Duální prostor – dokončení

Tvrzení. Nechť $\eta^1, \dots, \eta^k, \eta \in U^*$. Potom rovnice $\eta = 0$ plyne ze soustavy rovnic $\eta^1 = 0, \dots, \eta^k = 0$, právě když η je lin. kombinací $\eta^1, \dots, \eta^k$:

$$\left(\forall v \in V:\ \eta^1(v)=0,\dots,\eta^k(v)=0 \Rightarrow \eta(v)=0\right) \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \eta \in [\eta^1,\dots,\eta^k]$$

Poznámka. Logický systém: lineární rovnice (+logické spojky + kvantifikátory). pravdivé tvrzení vs. dokazatelné tvrzení (možné způsoby dedukce ... tady čisté lineární kombinace (+ pravidla logiky). Úplnost = pravdivé ≡ dokazatelné v logice druhého řádu téměř nikdy neplatí (Kurt Gödel).

Podobnou teorii bychom mohli vytvořit pro nehomogenní lineární rovnice (pomocí $A_n \subseteq \mathbb{k}^{n+1}$ a transformací na homogenní lin. rovnice na $\mathbb{k}^{n+1}$), uvedeme ale pouze jednu pěknou aplikaci:

Věta. Soustava lin. rovnic $Ax+b=0$ nemá řešení, právě když existuje lin. kombinace jejích řádků tvaru $1=0$.

Důkaz. Homogenizace soustavy je $Ax+bx^0=0$ (řešení s $x^0 \neq 0 \Leftrightarrow$ řešení s $x^0=1$) a pomocí ní se neřešitelnost napíše snadno: $Ax+bx^0=0 \Rightarrow x^0=0$.
Podle předchozího tvrzení to pak znamená, že x^0 je lin. kombinací řádků v $Ax+bx^0 \xrightarrow{x^0=1} 1$ je lin. komb. řádků v $Ax+b$. □

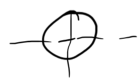
$$(A\,|\,b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & * \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$h(A) < h(A|b)$$

Polyedrální kužely a polyedry

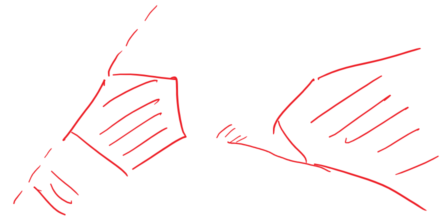
kvadratické rovnice $\xleftrightarrow{\text{nad } \mathbb{C}}$ kuželosečky

$x^2+y^2-1=0$



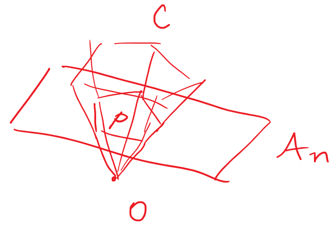
soustavy lin. rovnic
- homogenní $\longleftrightarrow$ vekt. podpr.
- nehomogenní $\longleftrightarrow$ afinní podpr.

soustavy lineárních nerovnic $\longleftrightarrow$ „polyedry"



první ovšem homogenní verze:

soustavy homogenních lineárních nerovnic $\longleftrightarrow$ „polyedrální kužely"



Galoisova konexe

<u>Def.</u> Galoisova konexe je dvojice zobrazení

$$F : A \rightleftarrows B : G$$

mezi uspořádanými množinami A, B splňující:

- F, G převrací uspořádání $\quad a_1 \le a_2 \Rightarrow Fa_1 \ge Fa_2$ „víc rovnic $\Rightarrow$ míň řešení"
- $a \le GFa$, $\quad b \le FGb$

Prvek $a \in A$ nazveme G-uzavřený, pokud $a = GFa \Rightarrow a \in \operatorname{im} G$.

