MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2018 JANA ZUZAŇÁKOVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Obyčejné diferenciální rovnice ve slovních úlohách

Bakalářská práce

Jana Zuzaňáková

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Zemánek, Ph.D. **Brno 2018**

Bibliografický záznam

Autor:	Jana Zuzaňáková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Obyčejné diferenciální rovnice ve slovních úlohách
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Aplikovaná matematika pro víceoborové studium, Ekonomie
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
Akademický rok:	2017/2018
Počet stran:	xvi + 142
Klíčová slova:	Diferenciální rovnice; Slovní úlohy; Rovnice se separovanými proměnnými; Lineární diferenciální rovnice 1. řádu; Bernoulliho rovnice; Exaktní rovnice; Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty; Metody řešení diferenciálních rovnic; Aplikace

Bibliographic Entry

Author:	Jana Zuzaňáková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Ordinary Differential Equations in Word Problems
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Applied Mathematics for Multi-Branches Study, Economics
Supervisor:	doc. Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
Academic Year:	2017/2018
Number of Pages:	xvi + 142
Keywords:	Differential equations; Word problems; Separable equations; First-order linear differential equations; Bernoulli's equations; Exact equation; Second-order linear differential equations; Differential equations solution techniques; Applications

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme aplikacím obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu. Práce je rozčleněna do pěti kapitol, přičemž každá z nich se zabývá jedním typem diferenciálních rovnic. Výběr typů rovnic je určen zvolenými aplikacemi; práce se tedy zaměřuje na rovnice se separovanými proměnnými, lineární rovnice prvního a druhého řádu, Bernoulliho rovnice a rovnice exaktní. Všechny kapitoly mají stejnou strukturu, ve které je nejprve uvedena základní teorie ke konkrétnímu typu rovnice, následuje metoda řešení dané rovnice a poslední část kapitoly tvoří řešené slovní úlohy.

Abstract

In this thesis we study the applications of ordinary differential equations of first and second order. The thesis consists of five chapters, each of them dealing with one type of differential equations. Selection of the types is determined by the chosen applications; the thesis thus focuses on separable equations, linear equations of first and second order, Bernoulli's equations and exact equations. Every chapter has the same structure; the first part consisting of fundamental theory for the particular type of equation is followed by its solution technique and solved word problems.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Jana Zuzaňáková
Program:	Matematika
Obor:	Aplikovaná matematika pro víceoborové studium Ekonomie

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Obyčejné diferenciální rovnice ve slovních úlohách
Název práce anglicky:	Ordinary Differential Equations in Word Problems

Oficiální zadání:
Cílem této práce je zpracováni uceleného textu věnovaného aplikacím obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu (případně i vyššího řádu) ve slovních úlohách. Text bude obsahovat také teoretickou část k diferenciálním rovnicím a jejich řešením, přičemž výběr jednotlivých typů diferenciálních rovnic bude určen zvolenými aplikacemi.

Literatura:
KELLEY, Walter G. a Allan C. PETERSON. *The theory of differential equations : classical and qualitative*. 2nd ed. New York: Springer, 2010. xi, 423. ISBN 9781441957825.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
Datum zadání práce:	23. 5. 2017
V Brně dne:	6. 11. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

10. 1. 2018 Zuzaňáková		v. z.
Jana Zuzaňáková **studentka**	doc. Mgr. Petr Zemánek, Ph.D. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat doc. Mgr. Petru Zemánkovi, Ph.D. za cenné rady, podnětné připomínky, ochotu, trpělivost a v neposlední řadě za čas, který mi při psaní práce věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 24. května 2018 . . . .

Jana Zuzaňáková

Obsah

Úvod

Diferenciální rovnice jsou jedním z nástrojů, pomocí kterého můžeme matematicky popsat jak přírodní, tak i např. ekonomické děje. Tato bakalářská práce se zabývá různými typy diferenciálních rovnic, jejichž výběr byl určen vybranými aplikacemi. Text práce je členěn do pěti kapitol, přičemž každá z nich se zabývá jedním typem diferenciálních rovnic. Všechny kapitoly mají stejnou strukturu. Na začátku každé kapitoly je uvedena teoretická část, ve které jsou definovány nezbytné pojmy. Hlavními zdroji teoretických částí práce jsou [14], [20], [29], [32], [41], [51]. V každé kapitole je také uveden postup řešení daného typu rovnice včetně vzorového matematického příkladu. Následují řešené slovní úlohy vedoucí na jednotlivé typy rovnic. Tyto úlohy jsou těžištěm bakalářské práce, jejich hlavní zdroje jsou [6], [7], [12], [17], [23], [28], [44], [49], [55], [57], [65], [66]. Další použité zdroje jsou uvedeny v každé z kapitol.

První kapitola se zabývá diferenciálními rovnicemi se separovanými proměnnými. V úvodu kapitoly jsou také uvedeny základní pojmy, např. definice diferenciální rovnice či věta o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení. Tato kapitola zároveň obsahuje podkapitolu, jež se stručně věnuje homogenním rovnicím. Ve druhé kapitole je pozornost věnována lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Uvedeny jsou zde dvě metody řešení, a to metoda integračního faktoru a metoda variace konstant. Obě metody jsou ukázány na vzorových příkladech a procvičeny při řešení slovních úloh. Třetí kapitola se věnuje Bernoulliho rovnici. Ve čtvrté kapitole je ukázána exaktní diferenciální rovnice, jakož i pojem totálního diferenciálu či kmenové funkce. I zde najde čtenář dva řešené matematické příklady ilustrující dvě různé metody řešení. Závěrečná kapitola se zabývá lineárními diferenciálními rovnicemi 2. řádu s konstantními koeficienty. Čtenář se zde seznámí např. s pojmy fundamentálního systému řešení a wronskiánu či s metodami řešení tohoto typu rovnic, konkrétně metodou variace konstant a metodou neurčitých koeficientů.

V textu je předpokládána základní znalost matematické analýzy, a to především diferenciálního a integrálního počtu. Cílem této práce je ukázat různé aplikace diferenciálních rovnic. Čtenář se v práci seznámí jak s fyzikálními aplikacemi, tak s úlohami z oblastí jako jsou ekonomie, marketing, biologie, chemie či psychologie. Práce může zároveň sloužit jako doplňující materiál k předmětu Matematická analýza II.

Práce je vysázena v LaTeXu, k vytvoření ilustrací a grafů doplňujících text byly využity programy GeoGebra a Circuitikz, kořeny transcendentních rovnic byly vypočteny s využitím softwaru Maxima.

Kapitola 1

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice 1.1. Buď F funkce, jejíž definiční obor G je podmnožinou trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*. Nebude-li s rovnicí současně uveden obor G, budeme jím rozumět množinu všech bodů, pro něž je funkce F definována. *Řešením* této rovnice se rozumí funkce $y(x)$, která je definována v nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a pro všechna $x \in J$ splňuje

$$[x, y(x), y'(x)] \in G \qquad \text{a} \qquad F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

Není-li interval J otevřený, pak v každém krajním bodě intervalu J značí $y'(x)$ příslušnou jednostrannou derivaci. *Obecným řešením* diferenciální rovnice (1.1) rozumíme každé její řešení $y = y(x,c)$, z něhož volbou parametru c obdržíme řešení. *Partikulární řešení* je řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1.1), v němž mají integrační konstanty konkrétní číselnou hodnotu. *Triviálním řešením* nazýváme řešení, které je identicky rovno nule, tj. $y \equiv 0$.

Poznámka 1.2. Výrazem y' rozumíme podíl diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Při řešení diferenciálních rovnic prvního řádu, v nichž se proměnná x vyskytuje pouze v první mocnině a hledaná funkce y se vyskytuje v argumentu elementárních funkcí, je možné využít tzv. *metodu záměny proměnných*. Výraz y' je poté výhodné zapsat jako $y' = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'}$. Tímto způsobem můžeme rovnici převést na rovnici jiného typu, jejíž řešení umíme explicitně určit, a hledané řešení je ve tvaru $x(y)$.

Termín *obyčejná* v Definici 1.1 značí, že hledaná funkce je funkcí jedné proměnné. Dalším typem diferenciálních rovnic jsou rovnice parciální. Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic závisí u rovnic parciálních hledaná funkce na více proměnných.

Poznámka 1.3. Obdobně definujeme diferenciální rovnici n-tého řádu

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0,$$

je-li F definována na nějaké oblasti $(n+1)$–rozměrného prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definice 1.4. Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (1.1) se nazývá *rozřešená vzhledem k derivaci*, pokud ji lze upravit do tvaru

$$y' = f(x,y).$$

V opačném případě se nazývá *nerozřešená vzhledem k derivaci*.

Definice 1.5. Nechť $(x_0,y_0) \in G$. Úloha najít řešení diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ splňující tzv. *počáteční podmínku* $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční (Cauchyova) úloha* nebo *počáteční (Cauchyho) problém.*

Věta 1.6. *Nechť funkce $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ je spojitá, přičemž $-\infty \le a < b \le \infty$ a zároveň $-\infty \le c < d \le \infty$. Nechť $[x_0,y_0] \in (a,b) \times (c,d)$, pak pro počáteční problém*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

existuje řešení $y(x)$ s maximálním definičním oborem $(\alpha,\omega) \subset (a,b)$, kde $\alpha < x_0 < \omega$. Jestliže $a < \alpha$, pak

$$\lim_{x\to\alpha^+} y(x) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{x\to\alpha^+} y(x) = d,$$

a pokud $\omega < b$, potom

$$\lim_{x\to\omega^-} y(x) = c \quad \textit{nebo} \quad \lim_{x\to\omega^-} y(x) = d.$$

Jsou–li navíc parciální derivace funkce f vzhledem k y, tj. $\frac{\partial f}{\partial y}$, spojité na $(a,b) \times (c,d)$, pak má počáteční problém (1.2) jediné řešení.

Část věty pojednávající o existenci řešení rovnice vychází z Peanovy věty, jejíž důkaz můžeme najít např. v [2]. Druhá část hovořící o jednoznačnosti řešení vychází z věty Picardovy–Lindelofovy. Tuto větu můžeme dokázat se znalostí Banachova principu o pevném bodu. Důkaz lze najít např. v [32].

V literatuře (např. v [8] či [11]) se také můžeme setkat s nahrazením podmínky spojitosti parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ lipschitzovou podmínkou. Pokud má funkce $f(x,y)$ parciální derivaci podle y, potom předpoklad, že funkce $f(x,y)$ je lipschitzovská v y znamená, že tato derivace je ohraničená lipschitzovou konstantou $L : \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L$. Naopak, z předpokladu spojitosti parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle y plyne omezenost této parciální derivace a tím i lipschitzovskost. Tyto dva předpoklady jsou tedy v tomto směru ekvivalentní.

Definice 1.7. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{1.3}$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou spojité funkce na (nějakých) otevřených intervalech, nazýváme *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*. Jejich speciálním případem jsou *autonomní diferenciální rovnice*, ve kterých je $f(x) \equiv c$.

Důkaz následujícího tvrzení lze najít např. v [29].

Věta 1.8. *Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ (přičemž může nastat $a = -\infty$, $c = -\infty$, $b = \infty$, $d = \infty$) jsou spojité funkce takové, že $g(y) \neq 0$ na (c,d). Pak má počáteční problém*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1.4}$$

kde $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, právě jedno řešení, které je určeno implicitně vzorcem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Na následujícím příkladu si ukážeme, co se stane, nejsou–li splněny předpoklady předchozích vět.

