci f jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce f na intervalu $[-6, 6]$. [1 bod]

Řešení. Na $(-\infty, -3/2]$ je $f(x) = -x - 8$, na $[-3/2, 5]$ je $f(x) = 3x - 2$, na $[5, \infty)$ je $f(x) = x + 8$. Graf funkce na intervalu $[-6, 6]$ dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> plot $|2x+3|-|5-x|$ from -6 to 6

□

Příklad 2. [3 body] Racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 14x + 2}{x^2 - 6x + 9}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a racionální lomené funkce zapsané jako součet parciálních zlomků.

Řešení.

$$R(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 3} - \frac{1}{(x - 3)^2}$$

□

Příklad 3. [3 body] Uvažujme funkci

$$f(x) = 3 - \log_2(5 - 2x).$$

- Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]
- Napište konkrétní hodnoty této funkce ve třech různých hodnotách x . [1 bod]
- Najděte k funkci $f(x)$ inverzní funkci $g(y)$, napište její předpis, definiční obor a obor hodnot. [1 bod]

Řešení. a) $D(f) = (-\infty, 5/2)$, $H(f) = (-\infty, \infty)$.

b) $f(2) = 3$, $f(3/2) = 2$, $f(-3/2) = 0$.

c) Inverzní funkce je $x = g(y)$ s definičním oborem $D(g) = (-\infty, \infty)$ a oborem hodnot $H(g) = (-\infty, 5/2)$ spočítáme takto: pro $y \in (-\infty, \infty)$ řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 3 - \log_2(5 - 2x) &= y \\ 2^{\log_2(5 - 2x)} &= 2^{3 - y} \\ 5 - 2x &= 2^{3 - y} \\ x &= \frac{5 - 2^{3 - y}}{2}. \end{aligned}$$

Tedy $g(y) = \frac{5 - 2^{3 - y}}{2}$.

□

Příklad 4. [3 body] V intervalu $[0, 2\pi]$ najděte všechna řešení goniometrické rovnice

$$\sin x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$$

Řešení. Po dosazení $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ dostaneme rovnici

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Po substituci $y = \sin x$ řešíme kvadratickou rovnici

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

Ta má řešení -1 a $\frac{1}{2}$.

Rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ má v $[0, 2\pi]$ řešení $\frac{1}{6}\pi$ a $\frac{5}{6}\pi$.

Rovnice $\sin x = -1$ má řešení $\frac{3}{2}\pi$.

□