

B. Písemka v semestru z M1035, podzim 2022

Příklad 1. [3 body] Uvažujme funkci $h(x) = |2x - 3| - |7 - x|$.

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci h jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce h na intervalu $[-8, 8]$. [1 bod]

Řešení. Na $(-\infty, 3/2]$ je $h(x) = -x - 4$, na $[3/2, 7]$ je $h(x) = 3x - 10$, na $[7, \infty)$ je $h(x) = x + 4$. Graf funkce na intervalu $[-8, 8]$ dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> plot $|2x-3|-|7-x|$ from -8 to 8

□

Příklad 2. [3 body] Racionální lomenou funkci

$$Q(x) = \frac{3x^3 - 25x^2 + 57x - 25}{x^2 - 8x + 16}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a racionální lomené funkce zapsané jako součet parciálních zlomků.

Řešení.

$$Q(x) = 3x - 1 + \frac{1}{x - 4} - \frac{5}{(x - 4)^2}$$

□

Příklad 3. [3 body] Uvažujme funkci

$$h(x) = \log_3(7 - 2x) + 5.$$

- Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]
- Napište konkrétní hodnoty této funkce ve třech různých hodnotách x . [1 bod]
- Najděte k funkci $h(x)$ inverzní funkci $g(y)$, napište její předpis, definiční obor a obor hodnot. [1 bod]

Řešení. a) $D(h) = (-\infty, 7/2)$, $H(h) = (-\infty, \infty)$.

b) $h(3) = 5$, $h(2) = 6$, $h(-1) = 7$.

c) Inverzní funkce je $x = g(y)$ s definičním oborem $D(g) = (-\infty, \infty)$ a oborem hodnot $H(g) = (-\infty, 7/2)$ spočítáme takto: pro $y \in (-\infty, \infty)$ řešíme rovnici

$$\begin{aligned}\log_3(7 - 2x) + 5 &= y \\ 3^{\log_3(7-2x)} &= 3^{y-5} \\ 7 - 2x &= 3^{y-5} \\ x &= \frac{7 - 3^{y-5}}{2}.\end{aligned}$$

Tedy $g(y) = \frac{7 - 3^{y-5}}{2}$.

□

Příklad 4. [3 body] V intervalu $[0, 2\pi]$ najděte všechna řešení goniometrické rovnice

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0.$$

Řešení. Po dosazení $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostaneme rovnici

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0.$$

Po substituci $y = \cos x$ řešíme kvadratickou rovnici

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Ta má řešení 2 a $-\frac{1}{2}$.

Rovnice $\cos x = -\frac{1}{2}$ má v $[0, 2\pi]$ řešení $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$.

Rovnice $\cos x = 2$ nemá řešení.

□