Poznámka 1.9 (Singulární řešení). Počáteční problém (1.4) nemusí mít vždy jediné řešení. Existují i řešení, která mají porušenou jednoznačnost v každém bodě svého definičního oboru, tato řešení se nazývají *singulární řešení. Singulární řešení* nejsme schopni obdržet žádnou volbou parametru c v obecném řešení. Příklad singulárního řešení si nyní ukážeme na příkladu autonomní diferenciální rovnice $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 0$. Řešit takovéto rovnice se naučíme dále v textu, nyní si pouze chceme ilustrovat nejednoznačnost řešení. Řešením této rovnice je

$$y_1 = (x-1)^3, \qquad \text{neboť pro něj platí} \qquad y_1' = 3(x-1)^2 = 3y_1^{\frac{2}{3}},$$

a zároveň splňuje počáteční podmínku, neboť $y_1(1) = 0$. Tato rovnice má ale i triviální řešení $y_2 \equiv 0$, které je pro uvedený příklad singulárním řešením. V tomto příkladě nebyl splněn předpoklad Věty 1.6 o spojitosti parciální derivace funkce $f = 3y^{\frac{2}{3}}$, neboť v bodě $y = 0$ není výraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}}$ definován. V kontextu Věty 1.8 není splněn předpoklad nenulovosti funkce $g(y)$. Uvedený počáteční problém tedy nemá jediné řešení.

V následující poznámce popíšeme obecný způsob řešení rovnice (1.3).

Poznámka 1.10 (Řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými). Nejprve najdeme nulový bod funkce $g(y)$, tj. řešení rovnice, pro která je $g(y) = 0$ (pouze tato řešení mohou být singulární). Řešení y taková, že $g(y) \neq 0$, nalezneme rozepsáním $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a separováním proměnných, kterým rovnici upravíme do tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$. Tuto rovnici následně zintegrujeme, čímž získáme obecné řešení. Pokud je to možné, vyjádříme z této rovnice y a jestliže lze získat konstantní řešení vhodnou volbou integrační konstanty c, zahrneme toto řešení do řešení obecného. Tento postup ukážeme na vzorovém Příkladu 1.1. Při řešení autonomní rovnice postupujeme obdobně, při separaci proměnných však na pravé straně získáme integrál z konstanty. Podrobnější postup řešení autonomní rovnice bude předmětem Poznámky 1.11.

Příklad 1.1. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y}{1+x}.$$

Řešení. Nejprve najdeme nulový bod funkce $g(y)$, kterým je v tomto případě $y = 0$. Tato diferenciální rovnice má tedy triviální řešení, což musíme zohlednit ve výsledném řešení. Poté rovnici za předpokladu, že $y \neq 0$, upravíme separací proměnných do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

Odtud integrováním obou stran uvedené rovnosti získáme

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Odlogaritmováním obou stran pak dostaneme

$$|y| = k|1+x|, \qquad k = \mathrm{e}^c > 0,$$

z čehož po odstranění absolutní hodnoty plyne

$$y = l(1+x), \qquad l = \pm\mathrm{e}^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Současně samozřejmě musíme uvážit, že hodnoty, které může integrační konstanta nabýt, se s úpravami mění také, což je ve výpočtu naznačeno. Takto podrobné značení integrační konstanty již v následujících příkladech používat nebudeme, písmeno c bude označovat její všechny možné tvary. Řešení $y(x) \equiv 0$ můžeme získat volbou konstanty $l = 0$. Rozšíříme-li tedy definiční obor l na celé $\mathbb{R}$, získáme obecné řešení $y(x) = l(1+x),\ l \in \mathbb{R}$.

△

Poznámka 1.11 (Autonomní rovnice). Autonomní rovnici $y' = c \cdot g(y)$ řešíme obdobně jako rovnici se separovanými proměnnými, přičemž integrál na pravé straně je integrálem z konstanty. Navíc diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(ax + by + c)$$

lze pomocí substituce $z = ax + by + c$ převést na autonomní rovnici. Derivací podle x získáme $z' = a + by'$, z čehož dosazením za y' dostaneme autonomní diferenciální rovnici v proměnné z, která je ve tvaru

$$\frac{z' - a}{b} = z, \qquad \text{neboli} \qquad z' = bz + a = f(z).$$

Tento postup si nyní ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad 1.2. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = x + y + 1.$$

Řešení. Nejprve zavedeme substituci $z = x + y + 1$. Derivací podle x poté získáme

$$z' = 1 + y', \quad \text{z čehož dosazením za } y' \text{ dostaneme} \quad z' = 1 + z.$$

Nulový bod pravé strany je v tomto případě bod $z = -1$, pro původní proměnnou tedy $y = -x - 2$. Toto řešení pak musíme zohlednit ve výsledném řešení. Rozepsáním $z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 + z, \quad \text{z čehož úpravou získáme} \quad \frac{\mathrm{d}z}{1+z} = \mathrm{d}x.$$

Integrováním obou stran rovnice obdržíme

$$\ln|1+z| = x + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

což obdobně jako v Příkladu 1.1 upravíme na

$$z = c\mathrm{e}^x - 1, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po dosazení za z a zahrnutí výše uvedeného konstantního řešení $y = -x - 2$ získáme obecné řešení ve tvaru

$$y = c\mathrm{e}^x - x - 2, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

△

V teorii jsme zatím uvažovali $y = y(x)$, v následujících příkladech se setkáme s aplikacemi, ve kterých jsou závisle proměnné například funkcí času, což označíme $y = y(t)$. V zadání i řešení slovních úloh bude vždy naznačeno, jaká proměnná je závislá a jaká nezávislá. Postup uvedený výše na matematickém příkladu nyní využijeme při řešení slovních úloh. Hlavními zdroji úloh v této kapitole jsou [3], [4], [12], [13], [16], [18], [27], [28], [35], [37], [40], [41], [54], [56], [57], [59], [61], [65]. Použitá data o České republice je možné najít v [72].

Začneme nejjednoduššími autonomními rovnicemi, které můžeme najít v biologických, technických i dalších aplikacích, poté přejdeme ke složitějším příkladům vedoucím na rovnice se separovanými proměnnými. Příklad, který následuje, je typickou aplikací slovní úlohy vedoucí na autonomní rovnici. Jedná se o popis změny velikosti populace, která roste přímo úměrně své velikosti. Tento předpoklad se může zdát nerealistický, ale pro krátký časový úsek nebo pro populace bakterií, které rostou v laboratorním prostředí (tj. populace, které nejsou omezeny nedostatkem zdrojů nebo místa), můžeme takovýto vývoj přibližně předpokládat.

Příklad 1.3. Růst populace bakterií

Tempo růstu populace bakterií je přímo úměrné velikosti této populace. Jestliže se z původního počtu 100 jedinců populace rozrostla na 400 za 24 hodin určete, jaká byla velikost populace po 12 hodinách.

Řešení. Označme $y = y(t)$ množství bakterií v čase t měřeném v hodinách a $k > 0$ konstantu úměrnosti. Ze zadání sestavíme rovnici

$$y(t+h) = y(t) + ky(t) \cdot h \qquad \text{neboli} \qquad y(t+h) - y(t) = ky(t) \cdot h,$$

která říká, že rozdíl mezi velikostí populace v čase $t + h$ a v čase t je přímo úměrný velikosti této populace a tomuto času. Tuto rovnici nyní upravíme na

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = ky(t),$$

přičemž limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme na levé straně derivaci $y'(t)$. Hledaná diferenciální rovnice je ve tvaru

$$y'(t) = ky(t)$$

a jejím konstantním řešením je triviální řešení. Rozepsáním $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ a úpravou pak získáme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = k\,\mathrm{d}t, \quad \text{z čehož plyne} \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = k \int \mathrm{d}t.$$

Integrováním obou stran rovnice dostaneme

$$\ln|y| = kt + c,$$

z čehož úpravou obdržíme

$$y = c\mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R},$$

přičemž volbou $c = 0$ získáme triviální řešení, a proto můžeme psát $c \in \mathbb{R}$. Pozorovaná populace tedy roste exponenciálně. Pro výpočet konstant k a c využijeme počáteční podmínky ze zadání, tj.

$$100 = c\mathrm{e}^{k\cdot 0}, \quad 400 = c\mathrm{e}^{k\cdot 24},$$

čímž získáme $c = 100$ a $\mathrm{e}^{k\cdot 24} = 4$, z čehož logaritmováním $k \doteq 0,05776$. Hledaný počet bakterií v čase $t = 12$ je $y(12) \doteq 100\,\mathrm{e}^{0,05776} \doteq 200$.

$\triangle$

Tento jednoduchý model můžeme v literatuře (např. v [7] či [44]) najít i pod názvem Malthusův či Malthusiánský model. Zajímavostí je, že myšlenky Thomase Malthuse, klasického anglického ekonoma žijícího na přelomu 19. století, tomuto modelu plně neodpovídají. Malthusova teorie se opírala o fakt, že populace se vyvíjí řadou geometrickou a potraviny řadou aritmetickou. Ve svém pozdějším díle Malthus došel k závěru, že populace se musí též vyvíjet řadou aritmetickou, tedy stejně jako životní podmínky. Roste–li populace rychleji, dochází k větší úmrtnosti z důvodu horších životních podmínek. Malthus tedy připouští pouze takový vývoj populace, při kterém jsou životní podmínky jedince stále stejné a lidé žijí na pokraji chudoby. Zlepšení životních podmínek je podle něj možné dosáhnout pouze jakousi morální zdrženlivostí.

S využitím modelu popsaného výše můžeme řešit i příklad populace, která se zmenšuje rychlostí přímo úměrnou své velikosti, např. kvůli nedostatku zdrojů. Dalším způsobem modelování populace je Gompertzův model užívaný rovněž ke znázornění průběhu zájmu o nově uvedený výrobek. S Gompertzovým modelem se můžeme setkat také při popisu nádorového bujení, kde $P = P(t)$ reprezentuje počet nádorových buněk v čase t. Tento model si nyní ukažme na příkladu populace ryb.

Příklad 1.4. Gompertzův model populace

Gompertzova diferenciální rovnice je ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\ln\frac{M}{P},$$

kde M je nosná kapacita prostředí a $P = P(t)$ počet jedinců v čase t měřeném v letech. Jestliže je v rybníce původně 400 ryb a jejich počet se za první rok ztrojnásobil, určete počet ryb za 7 let za předpokladu, že nosná kapacita je 10 000 ryb.

Řešení. Gompertzovu diferenciální rovnici vyřešíme s pomocí substituce

$$y = \ln\frac{P}{M} = \ln P - \ln M.$$

Derivací podle t a dosazením za P' získáme

$$y' = \frac{P'}{P} = k\ln\frac{M}{P} = -k\ln\frac{P}{M} = -ky,$$

což je autonomní rovnice. Nulový bod pravé strany $y = 0$ odpovídá pro původní proměnnou konstantnímu řešení $P = M$. Tuto rovnici řešíme separací proměnných a následnou integrací, tj.

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -k\,\mathrm{d}t,$$

čímž získáme

$$\ln|y| = -kt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení (se zahrnutím triviálního řešení $y \equiv 0$) je ve tvaru

$$y = c\mathrm{e}^{-kt}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Dosazením substituovaného výrazu dostaneme

$$\ln\frac{P}{M} = c\mathrm{e}^{-kt}, \qquad \text{z čehož odlogaritmováním obdržíme} \qquad \frac{P}{M} = \mathrm{e}^{c\mathrm{e}^{-kt}}.$$

Ponechme pro jednoduchost rovnici v tomto tvaru a vypočtěme hodnoty konstant c a k. Ze zadání víme, že $M = 10\,000$, $P(0) = 400$ a $P(1) = 1\,200$. S využitím těchto podmínek můžeme sestavit soustavu rovnic, tj.

$$\frac{400}{10\,000} = \mathrm{e}^{c}, \qquad \text{z čehož úpravou dostaneme} \qquad c = \ln\frac{1}{25} = -2\ln 5,$$

$$\frac{1\,200}{10\,000} = \mathrm{e}^{-2\ln 5\cdot\mathrm{e}^{-k}}, \qquad \text{z čehož úpravou získáme} \qquad k = -\ln\frac{\ln\frac{12}{100}}{-2\ln 5} \doteq 0{,}41749.$$

Za 7 let bude v rybníce

$$P = 10\,000\mathrm{e}^{-2\ln 5\cdot\mathrm{e}^{-0{,}41749\cdot 7}} \doteq 8\,410 \text{ ryb.}$$

△

Další rozšíření Gompertzova modelu je možné najít např. v [58]. Následuje další typická aplikace tohoto typu rovnic, a to radioaktivní rozpad, který je předmětem následujících dvou příkladů.