Naopak, pokud $a \in \operatorname{im} G$, $a = Gb$: $b \le FGb \Rightarrow a = Gb \ge GFGb = GFa$

$a \le GFa \longrightarrow a = GFa$

Dostáváme tak bijekci (anti-izomorfismus)

<u>Věta.</u> $\{G\text{-uz. prvky}\} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \{F\text{-uz. prvky}\}$

$\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad \operatorname{im} G \quad\quad\quad\quad\quad \operatorname{im} F$

? co jsou uz. prvky?

<u>Příklady.</u> {nenulové kvadr. rovnice až na násobek} $\cong$ {proj. nadkvadriky}

sym. bil. formy; podmn. nenul. sym. bil. forem; podmn. $\mathcal{P}_n$

$\quad \| $

$\quad \mathcal{P}(\underbrace{S^2(\mathbb{k}^{n+1})^*}_{\text{prostor kvadr. forem}})$ $\quad \mathbb{k} = \mathbb{C}$ nebo alg. uz.

{vektorové podprostory U^*} $\underset{(\,)^\perp}{\overset{(\,)^\perp}{\rightleftarrows}}$ {vektorové podprostory U}

podmnožiny U^* $\quad\quad$ podmnožiny U

↳ dostaneme z libovolných podmnožin

$\rightarrow$ uzavřené ($(\,)^\perp$-uzavřené) jsou právě vektorové podprostory

" řešení soustav

→ $(\ )^{\perp}$– uzavřené
uzavřené jsou právě vektorové podprostory
$\quad$ ‖
množ. řešení soustavy lin. rovnic

Hlavní příklad této části bude

$$(\ )^{\square}: \{\text{podmn. } U^*\} \rightleftarrows \{\text{podmn. } U\} : (\ )^{\square}$$

← ve skriptech $(\ )^{\diamond}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

$$A \longmapsto A^{\square} = \{x \in U \mid \forall a \in A : ax \geq 0\}$$

$$\{a \in U^* \mid \forall x \in X : ax \geq 0\} = X^{\square} \longleftarrow X$$

Pr. $\{x, y, z\}^{\square}$

$\{x,y,z\}^{\square}$ ... 1. oktant $= \{(x,y,z)^T \mid x,y,z \geq 0\}$

$\{a^{(\alpha,\beta,\gamma)} \mid a(e_i) \geq 0,\ \alpha,\beta,\gamma \geq 0\} \longleftarrow \{e_1, e_2, e_3\}$

e_3, e_2, e_1

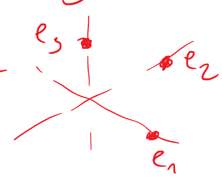
Je to Galoisova konexe:

- převrací uspořádání: $A \subseteq B \implies A^{\square} \supseteq B^{\square}$; víc nerovnic $\Rightarrow$ méně řešení
- $X \subseteq (X^{\square})^{\square}$ — body splňující nerovnice splněné na X; lin. nerce splněné na X

polyedry

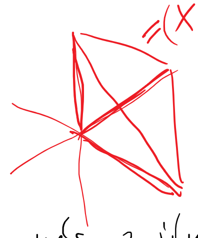
$X \subseteq X^{\square\square}$

$X =$



$X^{\square} \ni x, y, z$: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

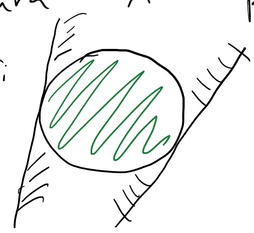
$= (X^{\square})^{\square}$



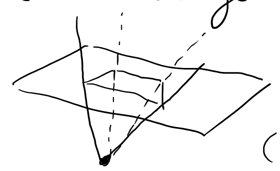
Sice lze popsat $(\ )^{\square}$– uzavřené podmnožiny, ale budou nás zajímat napravo pouze podmnožiny tvaru $A^{\square}$ pro A konečnou:

ANO:

NE:



– nehomogenní obrázky



(později)