Příklad 1.5. Následky jaderné havárie
V březnu roku 2011 se kvůli havárii jaderné elektrárny ve Fukušimě dostaly do ovzduší radioaktivní izotopy jódu I^{131} s poločasem rozpadu 8 dní a cesia Cs^{137} s poločasem rozpadu 30 let. Za jak dlouho se rozpadne 99 % tohoto radioaktivního materiálu?

Řešení. Nechť $y = y(t)$ je množství jódu I^{131} v čase t měřeném ve dnech, přičemž $y(0) = y_0$. Označme $k > 0$ konstantu úměrnosti rozpadu. Podobně jako v předchozím příkladu si zapíšeme změnu $y(t+h) - y(t) = -ky(t)h$, ze které limitním přechodem pro h jdoucí k nule, tj.

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = -ky(t),$$

dostaneme diferenciální rovnici

$$y'(t) = -ky(t).$$

Jedním z řešení této rovnice je opět triviální řešení $y \equiv 0$. Tuto rovnici dále řešíme obdobně jako v předchozím případě separací proměnných a integrováním, kterým získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -k\mathrm{d}t, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \ln|y| = -kt + c.$$

Obecné řešení (se zahrnutím triviálního řešení) můžeme zapsat ve tvaru

$$y = c\mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R},$$

přičemž z podmínky $y(0) = y_0$ získáme hodnotu integrační konstanty $c = y_0$. Úlohu vyřešme nejprve pro jód I^{131}, pro jehož poločas rozpadu platí

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 \mathrm{e}^{-8k}.$$

Z této rovnice logaritmováním získáme konstantu úměrnosti $k = \frac{\ln 2}{8}$. S využitím těchto znalostí již můžeme určit, za jak dlouho se rozpadne 99 % jódu I^{131}, tj. hledáme t, které vyhovuje rovnici

$$0{,}01 y_0 = y_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{8} t}, \qquad \text{což je} \qquad t \doteq 53{,}151 \text{ dní}.$$

Řešení úlohy pro cesium Cs^{137} ponecháme na čtenáři. △

Příklad 1.6. Radiokarbonové datování
Metodou urychlovačové hmotnostní spektrometrie (AMS) provedenou na kosti a tkáni ledového muže Ötziho nalezeného v roce 1991 bylo zjištěno, že obsah uhlíku C^{14} se snížil na 53 % původní hodnoty, viz [34]. Určete stáří tohoto nálezu za předpokladu, že poločas rozpadu uhlíku C^{14} je 5 730 let.

Řešení. Nechť $y = y(t)$ je množství uhlíku C^{14} v čase t měřeném v letech, přičemž $y(0) = y_0$, a $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Ze zadání pak stejně jako v předchozím příkladu sestavíme rovnici

$$y'(t) = -ky(t).$$

Konstantním řešením této rovnice je triviální řešení $y \equiv 0$. Při řešení pak postupujeme obdobně jako v předchozím případě separací proměnných a integrováním, kterým získáme

$$\ln|y| = -kt + c,$$

obecné řešení je tedy

$$y = c\mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R},$$

přičemž volbou $c = 0$ obdržíme triviální řešení. Z podmínky $y(0) = y_0$ pak dostaneme $c = y_0$. Ze zadání známe poločas rozpadu, pro který platí

$$\frac{1}{2}y_0 = y_0\mathrm{e}^{-k\cdot 5730}.$$

Z této rovnice logaritmováním získáme konstantu úměrnosti $k = \frac{\ln 2}{5730}$. Ze zadání víme, že obsah uhlíku C^{14} se snížil na 53 % své původní hodnoty, hledáme tedy čas t, který vyhovuje rovnici

$$0,53y_0 = y_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5730}t}, \qquad \text{což je} \qquad t \doteq 5\,248 \text{ let.}$$

Ötzi tedy zemřel přibližně 3 257 let před naším letopočtem. △

Příklad 1.7. Vypařování kapky vody
Kulová kapka vody se vypařuje úměrně svému povrchu. Její poloměr je původně 3 mm, po půl hodině 2 mm. Najděte výraz pro poloměr jako funkci času. Kdy se kapka vypaří?

Řešení. Označme $k > 0$ konstantu úměrnosti, $V = V(t)$ objem kapky v mm^3, $S = S(t)$ povrch kapky v mm^2 a $r = r(t)$ její poloměr v milimetrech, přičemž vše uvažujeme v čase t měřeném v hodinách. Objem kapky v čase $t+h$ vyjádříme jako $V(t+h) = V(t) - kS(t)h$. Úpravou této rovnosti získáme

$$\frac{V(t+h) - V(t)}{h} = -kS(t),$$

z čehož limitním přechodem pro h jdoucí k nule již můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS.$$

Nás ale zajímá vztah pro poloměr, tedy $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Jelikož pro povrch a objem koule platí

$$S = 4\pi r^2 \qquad \text{a} \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

můžeme podíl $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Pro vztah $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},$$

přičemž $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ můžeme za pomoci původní diferenciální rovnice a vzorce pro povrch koule vyjádřit jako $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k(4\pi r^2)$. S využitím všech výše uvedených informací získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\left[-k(4\pi r^2)\right] \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k.$$

Tuto rovnici vyřešíme integrováním obou stran

$$\int \mathrm{d}r = \int -k\mathrm{d}t,$$

kterým dostaneme

$$r(t) = -kt + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Z daných počátečních podmínek pak získáme rovnice

$$r(0) = 3 = -k\cdot 0 + c \quad a \quad r(0,5) = 2 = -k\cdot 0,5 + c,$$

ze kterých vypočítáme hodnoty konstant $k = 2$ a $c = 3$. Kapka se vypaří v čase t takovém, že platí rovnost

$$0 = -2t + 3, \quad \text{což je} \quad t = \frac{3}{2} \text{ hodiny.}$$

△

Výsledek, ke kterému jsme dospěli, je poměrně očekávatelný. Zajímavé je ale odvození vztahu pro změnu poloměru, který říká, že jestliže se kapka vypařuje úměrně svému povrchu, zmenšuje se její poloměr stále stejně rychle, nezávisle na své velikosti.

Příklad 1.8. Chemická reakce

Sloučenina C je tvořena látkami A a B, přičemž C se při chemické reakci tvoří tak, že na každý gram látky A připadají 4 gramy látky B. Uvažme situaci, kdy se za 10 minut reakce vytvoří 30 gramů sloučeniny C. Určete množství sloučeniny C v čase t, jestliže rychlost reakce je přímo úměrná součinu zbývajících množství látek A a B. Zároveň předpokládejte, že látky A bylo původně 50 gramů a látky B 32 gramů. Kolik gramů sloučeniny C máme po 15 minutách reakce?

Řešení. Označme $y = y(t)$ množství látky C v gramech v čase t měřeném v minutách. Ze zadání víme, že $y(0) = 0$ a $y(10) = 30$. Zároveň víme, že k vytvoření y gramů sloučeniny C obecně potřebujeme $\frac{1}{5}y$ gramů látky A a $\frac{4}{5}y$ gramů látky B. Zbývající množství látek A a B v reakci můžeme vyjádřit jako

$$50 - \frac{1}{5}y \quad \text{a} \quad 32 - \frac{4}{5}y.$$

Nyní již můžeme sestavit diferenciální rovnici, která odpovídá této úloze. Množství sloučeniny v čase $t+h$ zapíšeme jako $y(t+h) = y(t) + k(50 - \frac{1}{5}y)(32 - \frac{4}{5}y) \cdot h$. Úpravou a limitním přechodem pro h jdoucí k nule pak získáme diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k\left(50 - \frac{1}{5}y\right)\left(32 - \frac{4}{5}y\right),$$

neboli (pro zjednodušení následujících výpočtů)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k(250 - y)(40 - y).$$

Konstantní řešení jsou v tomto případě $y_1 = 250$ a $y_2 = 40$. Jedná se o autonomní rovnici, kterou vyřešíme obdobně jako v předchozích příkladech, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(250-y)(40-y)} = \int k\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

integrál na levé straně vyřešíme např. doplněním výrazu ve jmenovateli na čtverec a využitím vzorce $\int \frac{1}{a^2-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$. Máme tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{(250-y)(40-y)} &= \int \frac{1}{(y-145)^2 - 11025}\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{105^2 - (y-145)^2}\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{210}\ln\left|\frac{105 + y - 145}{105 - (y-145)}\right| + c = -\frac{1}{210}\ln\left|\frac{y-40}{250-y}\right| + c.\end{aligned}$$

Řešení rovnice (1.5) tedy můžeme zapsat jako

$$-\frac{1}{210}\ln\left|\frac{y-40}{250-y}\right| = kt + c,$$

z čehož úpravami získáme

$$y = \frac{250c\mathrm{e}^{-210kt} + 40}{1 + c\mathrm{e}^{-210kt}}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Řešení $y_2 = 40$ získáme volbou $c = 0$ z obecného řešení, řešení $y_1 = 250$ je singulárním řešením, neboť jej nelze obdržet žádnou volbou konstanty c. S využitím podmínek ze zadání spočítáme hodnoty konstant c a k jako

$$0 = \frac{250c + 40}{1+c}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = -\frac{4}{25},$$

$$30 = \frac{-40\mathrm{e}^{-2100k} + 40}{1 - \frac{4}{25}\mathrm{e}^{-2100k}}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad k = \frac{\ln\frac{25}{88}}{-2100} \doteq 5{,}99267 \cdot 10^{-4}.$$

Po 15 minutách reakce budeme mít

$$y(15) = \frac{-40\mathrm{e}^{-210\cdot 5{,}99267\cdot 10^{-4}\cdot 15} + 40}{1 - \frac{4}{25}\mathrm{e}^{-210\cdot 5{,}99267\cdot 10^{-4}\cdot 15}} \doteq 34{,}786 \text{ gramu sloučeniny C.}$$

△

Příklad 1.9. Intenzita světelného paprsku ve vodě
Světelný paprsek procházející vodou je jí částečně pohlcován. Pokles intenzity světla tohoto paprsku při průchodu prostředím je úměrný součinu velikosti intenzity dopadajícího světla a tloušťce vrstvy, kterou prochází. V hloubce 1 metr je intenzita paprsku směřujícího kolmo dolů rovna třem čtvrtinám jeho povrchové intenzity. Jaká je intenzita paprsku v hloubce 5 metrů, jestliže platí počáteční podmínka $Q(0) = Q_0$?

Řešení. Označme $Q = Q(x)$ intenzitu paprsku v hloubce x metrů a $k > 0$ konstantu úměrnosti. Ze zadání víme, že pro intenzitu paprsku procházejícího vrstvou vody $x+h$ platí $Q(x+h) = Q(x) - khQ(x)$, z čehož úpravou získáme $\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h} = -kQ(x)$. Limitním přechodem pro h jdoucí do nuly získáme na levé straně derivaci $Q'(x)$, tj.

$$\lim_{h\to 0} \frac{Q(x+h)-Q(x)}{h} = Q'(x) = -kQ(x),$$

což je autonomní rovnice, jejímž konstantním řešením je řešení triviální. Tuto rovnici řešíme způsobem, kterým jsme řešili již předcházející úlohy, a to separací proměnných

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -k\mathrm{d}x,$$

a následnou integrací, kterou získáme

$$\ln|Q| = -kx + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad Q(x) = ce^{-kx}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení, které zahrnuje i řešení triviální. Jestliže $Q(1) = \frac{3}{4}Q_0$ a $c = Q_0$ (z podmínky $Q(0) = Q_0$), můžeme konstantu k vypočítat dosazením do obecného řešení

$$\frac{3}{4}Q_0 = Q_0 e^{-k},$$

z čehož úpravou a logaritmováním získáme $k = \ln\frac{4}{3} \doteq 0,287682$. V pětimetrové hloubce je intenzita paprsku

$$Q(5) = Q_0 e^{-\ln\frac{4}{3}\cdot 5} = Q_0 e^{\ln\frac{3}{4}\cdot 5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \doteq 0,2373\, Q_0,$$

tj. necelých 24 % jeho povrchové intenzity.

△

Příklad 1.10. Železná koule
Uvažme dutou železnou kouli v klidovém stavu, kdy její teplota nezávisí na čase, ale může se lišit v různých bodech koule. Za předpokladu, že vnitřní poloměr koule je 6 cm a teplota vnitřního povrchu je 200 °C a že vnější poloměr je 10 cm a teplota vnějšího povrchu je 100 °C, určete, jaká je teplota 8 cm od středu koule, jestliže víte, že množství tepla Q procházející povrchem o obsahu A je přímo úměrné součinu tohoto obsahu a teplotního gradientu $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.

Řešení. S využitím informací ze zadání můžeme psát

$$Q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

kde $T = T(r)$ je teplota v r, k je tepelná vodivost a r je vzdálenost od středu koule měřená v centimetrech. Pro kouli s poloměrem r je povrch $A = 4\pi r^2$. Ze zadání víme, že koule je v klidovém stavu, její teplota je tedy konstantní. Diferenciální rovnice je tedy ve tvaru

$$Q = -k4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$

Separací proměnných pak získáme

$$\int Q\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \int -4k\pi\,\mathrm{d}T,$$

z čehož integrací a úpravou

$$-\frac{Q}{r} = -4k\pi T + c.$$

Pro T tedy platí

$$T = \frac{\frac{Q}{r} - c}{4k\pi}.$$

Dosazením podmínek $T(6) = 200$ a $T(10) = 100$ obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$200 = \frac{\frac{Q}{6} - c}{4k\pi} \quad \text{a} \quad 100 = \frac{\frac{Q}{10} - c}{4k\pi},$$

jejíž podrobnější řešení ponecháme na čtenáři. Pro hodnoty konstant platí $Q = 6\,000k\pi$ a $c = 200k\pi$, a tedy

$$T = \frac{\frac{6\,000k\pi}{r} - 200k\pi}{4k\pi} = \frac{1\,500}{r} - 50.$$

Hledaná teplota ve vzdálenosti 8 centimetrů od středu koule je

$$T(8) = \frac{1\,500}{8} - 50 = 137{,}5\,^\circ\mathrm{C}.$$

Za povšimnutí stojí fakt, že tato teplota T nezávisí na konkrétní hodnotě konstanty tepelné vodivosti k. Závisí na ní ovšem jak hodnota integrační konstanty c, tak množství tepla Q.

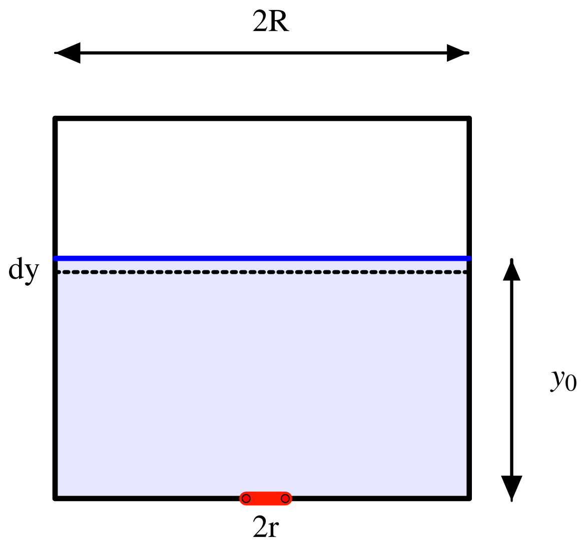
△

Příklad 1.11. Vypouštění válcové nádoby

Nádoba tvaru válce o poloměru R je naplněna kapalinou do určité výšky. Ve dně této nádoby je malý kruhový otvor o poloměru r, jejž v čase $t = 0$ uvolníme. Nechť funkce $y = y(t)$ popisuje výšku hladiny v nádobě v čase t měřeném v sekundách. Průřez válce je pro ilustraci znázorněn na Obrázku 1.1. Za předpokladu, že kapalina z nádoby vytéká do volného prostoru (tj. neuvažujeme okolní tlak), určete dobu T, za kterou kapalina z nádoby vyteče. Využijte při tom počáteční podmínku $y(0) = y_0$ a Torricelliho vztah pro výpočet rychlosti, který získáte z rovnosti objemových toků, tj.

$$mgy = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

kde m je hmotnost kapaliny v nádobě, v_2 je rychlost výtoku kapaliny z nádoby a $g \doteq 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ je gravitační zrychlení. S využitím nalezeného vztahu vypočtěte, za jak dlouho se vypustí válcová nádoba s poloměrem $R = 20$ cm, jestliže výška hladiny $y_0 = 2$ m a poloměr otvoru je $r = 2$ cm.



Obrázek 1.1: Průřez válce

Řešení. Naše úvaha může začít následovně. Objem v nádrži se za jednotku času zmenší o objem, který vyteče ven, což popisuje tzv. rovnice kontinuity, která je ve tvaru

$$Sv_1 = sv_2,$$

kde S je plocha kruhové podstavy nádrže, v_1 rychlost poklesu hladiny a s plocha kruhového otvoru ve dně nádoby. Pro rychlost v_1 můžeme psát

$$v_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

přičemž znaménko mínus je v rovnosti proto, že hladina s časem klesá (derivace $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ tedy bude s klesající hladinou záporná). Rychlost v_2 pak můžeme úpravou Torricelliho vztahu vyjádřit jako

$$v_2 = \sqrt{2gy}.$$

Dosazením těchto výrazů do rovnice kontinuity obdržíme

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}S = s\sqrt{2gy}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gy}.$$

Označme $k := \frac{s}{S}\sqrt{2g} > 0$. S touto úpravou získáme diferenciální rovnici

$$y' = -k\sqrt{y},$$

což je autonomní rovnice, kterou řešíme obdobně jako v předchozích příkladech. Jejím konstantním řešením je řešení triviální. Integrováním obou stran dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int -k\,\mathrm{d}t,$$

z čehož plyne

$$2\sqrt{y} = -kt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Řešení $y \equiv 0$ je v tomto případě singulárním řešením. Ze zadání víme, že T je doba, za kterou voda z nádoby vyteče. Obecné řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}(-kt + c)^2 & \text{pro } 0 \le t < T \\ 0 & \text{pro } t \ge T. \end{cases}$$

Hodnotu integrační konstanty c získáme dosazením počáteční podmínky $y(0) = y_0$ do obecného řešení, tj.

$$y_0 = \frac{1}{4}c^2, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = 2\sqrt{y_0}.$$

Čas T, za který se nádrž vyprázdní, pak získáme s využitím podmínky $y(T) = 0$, tj.

$$0 = \frac{1}{4}(-kT + 2\sqrt{y_0})^2, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad T = \frac{2\sqrt{y_0}}{k}.$$

Pro náš příklad ze zadání stačí nyní spočítat $k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}$, pro konkrétní hodnoty

$$k = \frac{0,0004\pi}{0,04\pi}\sqrt{2 \cdot 9,8} \doteq 0,04427,$$

kde jsou obsahy S a s uvedeny v metrech čtverečních. Hledaný čas T vypuštění nádoby je

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{0,0004\pi}{0,04\pi}\sqrt{2 \cdot 9,8}} \doteq 63,88766 \text{ sekundy.}$$

△

V následujících příkladech se podíváme na možnost využití diferenciálních rovnic v ekonomii. Začneme příkladem z finanční matematiky, konkrétně spojitým připisováním úroku. Poté se podíváme např. na model přizpůsobení cen a reklamní model.

Příklad 1.12. Spoření

Profesor P. začal šetřit na důchod hned po nástupu do práce, a proto má teď na spořícím účtu 500 000. Na tomto účtu je úrok 3 % připisován spojitě. Jestliže profesor plánuje odejít do důchodu za 10 let, kolik peněz může na účtu očekávat? Dále zjistěte, jak se tato částka změní, jestliže bude profesor v těchto deseti letech ukládat vždy 10 000 ročně. Na jak dlouho profesorovi naspořená částka vydrží, jestliže si bude po odchodu do důchodu vybírat každý rok 60 000?

Řešení. Označme $P = P(t)$ částku peněz na účtu v tisících v čase t měřeném v letech a k úrokovou míru. Ze zadání víme, že $P(0) = 500$ a že je úrok připisován spojitě. Po uplynutí času h můžeme na účtu očekávat částku $P(t+h) = P(t) + khP(t)$. Tento výraz nyní upravíme na

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = kP(t),$$

z čehož limitním přechodem pro h jdoucí k nule již můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP.$$

Tato rovnice má opět triviální řešení $P \equiv 0$. V našem případě je $k = 0{,}03$. Tuto rovnici řešíme obdobně jako rovnice předchozí separací proměnných, čímž získáme řešení

$$P(t) = c\mathrm{e}^{0{,}03t}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

které v sobě zahrnuje i řešení triviální. Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení rovnice, tedy

$$P(0) = 500 = c\mathrm{e}^{0{,}03 \cdot 0},$$

z čehož plyne, že $c = 500$. Při odchodu do důchodu může profesor očekávat částku

$$P(10) = 500\mathrm{e}^{0{,}03 \cdot 10} \doteq 675,$$

tedy necelých 675 000. Jestliže si profesor zároveň každý rok ukládá 10 000, bude mít v čase $t+h$ na účtu $P(t+h) = P(t) + 0{,}03P(t)h + 10h$. Z této rovnosti můžeme $P'(t)$ vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}03P + 10.$$

Jedná se o autonomní rovnici, jež vyřešíme separováním proměnných a integrováním, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{0{,}03P + 10} = \mathrm{d}t, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \frac{1}{0{,}03} \ln|0{,}03P + 10| = t + c.$$

Úpravou a odlogaritmováním poté dostaneme

$$0{,}03P + 10 = c\mathrm{e}^{0{,}03t}, \qquad \text{z čehož můžeme vyjádřit } P \text{ jako} \qquad P = -\frac{10}{0{,}03} + c\mathrm{e}^{0{,}03t}.$$

Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky do tohoto obecného řešení rovnice, tj.

$$P(0) = 500 = -\frac{10}{0{,}03} + c\mathrm{e}^{0{,}03 \cdot 0}, \qquad \text{a tedy} \qquad c = \frac{2500}{3}.$$

Při odchodu do důchodu může profesor očekávat částku

$$P(10) = -\frac{10}{0{,}03} + \frac{2500}{3}\mathrm{e}^{0{,}03 \cdot 10} \doteq 791{,}549.$$

Další část příkladu můžeme řešit obdobně. Hledaná diferenciální rovnice je v tomto případě ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}03P - 60,\ t > 10.$$

Vzhledem k podobnosti této rovnice a rovnice v první části příkladu ponecháme podrobnější řešení na čtenáři. Výsledek této rovnice je potom

$$P = \frac{60}{0,03} + c\mathrm{e}^{0,03t}, \text{ kde } c \doteq -895,242.$$

Toto c jsme získali dosazením podmínky $P(10) = 791,549$ z předchozí části příkladu. Zbývá tedy odpovědět na otázku, na jak dlouho mu naspořená částka při vybírání 60 000 ročně vydrží. Hledáme tedy t, které řeší rovnici

$$0 = 2000 - 895,242\mathrm{e}^{0,03t}.$$

Úpravou a logaritmováním se dostaneme k výrazu

$$t = \frac{\ln\left(\frac{2000}{895,242}\right)}{0,03}, \qquad \text{z čehož po vyčíslení dostaneme} \qquad t \doteq 26,79 \text{ let.}$$

Musíme ovšem vzít v úvahu, že prvních 10 let profesor stále ukládá 10 000 ročně. Profesorovi, který v 11. roce poprvé vybere 60 000 a pak s výběrem nepřestává do té doby, než mu úspory dojdou, naspořené peníze vydrží na téměř 17 let strávených v důchodu.