A soustava ... matice
... množina řádků = lin. nerovnic

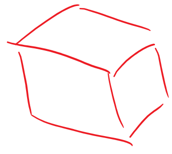
Pomocné pojmy: konvexní kužel generovaný množinou vektorů $X \subseteq U$ definujeme

$$\text{cone}\, X = \{t^1 x_1 + \dots + t^k x_k \mid k \geq 0,\ t^i \geq 0,\ x_i \in X\}$$

← mn. nezáp. lin. komb. prvků z X

$\mathcal{H}$-kužel = podmn. tvaru $A^{\square}$ pro A konečnou $\quad A \subseteq U^*$
$\mathcal{V}$-kužel = podmn. tvaru $(X^{\square})^{\square}$ pro X konečnou $\quad X \subseteq U$

$\{x,y,z\}^{\square} = \{e_1,e_2,e_3\}^{\square\square}$



$= \{6 \text{ nerovnic}\}^{\square} = \{8 \text{ bodů}\}^{\square\square}$
↑ stěny $\qquad$ ↑ vrcholy

Věta. Nechť $C \subseteq U$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) $C = X^{\square\square}$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$, tj. C je $\mathcal{V}$-kužel
ii) $C = \text{cone}\, X$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$
iii) C je $\mathcal{H}$-kužel

ii) ...

iii) C je $\mathcal{H}$-kužel

Podmnožinám tohoto tvaru budeme říkat (polyedrální) kužely.

Hlavní ingredience: Motzkinova eliminace

- analogie Gaussovy eliminace: v soustavě eliminujeme jednu proměnnou při zachování řešitelnosti

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x & x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & x & x \\ 0 & * & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & x & x \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A řešitelná $\Leftrightarrow$ B řešitelná

řešení $\leftarrow$ řešení

$\quad$ ↳ zpětné dosazování

- mějme tedy soustavu nerovnic

$$\beta_i t + a_i x \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, r$$

$\beta_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\quad$ $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

- tři možnosti
  - $\beta_j = 0 \iff a_i x \geq 0$ $\quad$ netřeba nic, viz dále
  - $\beta_k > 0 \iff t \geq -a_k/\beta_k\, x$ $\quad$ zadává dolní mez pro t
  - $\beta_\ell < 0 \iff t \leq -a_\ell/\beta_\ell\, x$ $\quad$ zadává horní mez pro t

- soustava je řešitelná vzhledem k $\underline{t}$ (bereme $\underline{x}$ jako parametr), právě když
  - jsou splněny nerovnice prvního typu $a_i x \geq 0$
  - každá horní mez je $\geq$ každá dolní mez

$$-a_\ell/\beta_\ell \cdot x \geq -a_k/\beta_k \cdot x \quad \text{tj.}$$

$$(a_k/\beta_k - a_\ell/\beta_\ell)\, x \geq 0$$

soustava $A'x \geq 0$
$\forall i$ ... nerovnice
$\forall$ dvojice (k, ℓ) ... nerovnice

Abstraktně: $\quad \exists t : bt + Ax \geq 0 \iff A'x \geq 0$

↳ soustava vzniklá podle Motzkinovy eliminace; má cca $\frac{1}{4} r^2$ řádků (iterací to dost bobtná, u Gaussovy eliminace počet řádků klesal)

tzv. eliminace kvantifikátorů; velice užitečné zde i jinde;

reformulace: $C \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\downarrow \mathrm{pr}$

$\mathrm{pr}(C) \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ $x \in \mathrm{pr}(C) \iff \underbrace{\exists \text{ vzor } (t, x)}_{\exists t} : bt + Ax \geq 0$