△

Příklad 1.13. Spoření II.
Klára začala ve svých 25 letech spořit na důchod tak, že na účet se spojitým připisováním úroků ukládala 15 tisíc ročně. Ve svých 40 letech se začala strachovat, zda se jí tímto způsobem podaří vysněnou částku milion korun naspořit do jejích 65 let, kdy má v plánu odejít do důchodu. Jestliže je úroková sazba 2 %, vypočtěte, zda se jí to podaří. Jestliže nepodaří, vypočtěte, kolik musí začít ročně ukládat, aby svého cíle dosáhla.

Řešení. Stejně jako v Příkladu 1.12 označme $P = P(t)$ částku peněz na účtu v tisících v čase t měřeném v letech. Ze zadání víme, že $P(0) = 0$ a že je úrok připisován spojitě, což můžeme obecně vyjádřit diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP.$$

Zároveň si Klára ročně ukládá 15 000, výsledná diferenciální rovnice je tedy ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0,02P + 15.$$

Jelikož se jedná o rovnici podobnou té z Příkladu 1.12, ponecháme její podrobnější řešení na čtenáři. Obecným řešením této rovnice je pak

$$P(t) = 750\left(\mathrm{e}^{0,02t} - 1\right).$$

Nejprve si vypočtěme, kolik peněz takto Klára za 40 let spoření naspoří, což zjistíme dosazením $t = 40$ do obecného řešení, čímž získáme

$$P(40) = 750\left(e^{0,02\cdot 40} - 1\right) \doteq 919,155696.$$

Ukládáním patnácti tisíc ročně svou vysněnou částku nenaspoří, ve 40 letech se tedy rozhodne ukládat víc. Označme nyní x částku, kterou bude ukládat pro $t > 15$. Diferenciální rovnici tedy můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} kP + 15 & \text{pro} \quad t \leq 15, \\ kP + x & \text{pro} \quad t > 15. \end{cases}$$

Podrobnější řešení druhé části rovnice opět ponechme na čtenáři. Její obecné řešení můžeme zapsat jako

$$P(t) = -\frac{x}{0,02} + c\mathrm{e}^{0,02t}. \tag{1.6}$$

Zároveň si můžeme spočítat, kolik peněz bude naspořeno po 15 letech, což nám pomůže při výpočtu integrační konstanty. Máme tedy

$$P(15) = 750\left(\mathrm{e}^{0,02\cdot 15} - 1\right) \doteq 262,3941.$$

Nyní vypočteme integrační konstantu c z rovnice (1.6) jako

$$262,3941 = -\frac{x}{0,02} + c\mathrm{e}^{0,02\cdot 15}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = \left(262,3941 + \frac{x}{0,02}\right)\mathrm{e}^{-0,3}.$$

Nyní zbývá dosadit tuto konstantu do obecného řešení rovnice, čímž dostaneme

$$P = -\frac{x}{0,02} + \left(262,3941 + \frac{x}{0,02}\right)\mathrm{e}^{-0,3}\mathrm{e}^{0,02t}.$$

Hledanou částku x vypočítáme dosazením podmínky $P(40) = 1000$, což je Klářin cíl. Získáme tedy rovnici

$$1000 = -\frac{x}{0,02} + \left(262,3941 + \frac{x}{0,02}\right)\mathrm{e}^{-0,3}\mathrm{e}^{0,02\cdot 40},$$

ze které úpravou obdržíme

$$x = \frac{0,02\left(1000 - 262,3941\mathrm{e}^{0,5}\right)}{\mathrm{e}^{0,5} - 1} \doteq 17,49242.$$

Pokud chce Klára dosáhnout svého cíle, musí od svých 40 let ročně ukládat přibližně 17 500.

△

Příklad 1.14. Rovnovážná cena

Označme $P = P(t)$ cenu zboží v čase t vyjádřeném v týdnech, $D = D(P) = a - bP$ poptávku po zboží při ceně P a $S = S(P) = \alpha + \beta P$ nabídku zboží při ceně P. Rychlost, s jakou se mění cena, je úměrná rozdílu mezi poptávkou a nabídkou. Najděte rovnici pro $P(t)$ v případě, že poptávka je dána rovnicí $D(P) = 25 - 2P$ a nabídka $S(P) = 5 + 3P$. Firmy ovšem tyto rovnice neznají a nastavily tak cenu za kus rovnu 5,5. V prvním týdnu prodeje zboží se prodejcům nedaří tak, jak předpokládali, a proto začnou cenu spojitě snižovat tak, že po prvním týdnu je $P = 5,4$. Za jak dlouho se trh dostane do bodu vzdáleného maximálně 5 % od rovnovážného stavu?

Řešení. Rovnovážná cena P^* je cena, která vyrovnává nabídku zboží a poptávku po něm, platí pro ni tedy

$$D(P^*) = S(P^*) = 25 - 2P^* = 5 + 3P^*, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad P^* = 4.$$

Ze zadání nyní sestavme rovnici

$$P(t+h) = P(t) + k(D-S)h, \qquad \text{ze které úpravou máme} \qquad \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = k(D-S).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí do nuly získáme hledanou diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k(D-S) = k\big[a - bP - (\alpha + \beta P)\big] = k\big[a - \alpha - P(b+\beta)\big].$$

Jde o autonomní rovnici, kterou vyřešíme nejprve obecně. Jejím konstantním řešením je $P = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$. Separováním proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{k\big[a - \alpha - P(b+\beta)\big]} = \int \mathrm{d}t,$$

z čehož získáme

$$-\frac{1}{k(b+\beta)} \ln|a - \alpha - P(b+\beta)| = t + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Odtud stejným postupem jako v předchozích úlohách dostaneme obecné řešení rovnice, které je nyní ve tvaru

$$P = \frac{a-\alpha}{b+\beta} - c\mathrm{e}^{-k(b+\beta)t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení v sobě zahrnuje i řešení konstantní. S využitím konkrétních hodnot ze zadání můžeme psát

$$P = \frac{25-5}{2+3} - c\mathrm{e}^{-5kt} = 4 - c\mathrm{e}^{-5kt}.$$

Zároveň víme, že $P(0) = 5{,}5$, z čehož plyne $c = -1{,}5$, a $P(1) = 5{,}4$, z čehož získáme rovnici pro k, tj.

$$5{,}4 = 4 + 1{,}5\mathrm{e}^{-5k} \qquad \text{a tedy} \qquad k = -\frac{\ln\frac{1{,}4}{1{,}5}}{5} \doteq 0{,}0138.$$

Nyní najdeme čas, ve kterém bude cena maximálně 5 % od své rovnovážné hodnoty. Vzhledem k tomu, že P je klesající funkce (ověření ponecháme na čtenáři), a $P(0) = 5{,}5$, nás zajímá čas, ve kterém cena klesne na hodnotu 4,2. Pro tento čas platí rovnost

$$4{,}2 = 4 + 1{,}5\mathrm{e}^{-5 \cdot 0{,}0138t}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad t = \frac{\ln\frac{4{,}2-4}{1{,}5}}{-5 \cdot 0{,}0138} \doteq 29{,}2 \text{ dne}.$$

△

Příklad 1.15. Nová měna
Malá země má v oběhu hotovost v celkové hodnotě 10 miliard. Každý den se do banky dostává 50 milionů z této hotovosti. Banka se rozhodne zavést novou měnu tak, že starou hotovost nahradí novou vždy, když se peníze dostanou do banky. Kdy se tímto způsobem obmění 90 % měny?

Řešení. Označme $y = y(t)$ hotovost nové měny v desítkách milionů v čase t měřeném ve dnech. Objem nové měny můžeme tedy vyjádřit jako $\frac{y}{1000}$, kde 1 000 je celkové množství hotovosti v oběhu. Do banky každý den přichází

$$\left(1 - \frac{y}{1000}\right) \cdot 5$$

staré měny, která bude nahrazena novou. Změnu $y(t)$ tedy můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \frac{y}{1000}\right) \cdot 5 = 5 - \frac{y}{200},$$

což je autonomní rovnice. Po nalezení konstantního řešení $y = 1000$ postupujeme při výpočtu obdobně jako u předchozích úloh, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{5 - \frac{y}{200}} = \int \mathrm{d}t,$$

z čehož plyne

$$-200 \ln \left| 5 - \frac{y}{200} \right| = t + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Úpravou této rovnice získáme obecné řešení ve tvaru

$$y = 200(5 - c\mathrm{e}^{-\frac{t}{200}}) = 200(5 - c\mathrm{e}^{-0{,}005t}), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

S využitím počáteční podmínky $y(0) = 0$ vypočteme hodnotu integrační konstanty c, tj.

$$0 = 200(5 - c\mathrm{e}^{-0{,}005\cdot 0}), \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = 5.$$

Hledané partikulární řešení je tedy ve tvaru

$$y = 1000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\big).$$

Nyní můžeme vypočítat, za jak dlouhou dobu bude 90 % měny vyměněno za novou. Hledáme tedy t, pro které platí

$$900 = 1000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}005t}\big), \qquad \text{což dává} \qquad t = \frac{\ln(1 - \frac{900}{1000})}{-0{,}005} \doteq 460{,}517 \text{ dne.}$$

△

Příklad 1.16. Nerloveův–Arrowův model
Nerloveův–Arrowův reklamní model je jednoduchý model, který popisuje vliv reklamy na počet lidí, kteří znají propagovaný produkt, viz [70] a [36]. Tento model říká, že změna počtu lidí, kteří znají produkt, roste přímo úměrně s intenzitou reklamy $q = q(t)$ a klesá přímo úměrně počtu lidí, kteří již produkt v čase t znají $A = A(t)$. Označme b konstantu popisující účinnost reklamy a k konstantu míry zapomínání. Firma se rozhodla propagovat svůj nový produkt rovnoměrně během celého roku, přičemž její rozpočet na reklamu je 12 000. Za předpokladu, že $k = \frac{1}{4}$ a $b = 25$, určete, kolik lidí zná produkt na konci roku. Jak se vaše odpověď změní, jestliže bude firma propagovat produkt pouze první polovinu roku? Může firma dosáhnout většího počtu lidí, kteří na konci roku znají produkt, jestliže rozpočet na reklamu rovnoměrně rozdělí do prvních h měsíců a po zbytek roku nebude produkt propagovat?

Řešení. Uvažujme t v měsících. Ze zadání můžeme sestavit rovnici

$$A(t+h) = A(t) + bq(t)h - kA(t)h,$$

ze které úpravou

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = bq(t) - kA(t).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí do nuly získáme diferenciální rovnici, kterou můžeme popsat změnu počtu lidí, kteří znají produkt. Tato rovnice je ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = bq - kA.$$

Pro konkrétní hodnoty ze zadání máme rovnici

$$A' = 25q - \frac{1}{4}A,$$

kde $q = \frac{12000}{12}$, neboť rozpočet na reklamu chce firma rozdělit rovnoměrně do celého roku a t bereme v měsících. Výslednou autonomní rovnici

$$A' = 25000 - \frac{1}{4}A,$$

jejíž konstantní řešení je $A = 100\,000$, vyřešíme separováním proměnných a následným integrováním, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{25000 - 0,25A} = \int \mathrm{d}t,$$

$$-\frac{1}{0,25}\ln|25000 - 0,25A| = t + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Po úpravě dostaneme pro A vztah

$$25000 - 0,25A = c\mathrm{e}^{-0,25t}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad A = 100\,000 - c\mathrm{e}^{-0,25t},\ c \in \mathbb{R}.$$

(Při této úpravě se hodnota i znaménko integrační konstanty mění, v našem výpočtu ji ale stále označujeme c.) V tomto obecném řešení je zahrnuto i řešení konstantní. Dosazením

$A(0) = 0$ do tohoto obecného řešení získáme hodnotu integrační konstanty $c = 100\,000$. Nyní již můžeme spočítat počet lidí, kteří produkt znají po jednom roce, ten je

$$A(12) = 100\,000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 12}\big) \doteq 95\,021 \text{ lidí.}$$

V tomto případě neustálého propagování produktu roste počet lidí, kteří ho znají, nelineárně a přibližuje se své maximální hodnotě $A_{max} = 100\,000$. Ve druhém případě bude firma propagovat produkt pouze v prvních 6 měsících, q tedy bude pro první polovinu roku $q = \frac{12\,000}{6}$, a pro druhou $q = 0$. Diferenciální rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$A' = \begin{cases} 50\,000 - \frac{1}{4}A & \text{pro } 0 < t \leq 6, \\ -\frac{1}{4}A & \text{pro } 6 < t \leq 12. \end{cases}$$

Řešení první části rovnice je obdobné jako v předchozí části příkladu, a proto jeho podrobnější postup ponecháme na čtenáři. Pro $t \leq 6$ platí $A(t) = 200\,000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25t}\big)$. Po 6 měsících propagace produkt zná

$$A(6) = 200\,000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 6}\big) \doteq 155\,373 \text{ lidí.}$$

Druhá část rovnice je opět autonomní rovnice, jejíž podrobnější řešení ponecháme na čtenáři. Řešením je funkce

$$A(t) = c\mathrm{e}^{-0{,}25t}.$$

Hodnotu integrační konstanty c můžeme získat ze znalosti počtu lidí, kteří znají produkt po 6 měsících, můžeme tedy psát

$$155\,373 = c\mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 6}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = 696\,333{,}4759.$$

Řešení rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$A(t) = \begin{cases} 200\,000\big(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25t}\big) & \text{pro } 0 \leq t \leq 6, \\ 696\,333{,}4759\,\mathrm{e}^{-0{,}25t} & \text{pro } 6 < t \leq 12. \end{cases}$$

V tomto případě bude po 12 měsících znát produkt pouze

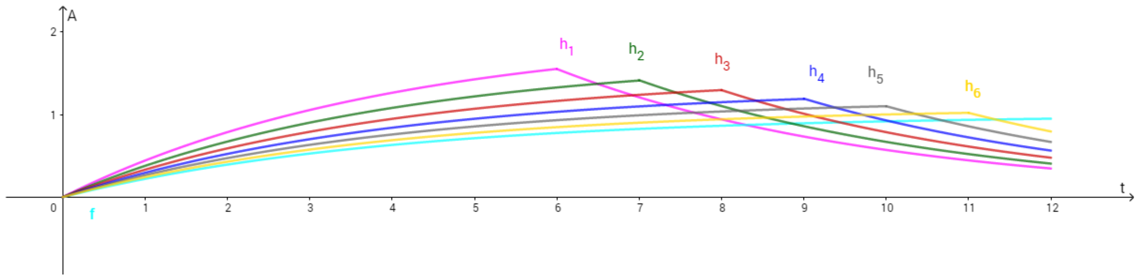
$$A(12) = 696\,333{,}4759\,\mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 12} \doteq 34\,668 \text{ lidí.}$$

Pro poslední část příkladu je diferenciální rovnice ve tvaru

$$A'(t) = \begin{cases} b\frac{12000}{h} - kA & \text{pro } 0 < t \leq h, \\ -\frac{1}{4}A & \text{pro } h < t \leq 12. \end{cases}$$

kde h je počet měsíců od začátku roku, ve kterých firma propaguje produkt. Řešením této rovnice je poté

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1200000}{h}(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25t}) & \text{pro } 0 < t \leq h, \\ c\mathrm{e}^{-0{,}25t} & \text{pro } h < t \leq 12. \end{cases}$$



Obrázek 1.2: Nerloveův–Arrowův reklamní model

Konkrétní hodnoty konstant c pro jednotlivé počty měsíců h bychom vypočítali obdobně jako v předchozí části příkladu. Na Obrázku 1.2 jsou zobrazeny křivky zobrazující počet lidí, kteří znají produkt, pro $h = 6, \dots, 11$ označené postupně $h_1, \dots, h_6$. Zároveň je zde křivka f, která zobrazuje počet lidí, kteří znají produkt, při propagaci během celého roku (tj. pro $h = 12$). Z tohoto grafu vidíme, že největšího dosahu reklamy na konci roku dosáhne firma právě propagací výrobku rozloženou rovnoměrně během celého roku.

△

V tomto příkladu jsme viděli, že v případě investování do reklamy nezáleží pouze na rozpočtu, ale také na časovém horizontu. Důležitý je samozřejmě cíl, který firma má, pro různé cíle jsou vhodné různé reklamní strategie. Např. dosáhnutí co největšího rozsahu reklamy by znamenalo volbu velké investice v průběhu krátkého časového okamžiku. V dalším příkladu se podíváme na další zajímavý problém, který lze popsat jednoduchou diferenciální rovnicí, a to příklad hubnutí.

Příklad 1.17. Hubnutí
Martina váží 60 kg a přijímá 1 600 kalorií denně, z čehož 850 její tělo využije automaticky bazálním metabolismem. Zároveň cvičením denně spálí 15 kalorií za každé kilo, které váží. Jestliže 1 kg tuku obsahuje 10 000 kalorií a jestliže je ukládání kalorií ve formě tuku 100% efektivní, najděte váhu Martiny jako funkci času. Kolik bude Martina vážit, jestliže se jí podaří jíst a cvičit podle plánu každý den v průběhu jednoho roku? Jaký je maximální počet kalorií, který může Martina denně přijmout, aby po půl roce vážila 55 kg?

Řešení. Označme $y = y(t)$ váhu Martiny v kilogramech v čase t uvažovaném ve dnech. Ze zadání víme, že počet kalorií, který Martina denně přijme a který není použit bazálním metabolismem, je $1600 - 850 = 750$. Zároveň denně spálí $15 \cdot y(t)$ kalorií cvičením. Z těchto informací můžeme sestavit rovnici změny jako $y(t+h) = y(t) + h\frac{750-15y(t)}{10000}$, kde dělením 10 000 dostaneme změnu v kilogramech. Úpravou této rovnice získáme

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{750 - 15y(t)}{10000},$$

z čehož limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{750 - 15y(t)}{10000}.$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$y' = 0,075 - 0,0015y.$$

Nulovým bodem pravé strany je $y = 50$. Dále tuto autonomní rovnici vyřešíme obdobně jako předchozí příklady, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{0,075 - 0,0015y} = \int \mathrm{d}t.$$

Integrováním získáme

$$-\frac{1}{0,0015} \ln|0,075 - 0,0015y| = t + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

z čehož úpravou dojdeme k obecnému řešení

$$y = 50 + c\mathrm{e}^{-0,0015t}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

ve kterém je zahrnuto i konstantní řešení. Dosazením počáteční podmínky $y(0) = 60$ vypočteme hodnotu integrační konstanty c, tj.

$$60 = 50 + c, \qquad \text{z čehož} \qquad c = 10.$$

Hledané partikulární řešení je tedy ve tvaru

$$y = 50 + 10\mathrm{e}^{-0,0015t}.$$

Jestliže bude Martina dodržovat výše uvedený plán, za rok bude její váha rovna

$$y(365) = 50 + 10\mathrm{e}^{-0,0015 \cdot 365} \doteq 55,78 \text{ kg}.$$

V druhé části úlohy sestavíme obdobným způsobem diferenciální rovnici

$$y' = \frac{M - 850 - 15y}{10000}.$$

Podrobnější řešení této rovnice ponecháme na čtenáři, obecné řešení můžeme zapsat jako

$$y = \frac{M}{15} - \frac{170}{3} + c\mathrm{e}^{-0,0015t}.$$

Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky $y(0) = 60$, z čehož pro c dostaneme

$$c = 60 - \frac{M}{15} + \frac{170}{3} = \frac{350}{3} - \frac{M}{15}.$$

Jestliže chce Martina po půl roce (tedy po 183 dnech) vážit 55 kg, musí denně přijímat M kalorií, pro které platí rovnost

$$55 = \frac{M}{15} - \frac{170}{3} + \left(\frac{350}{3} - \frac{M}{15}\right)\mathrm{e}^{-0,0015t},$$

což je přibližně $M = 1\,437,56$ kalorií denně.

$\triangle$

Příklad 1.18. Učení na zkoušku
Míra toho, jak se student učí nový materiál, je úměrná rozdílu mezi maximem toho, co se má naučit M a množstvím toho, co už v čase t měřeném v hodinách umí $A = A(t)$. Jestliže se Viktorie za 100 hodin naučí 50 % materiálů z Mikroekonomie 1, a chce umět nejméně 85 %, aby dostala dobrou známku, kolik hodin navíc musí učení věnovat?

Řešení. Označme $k > 0$ konstantu úměrnosti. Ze zadání pak sestavme výraz pro množství, které studentka umí v čase $t+h$, tj.

$$A(t+h) = A(t) + hk(M-A), \quad \text{z něhož úpravou získáme} \quad \frac{A(t+h)-A(t)}{h} = k(M-A).$$

Pro h jdoucí limitně k nule je na levé straně derivace $A'(t)$, hledaná diferenciální rovnice je tedy

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = k(M-A).$$

Nulový bod pravé strany je v tomto případě $A = M$. Rovnici vyřešme separací proměnných

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{M-A} = \int k\mathrm{d}t,$$

z čehož integrací a následnou úpravou získáme

$$\begin{aligned} -\ln|M-A| &= kt + c, \\ A &= M - c\mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

což je obecné řešení rovnice, ve kterém je zahrnuto i řešení konstantní. Za předpokladu, že $A(0) = 0$ a s využitím podmínky $A(100) = 0,5M$ vypočtěme konstanty c a k, tj.

$$A(0) = 0 = M - c\mathrm{e}^{-k\cdot 0}, \quad \text{a tedy} \quad c = M,$$

$$A(100) = 0,5M = M - M\mathrm{e}^{-k\cdot 100}, \quad \text{a tedy} \quad k = \frac{-\ln(0,5)}{100} \doteq 0,00693.$$

K tomu, aby se Viktorie naučila 85 % materiálů, musí studiu věnovat t hodin studia, přičemž t vyhovuje rovnici

$$A = 0,85M = M - M\mathrm{e}^{-0,00693t}.$$

Hledané t je tedy

$$t = \frac{-\ln(0,15)}{0,00693} \doteq 273,754687,$$

což pro studentku znamená dalších téměř 174 hodin věnovaných studiu.

△

Příklad 1.19. Alkohol v krvi
Pokles koncentrace alkoholu v krvi je úměrný této koncentraci, přičemž konstanta úměrnosti je $k = 0,4$. Pro dospělého muže o hmotnosti 70 kg, který vypije 3 piva v jedné hodině,

je koncentrace 1 %. Maximální povolená koncentrace alkoholu v krvi při řízení v Rakousku je 0,05 %. Jak dlouho musí tento řidič počkat, aby neporušil zákon? Jak dlouho musí počkat v České republice, kde je tolerance nulová?