C je $\mathcal{H}$-kužel $\Rightarrow$ $\mathrm{pr}(C)$ je $\mathcal{H}$-kužel

$(b|A)^{\mathcal{H}}$ $\quad$ $(A')^{\mathcal{H}}$

Věta. Nechť $C \subseteq U$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

Věta. Nechť $C \subseteq U$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) $C = X^{\square\square}$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$, tj. C je $\mathcal{V}$-kužel

ii) $C = \operatorname{cone} X$ pro nějakou konečnou množinu $X \subseteq U$

iii) C je $\mathcal{H}$-kužel

Důkaz. i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

- „ii) $\Rightarrow$ iii)" použitá Motzkinovu eliminaci: $X = \{x_1, \dots, x_r\}$

X konečná $\Rightarrow$ můžeme kombinovat všechny body

$$C = \operatorname{cone} X = \{t^1 x_1 + \dots + t^r x_r \mid t^i \geq 0\}$$

$$= \{x \in U \mid \exists t^1 \cdots \exists t^r : \underbrace{x = t^1 x_1 + \dots + t^r x_r,\ t^1 \geq 0, \dots, t^r \geq 0}_{\text{soustava homogenních lineárních nerovnic}}\}$$

rovnice = dvojice nerovnic: $\ell = r \Leftrightarrow \ell \geq r,\ r \geq \ell$

$A'x \geq 0$ (Motzkin)

$$= \{x \in U \mid A'x \geq 0\} = (A')^{\square}$$

- „i) $\Leftrightarrow$ ii)" je důkaz $X^{\square\square} = \operatorname{cone} X$, využijeme již dokázaného

$X^{\square\square}$ = nejmenší $\square$-uzavřená podmnožina obsahující X

$= \min\{A^{\square} \mid X \subseteq A^{\square}\}$

$\operatorname{cone} X$ = nejmenší podmnožina obsahující X, uz. na nezáp. lin. komb.

$Ax \geq 0,\ Ay \geq 0 \overset{s,t \geq 0}{\Longrightarrow} A(sx + ty) \geq 0$

Přitom $A^{\square}$ je vždy uz. na nezáp. lin. komb. $\Rightarrow \operatorname{cone} X \subset X^{\square\square}$

Podle předch. víme $X \subseteq \operatorname{cone} X = (A')^{\square} \Rightarrow X^{\square\square} \subseteq \operatorname{cone} X$.

$\subseteq (A')^{\square} =$

- „iii) $\Rightarrow$ i)" plyne z „i) $\Rightarrow$ iii)" a duality:

Protože $\{\square\text{-uz. podmn. } U^*\} \cong \{\square\text{-uz. podmn. } U\}$

$\mathcal{H}$-kužely $\longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$-kužely

$\Downarrow$

$\mathcal{V}$-kužely $\longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$-kužely

$\mathcal{H}$-kužel $X^{\square} \leftarrow X$ kon

$X^{\square} \rightarrow X^{\square\square}$ $\mathcal{V}$-kužel $\square$

$X^{\square} = X^{\square\square\square}$

kon. $A \rightarrow A^{\square}$ $\mathcal{H}$-kužel

Důsledek (Farkasovo lemma pro kužely).

Nechť $C: Ax \geq 0$ je polyedrální kužel (tj. $C = A^{\square}$). Pak C splňuje lineární nerovnici $cx \geq 0$, právě když je tato nezáp. lin. komb. řádků soustavy $Ax \geq 0$, tj. ex. $\underbrace{y \geq 0}_{(y_1, \dots, y_r) \text{ t.ž. } \forall i:\ y_i \geq 0}$: $c = y \cdot A$.