Řešení. Označme $A = A(t)$ koncentraci alkoholu v krvi (v %) v čase t měřeném v hodinách. Uvažujme $t = 0$ v čase, kdy má řidič koncentraci alkoholu v krvi rovnu 1 %, tj. $A(0) = 1$. Koncentraci $A(t+h)$ můžeme zapsat jako $A(t+h) = A(t) - khA(t)$, z čehož úpravou získáme $\frac{A(t+h)-A(t)}{h} = -kA(t)$. Limitním přechodem pro h jdoucí k nule pak dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -kA.$$

Jedná se o autonomní rovnici, kterou vyřešíme nám již známým způsobem. Jejím konstantním řešením je $A = 0$. Rovnice

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int -k\mathrm{d}t$$

má řešení

$$A(t) = c\mathrm{e}^{-kt}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

ve kterém je zahrnuto i řešení konstantní. Hodnotu integrační konstanty c můžeme získat dosazením podmínky $A(0) = 1$ do obecného řešení. Jelikož $c = 1$, je řešení ve tvaru

$$A(t) = \mathrm{e}^{-kt},$$

neboť $c = 1$. Jestliže řidič nechce v Rakousku porušit zákon, musí počkat po dobu t_0, pro kterou platí

$$0,05 = \mathrm{e}^{-0,4t_0}$$

neboli

$$t_0 = -\frac{\ln(0,05)}{0,4} \doteq 7,489 \text{ hodiny}.$$

Jelikož obor hodnot exponenciální funkce je $\mathbb{R}^+$ a tato funkce se pouze limitně blíží k nule, musel by řidič pro řízení v České republice teoreticky počkat nekonečně dlouhou dobu.

△

Z poslední části řešení tohoto příkladu vidíme, že uvedený model změny koncentrace alkoholu v krvi rozhodně plně neodpovídá realitě. I přes tuto nepřesnost se jedná o zajímavou aplikaci, což je hlavním důvodem pro ponechání této slovní úlohy. V následující kapitole se v Příkladu 2.10 podíváme na možné zpřesnění popisu tohoto problému za pomoci lineární diferenciální rovnice.

Příklad 1.20. Lék

Tekutina, která obsahuje 6 miligramů na cm^3 léku, je nitrožilně vpravována do krevního oběhu pacienta rychlostí 120 cm^3 za hodinu. Lék je absorbován nebo jinak opouští krevní oběh rychlostí úměrnou jeho přítomnému množství. Za předpokladu, že konstanta úměrnosti $k = 0,5$, najděte množství léku v krevním oběhu po delší době tohoto procesu.

Řešení. Označme $y = y(t)$ množství léku v oběhu v čase t měřeném v hodinách. Ze zadání víme, že lék se do oběhu dostává konstantní rychlostí, a to

$$6\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 120\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{h}} = 720\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{h}}.$$

Lék poté krevní oběh opouští rychlostí $ky(t)$, přičemž pro náš příklad je $k = 0,5$. Z těchto informací již můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 720 - 0,5y,$$

kterou řešíme obdobně jako předchozí příklady. Konstantním řešením je $y = 1\,440$. Integrováním obou stran rovnice získáme

$$-\frac{1}{0,5}\ln|720 - 0,5y| = t + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

z čehož úpravou

$$720 - 0,5y = c\mathrm{e}^{-0,5t}, \qquad \text{a tedy} \qquad y = 1440 + c\mathrm{e}^{-0,5t}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení, ve kterém je zahrnuto i řešení konstantní. Integrační konstantu můžeme dopočítat za pomoci počáteční podmínky $y(0) = 0$, tj.

$$0 = 1440 + k, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad k = -1440.$$

Výsledné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y = 1440\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right).$$

Po velmi dlouhé době bude v krevním oběhu přítomno přibližně 1440 mg léku, neboť s rostoucím t jde výraz $\mathrm{e}^{-0,5t}$ k nule.

$\triangle$

Další dva příklady jsou založeny na Newtonově zákonu ochlazovaní, který říká, že rychlost ochlazování tělesa na vzduchu je přímo úměrná rozdílu teploty tohoto tělesa a teploty vzduchu. Se znalostí tohoto zákona můžeme například určit dobu smrti oběti vraždy, jak uvidíme v následující úloze.

Příklad 1.21. Vražda v Orient Expresu
Pan Ratchett, postarší Američan, byl nalezen mrtvý v 7 hodin v jednom z kupé vlaku Orient Express vytopeném na 22 °C. Teplota jeho těla v čase nálezu byla 28 °C, o hodinu později 27 °C. Za předpokladu, že normální teplota člověka je 37 °C, určete dobu smrti.

Řešení. Označme $y = y(t)$ teplotu těla v čase t měřeném v hodinách, T teplotu okolí a $k > 0$ konstantu úměrnosti. Uvažujme 7 hodin jako čas, kdy $t = 0$. Ze zadání pak sestavíme rovnici pro teplotu v čase $t + h$ ve tvaru $y(t+h) = y(t) - kh[y(t) - T]$. Tuto rovnici můžeme upravit na

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = -k[y(t) - T].$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$y'(t) = -k[y(t) - T].$$

Konstantní řešení této rovnice je $y = T$. Rovnici dále řešíme obdobně jako předchozí příklady separováním proměnných a integrováním obou stran, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y - T} = \int -k\mathrm{d}t,$$

kterým dostaneme

$$\ln|y - T| = -kt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Úpravou obdržíme obecné řešení, které je ve tvaru

$$y = T + c\mathrm{e}^{-kt}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

přičemž volbou $c = 0$ dostaneme konstantní řešení rovnice. Dosazením podmínek $T = 22$ a $y(0) = 28$ do obecného řešení získáme

$$28 = 22 + c\mathrm{e}^{-k\cdot 0}, \qquad \text{a tedy} \qquad c = 6.$$

S využitím těchto znalostí a počáteční podmínky $y(0) = 27$ najdeme hodnotu konstanty úměrnosti k, tj.

$$27 = 22 + 6\mathrm{e}^{-k}, \quad \text{z čehož plyne} \quad e^{-k} = \frac{5}{6}, \quad \text{a tedy} \quad k = \ln\frac{6}{5} \doteq 0,18232.$$

Nyní potřebujeme zjistit čas smrti, tedy t takové, že $y(t) = 37$, k čemuž využijeme rovnici

$$37 = 22 + 6\mathrm{e}^{-\ln\frac{6}{5}t} = 22 + 6\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}t} = 22 + 6\left(\frac{5}{6}\right)^t,$$

ze které vypočítáme hledané t jako

$$t = \frac{\ln\frac{5}{2}}{\ln\frac{5}{6}} \doteq -5,02573.$$

Smrt nastala přibližně pět hodin a dvě minuty před nalezením těla, tedy v 1:58.

△

Příklad 1.22. Horká káva
Kristýna a Barbara jdou na kávu. Servírka jim naráz přinese stejně teplé nápoje. Kristýna si do kávy ihned zamíchá mléko a poté deset minut počká, než začne pít. Barbara vyčkává, po deseti minutách si do kávy přidá mléko a pije ihned. Kdo pije teplejší kávu?

Řešení. Označme $T = T(t)$ teplotu kávy v čase t měřeném v minutách a T_p konstantní teplotu v kavárně. Stejně jako v předchozím příkladu je diferenciální rovnice ve tvaru

$$T'(t) = -k(T - T_p),$$

její řešení tedy můžeme zapsat jako

$$T(t) = T_p + c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Označíme–li teplotu kávy v čase $t = 0$ jako T_0, můžeme řešení psát ve tvaru

$$T(t) = T_p + (T_0 - T_p)\mathrm{e}^{-kt},$$

neboť platí $T_0 = T(0) = T_p + c$. Jestliže mléko přidáme do kávy ihned, tedy v čase $t = 0$, můžeme teplotu kávy v tomto čase zapsat jako

$$T(0^+) = \frac{V_k T_0 + V_m T_m}{V_k + V_m},$$

kde V_k je objem kávy, T_0 počáteční teplota kávy, V_m objem mléka a T_m jeho teplota. Tato rovnice nám obecně říká, jaká je teplota dvou látek, které smícháme. Rovnici pro teplotu kávy za předpokladu, že mléko přidáme ihned, pak můžeme zapsat jako

$$T(t) = T_p + \left(\frac{V_k T_0 + V_m T_m}{V_k + V_m} - T_p\right)\mathrm{e}^{-kt}. \tag{1.7}$$

V případě, že mléko přidáme v čase $t_1 > 0$, bude do tohoto času platit

$$T(t_1^-) = T_p + (T_0 - T_p)\mathrm{e}^{-kt_1},$$

po přidání mléka můžeme teplotu kávy vyjádřit jako

$$T(t_1^+) = \frac{V_k T(t_1^-) + V_m T_m}{V_k + V_m}.$$

Teplotu kávy v čase $t > t_1$ v případě, že mléko do kávy přidáme v čase $t_1 > 0$, pak můžeme popsat rovnicí

$$T(t) = T_p + \left[\frac{V_k(T_p + (T_0 - T_p)\mathrm{e}^{-kt_1}) + V_m T_m}{V_k + V_m} - T_p\right]\mathrm{e}^{-k(t-t_1)}. \tag{1.8}$$

Pro určení toho, kdo pije teplejší kávu, musíme porovnat výrazy (1.7) a (1.8) v čase t_1. Úpravou výrazu (1.7) vyjádřeného v čase t_1 získáme

$$\begin{aligned} T(t_1) &= T_p + \left(\frac{V_k T_0 + V_m T_m - V_k T_p - V_m T_p}{V_k + V_m}\right)\mathrm{e}^{-kt_1} = \\ &= \frac{V_k T_p + V_m T_p + V_k T_0 \mathrm{e}^{-kt_1} + V_m T_m \mathrm{e}^{-kt_1} - V_k T_p \mathrm{e}^{-kt_1} - V_m T_p \mathrm{e}^{-kt_1}}{V_k + V_m}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Výraz (1.8) vyjádřený v čase t_1 můžeme zapsat jako

$$T(t_1) = \frac{V_k T_p + V_k(T_0 - T_p)\mathrm{e}^{-kt_1} + V_m T_m}{V_k + V_m} = \frac{V_k T_p + V_k T_0 \mathrm{e}^{-kt_1} - V_k T_p \mathrm{e}^{-kt_1} + V_m T_m}{V_k + V_m}. \tag{1.10}$$

Oba tyto výrazy (tj. (1.9), (1.10)) obsahují

$$\frac{V_kT_p + V_kT_0\mathrm{e}^{-kt_1} - V_kT_p\mathrm{e}^{-kt_1}}{V_k + V_m}.$$

Jmenovatele obou zlomků jsou taktéž shodné. Jestliže se tedy výrazy rovnají, musí platit rovnost čitatelů, tj.

$$V_mT_p + V_mT_m\mathrm{e}^{-kt_1} - V_mT_p\mathrm{e}^{-kt_1} = V_mT_m.$$

Tuto rovnici můžeme vydělit výrazem V_m, po úpravě poté získáme

$$T_p(1-\mathrm{e}^{-kt_1}) = T_m(1-\mathrm{e}^{-kt_1}),$$

z čehož vidíme, že rovnost nastane pouze v případě, že $T_p = T_m$. V případě, že mléko má pokojovou teplotu, tedy nezáleží na tom, kdo ho do kávy přidá dříve, a obě dívky pijí stejně teplou kávu. V případě, že mléko je uchováváno v chladnějším místě, tj. $T_m < T_p$, je rozdíl teplot

$$T_p - T_p\mathrm{e}^{-kt_1} - T_m + T_m\mathrm{e}^{-kt_1} = T_p(1-\mathrm{e}^{-kt_1}) - T_m(1-\mathrm{e}^{-kt_1}) = (T_p - T_m)(1-\mathrm{e}^{-kt_1})$$

kladný, neboť výraz $1-\mathrm{e}^{-kt_1}$ je kladný, protože $k > 0$, což odpovídá ochlazování kávy. To znamená, že Kristýna, která přidá mléko do kávy hned, pije po čase t_1 teplejší kávu. Pro $T_m > T_p$ je situace přesně opačná.