$c = y_1 \cdot a^1 + \dots + y_r \cdot a^r$ (řádky A)

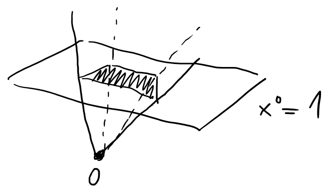
Důkaz. Platí $C = A^{\square}$. Pak C splňuje $cx \geq 0$ znamená

$c \in C^{\square} = A^{\square\square} = \operatorname{cone} A$ … nezáp. lin. komb. řádků A. $\square$

($C^{\square}$: lin. nerovnice, které C splňuje)

Polyedry

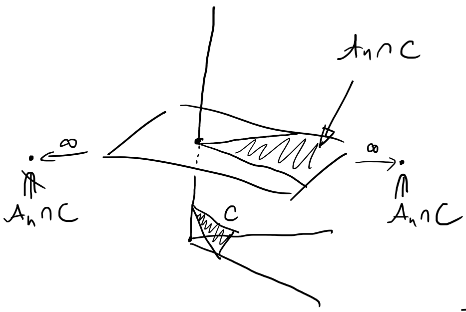
Polyedry

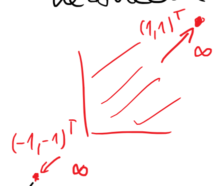


← kužele uzavřené na nezáporné lineární kombinace ⇒ je to o polopřímkách
průnik s $x^0=1$ uzavřený na
konvexní kombinace = nezáporné afinní

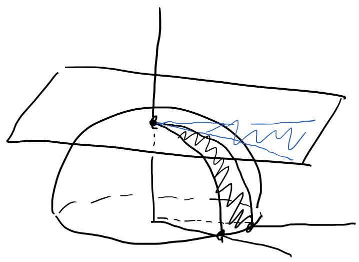
$t^0A_0+\dots+t^kA_k$, kde $t^0+\dots+t^k=1$, $t^i\ge 0$

⇒ potřeba rozlišovat nekonečna v opačných směrech





Budeme definovat $\overline{A}_n^+ = \{$polopřímky $\ell\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ ležící v $x^0\ge 0\}$



A_n

$\overline{A}_n^+ \approx$ hemisféra bez ztotožňování protilehlých bodů (na rovníku)

Definice. Polyedr je podmnožina $P\subseteq A_n$ tvaru $P=\underbrace{A_n\cap C}_{C_1}$, kde C je libovolný polyedrální kužel.

Průnikem $\underbrace{C \text{ s } \{x^0\ge 0\}}_{\text{opět kužel}}$ můžeme předpokládat $C\subseteq\{x^0\ge 0\}$.

Protože C můžeme zadat systémem $bx^0+Ax\ge 0$

$$P=\{[x^1,\dots,x^n]\in A_n \mid b+Ax\ge 0\}$$ ← zadaný soustavou nehomogenních lineárních nerovnic

Ukážeme, že polyedr P určuje kužel C v jistém smyslu jednoznačně

$$\{\text{kužely } C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\} \underset{(\ )^{\square\square}}{\overset{(\ )_1}{\rightleftarrows}} \{\text{polyedry } P\subseteq A_n\}$$

Věta. Tato zobrazení jsou vzájemně inverzní, pokud levou stranu omezíme na nezáporné kužely. ← kladné kužely: ležící v $\{x^0\ge 0\}$ ale ne v $\{x^0=0\}$

nulový kužel 0 – budeme ignorovat

Důkaz. • P polyedr, $P=C_1 \Rightarrow P\subseteq P^{\square\square}\subseteq C \Rightarrow P\subseteq(P^{\square\square})_1\subseteq C_1$

$\Rightarrow P=(P^{\square\square})_1$

• Naopak nechť $C\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ je kladný kužel. Ukážeme, že $(C_1)^\square \overset{?}{=} C^\square$, pak $(C_1)^{\square\square}=C^{\square\square}=C$.
← protože C je kužel

Zjevně pokud $cx\ge 0$ platí na C, platí na C_1 ⇒ platí na $(C_1)^\square$.

Nechť naopak $cx \geq 0$ platí na C_1. Pokud $x \in C$ s $x^0 > 0$,

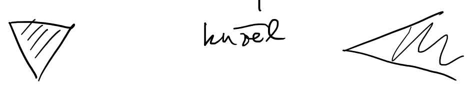
a nechť $X \in C_1$ libovolný (protože C neleží v $\{x^0 = 0\}$, obsahuje bod A_n)

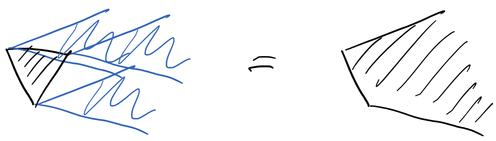
Potom $\underbrace{X + tv}_{\text{nezáp. lin. komb.}} \in C_1$ pro $t \geq 0$ a tedy

$$c(X+tv) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$
$$cX + t \cdot cv \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad cv \geq 0, \text{ tj. } cx \geq 0 \text{ platí na } v. \qquad \square$$

Poznámka. Pojem H-kužele jsme přepsali do řeči polyedrů. Ekvivalentní pojem V-kužele $C = X^{\circ\circ} = \text{cone}\, X$ pro konečnou množinu $X = \{\underbrace{A_0, \dots, A_r}_{\in A_n}, \underbrace{v_1, \dots, v_s}_{\in \text{Dir}\, A_n}\}$ pak dává

$$P = C_1 = A_n \cap \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$
$$= \{\lambda^0 A_0 + \dots + \lambda^r A_r + t^1 v_1 + \dots + t^s v_s \mid \lambda^0 + \dots + \lambda^r = 1,\ \lambda^i \geq 0,\ t^j \geq 0\}$$
$$= \underbrace{\text{conv}\{A_0, \dots, A_r\}}_{\text{polytop}} + \underbrace{\text{cone}\{v_1, \dots, v_s\}}_{\text{kužel}}$$

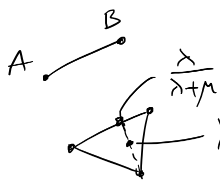




Minkowského rozklad

Poznámka. $\text{conv}\, X = \{\text{konvexní kombinace bodů z } X\} = \text{konvexní obal } X$

$\lambda A + \mu B$



$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B$

$\lambda A + \mu B + \nu C$

$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B\right) + \nu C$

$\Rightarrow$ nejmenší podmnožina obsahující X a s každými dvěma body i úsečku jimi určenou.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $\emptyset \neq P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $cx \geq \delta$ platí na P, právě když je nezápornou lin. kombinací nerovnic z $Ax \geq b$ a triviální nerovnice $0x \geq -1$.

Věta (Farkasovo lemma pro polyedry). Nechť $P: Ax \geq b$ je polyedr. Pak $P = \emptyset$, právě když nezápornou lin. kombinací řádků $Ax \geq b$ lze vyrobit neplatnou nerovnici $0x \geq 1$.

Důkazy. První formulace: $0x \geq -x^0$

Položme $C: Ax \geq bx^0,\ x^0 \geq 0 \implies C$ je kladný kužel

Podle důkazu korespondence $P^\square = C^\square = \{Ax - bx^0,\ x^0\}^{\square\square}$, tj.

nezáp. lin. komb. generujících nerovnic $C \longrightarrow$ přechodem $x^0 = 1$

nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b,\ 0x \geq -1$.

Druhá formulace:

Položme $C: Ax \geq bx^0$. Pak $P = \emptyset$, právě když $C \subseteq \{x^0 \leq 0\} \ (\Leftrightarrow 0x \geq x^0)$

$\Leftrightarrow \quad C^\square \supseteq \{0x \geq x^0\} \quad \Leftrightarrow \quad 0x \geq x^0$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq bx^0$

$C^\square = \{Ax - bx^0\}^{\square\square} \quad \Leftrightarrow \quad 0x \geq 1$ je nezáp. lin. komb. řádků $Ax \geq b$.

$\square$

Dále:
- struktura polyedrů — afinní obal, vnitřek, stěny, vrcholy
  - stěny $\leftrightarrow$ nerovnice systému
- lineární programování