△

Příklad 1.23. Závod

V automobilovém závodě vede řidič A, který jede 5 km před řidičem B, přičemž oba jedou stejně rychle. Kilometr před cílem začne řidiči A docházet palivo a jeho vůz začne zpomalovat úměrně ke čtverci své aktuální rychlosti. O půl kilometru dál je jeho rychlost polovina původní rychlosti. Za předpokladu, že se rychlost řidiče B nemění, určete, kdo vyhraje závod.

Řešení. Označme v_0 v kilometrech za hodinu rychlost, kterou původně jedou oba řidiči, $v = v(t)$ rychlost řidiče A v čase t měřeném v hodinách a $S = S(t)$ dráhu, kterou za čas t řidič A urazí. Pro tento příklad uvažujme $t = 0$ v momentě, kdy začne řidič A zpomalovat. Nejprve si určeme, za jak dlouho do cíle dorazí řidič B. S využitím základních znalostí fyziky můžeme psát, že čas, za který dorazí řidič B do cíle, je $t_b = \frac{6}{v_0}$, neboť řidiči v čase $t = 0$ zbývá do cíle 6 km. Pro řidiče A je příklad trochu složitější. Ze zadání víme, že řidič zpomaluje úměrně ke čtverci své aktuální rychlosti, což můžeme zapsat jako

$$v(t+h) = v(t) - kv^2(t)h,$$

z čehož úpravou dojdeme k výrazu

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = -kv^2(t).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí do nuly pak získáme diferenciální rovnici ve tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2.$$

Konstantním řešením této rovnice je $v = 0$. Integrováním obou stran dostaneme vztah pro rychlost $v(t)$, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int -k\,\mathrm{d}t,$$

$$-\frac{1}{v} = -kt + c, \qquad \text{z čehož po úpravě plyne} \qquad v(t) = \frac{1}{kt - c}.$$

V bodech, ve kterých konstanta c nabývá hodnot kt, má funkce $v(t)$ singularitu. V našem případě ovšem po dosazení počáteční podmínky $v(0) = v_0$ získáme hodnotu integrační konstanty c jako $c = -\frac{1}{v_0}$, a můžeme tedy psát

$$v(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}. \tag{1.11}$$

Vzhledem ke kladnosti k, t i v_0 nedojde k nulovosti jmenovatele. Řešení $v = 0$ v tomto případě nezískáme žádnou volbou integrační konstanty, jedná se tedy o singulární řešení. Toto řešení pro nás ovšem není zajímavé ani důležité. Zároveň víme, že rychlost je rovna derivaci dráhy neboli

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}, \qquad \text{z čehož integrací} \qquad S(t) = \frac{\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right)}{k} + C.$$

Hodnotu integrační konstanty C získáme dosazením podmínky $S(0) = 0$, máme tedy

$$C = -\frac{\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)}{k}.$$

Pro dráhu $S(t)$ tedy dostaneme úpravou výraz

$$S(t) = \frac{\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{v_0}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{\frac{v_0kt+1}{v_0}}{\frac{1}{v_0}}\right)}{k} = \frac{\ln(v_0kt + 1)}{k} \tag{1.12}$$

Ze zadání víme, že ve vzdálenosti 0,5 km před cílem je rychlost závodníka A rovna jedné polovině v_0. Dosazením $S = 0,5$ do rovnice dráhy (1.12) získáme

$$\frac{1}{2} = \frac{\ln(v_0kt_0 + 1)}{k},$$

z čehož můžeme čas t_0, za který závodník A urazí 0,5 km, vyjádřit jako

$$t_0 = \frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{2}} - 1}{v_0k}.$$

Tento výraz nyní dosadíme do rovnice pro rychlost (1.11), čímž dostaneme

$$v(t_0) = \frac{1}{k\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}-1}{v_0k}\right) + \frac{1}{v_0}} = \frac{v_0}{\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}}.$$

Z této rovnice pak již vyjádříme k jako $k = 2\ln\frac{v_0}{v(t_0)}$. S využitím znalosti podmínky $v(t_0) = 0,5v_0$ můžeme k vyjádřit jako

$$k = 2\ln 2 \doteq 1,38629.$$

Nyní můžeme konečně spočítat čas, ve kterém závodník A dojede do cíle. Víme, že dráha bude rovna 1 (neboť mu do cíle chyběl 1 km). Sestavíme tedy rovnici

$$S(t) = 1 = \frac{\ln\left[v_0(2\ln 2)t + 1\right]}{2\ln 2}.$$

Její úpravou se postupně dopracujeme k hledanému času, tj.

$$\ln 2^2 = \ln\left[v_0(2\ln 2)t + 1\right], \qquad \text{z čehož úpravou dostaneme} \qquad 4 = 2v_0t(\ln 2) + 1.$$

Závodník A tedy dokončí závod v čase

$$t = \frac{3}{2v_0\ln 2} \doteq \frac{2,164}{v_0}.$$

Porovnáním tohoto času s časem, ve kterém závod dokončí závodník B ($t_b = \frac{6}{v_0}$), získáme hledanou odpověď na otázku: závod i přes technické problémy vyhraje závodník A.

△

Příklad 1.24. Baseball

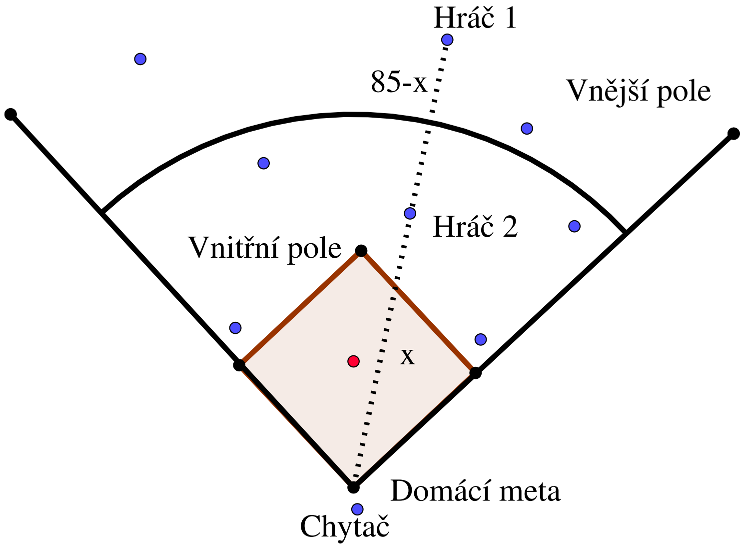
Hráč ve vnějším poli, který stojí 85 metrů od domácí mety, hodí míč přímo na chytače tak, že počáteční rychlost míče je 30,5 metrů za sekundu. Předpokládejme, že změna rychlosti míče je kvůli odporu vzduchu přímo úměrná jeho rychlosti, přičemž konstanta úměrnosti je $k = -\frac{1}{10}$. Za jak dlouho doletí míč na domácí metu? Manažer týmu chce také vědět, jestli se vyplatí, aby míč chytil hráč ve vnitřním poli a hodil ho na domácí metu sám. Tento hráč dokáže míč hodit tak, že počáteční rychlost míče je 32 metrů za sekundu. Manažer navíc ví, že celá akce (chytit, otočit se, hodit) by trvala 0,5 sekundy. Jak daleko od domácí mety by se měl hráč ve vnitřním poli postavit, aby minimalizoval celkový čas akce? Co je tedy pro tým výhodnější? Změní se odpověď, jestliže je hráč v poli schopen hodit míč tak, že jeho počáteční rychlost je 35 metrů za sekundu? Celá situace je znázorněna na Obrázku 1.3.

Řešení. Označme $S = S(t)$ vzdálenost míče od hráče ve vnějším poli v čase t měřeném v sekundách. Platí tedy $S(0) = 0$ a $S(t_0) = 85$, přičemž t_0 je čas, za který míč doletí na domácí metu. Ze zadání si pro rychlost míče můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{10}v,$$

neboť víme, že změnu rychlosti můžeme popsat jako $v(t+h) = v(t) - kv(t)h$. Jedná se o autonomní rovnici, jejíž podrobnější řešení ponecháme na čtenáři. Jejím obecným řešením je funkce

$$v = c\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}, \qquad c \in \mathbb{R},$$



Obrázek 1.3: Baseball

ve které je zahrnuto i konstantní řešení. S využitím počáteční podmínky $v(0) = v_0$ získáme $v = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$. Zároveň víme, že rychlost můžeme zapsat ve tvaru

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{a tedy} \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}.$$

Podrobnější řešení této rovnice opět ponecháme na čtenáři. Integrováním získáme řešení

$$S = -10 v_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} + k.$$

Integrační konstantu k pak získáme dosazením počáteční podmínky $S(0) = 0$ do obecného řešení, máme tedy

$$0 = -10 v_0 + k, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad k = 10 v_0.$$

Hledané partikulární řešení je $S = 10 v_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right]$. Nyní již stačí dosadit 30,5 za v_0 a můžeme vyjádřit hledaný čas t z rovnice

$$85 = 10 \cdot 30,5 \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right], \qquad \text{z čehož máme} \qquad t = -10 \ln\left(1 - \frac{85}{305}\right) \doteq 3,2668 \text{ sekundy}.$$

Nyní uvažme situaci, při které míč chytí hráč v poli (označíme hráč 2) a hodí ho na domácí metu sám. Označme x počet metrů od domácí mety, kde stojí hráč 2. Označme také počáteční rychlost míče, který hodí hráč 2, jako v_2. Čas, který celá akce potrvá, si můžeme rozepsat jako $t = t_1 + t_2 + 0,5$, kde t_1 značí čas, ve kterém se míč dostane od hráče ve vnějším poli k hráči 2 (míč tedy uletí vzdálenost $85 - x$) a čas t_2 značí čas, ve kterém se míč dostane od hráče 2 na domácí metu (míč tedy uletí vzdálenost x). Pro výpočet těchto časů využijeme znalosti výrazu pro t z předchozí části příkladu. S využitím $v_0 = 30,5$ tedy můžeme pro čas t_1 psát

$$85 - x = 10 \cdot 30,5 \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{10}}\right], \qquad \text{z čehož plyne} \qquad t_1 = -10 \ln\left(1 - \frac{85 - x}{305}\right).$$

Pro čas t_2 pak obdobně

$$x = 10 \cdot v_2 \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_2}{10}}\right], \qquad \text{z čehož plyne} \qquad t_2 = -10 \ln\left(1 - \frac{x}{10v_2}\right).$$

V tomto výrazu zatím ponechme obecný zápis v_2, neboť nás budou zajímat jak výsledky pro $v_2 = 32$, tak pro $v_2 = 35$. Nyní nám zbývá najít x takové, pro které bude celkový čas akce t minimální. Minimum najdeme derivací výrazu

$$t(x) = 0{,}5 - 10\left[\ln\left(1 - \frac{85 - x}{305}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{10v_2}\right)\right],$$

který si pro usnadnění přepíšeme do tvaru

$$t(x) = 0{,}5 - 10\left[\ln\left(\frac{220 + x}{305}\right) + \ln\left(\frac{10v_2 - x}{10v_2}\right)\right] \tag{1.13}$$

a položením jeho derivace rovné 0. Řešíme tedy rovnici

$$t'(x) = -10\left[\frac{305}{220 + x} \cdot \left(\frac{1}{305}\right) + \frac{10v_2}{10v_2 - x}\left(-\frac{1}{10v_2}\right)\right] = 0$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$-10\left(\frac{1}{220 + x} - \frac{1}{10v_2 - x}\right) = 0, \tag{1.14}$$

kterou pro $v_2 = 32$ řeší $x = 50$. Ověření tohoto výsledku ponecháme na čtenáři. Druhou derivací ověříme, že se opravdu jedná o minimum, platí totiž

$$t''(x) = 10\left[\frac{1}{(220 + x)^2} + \frac{1}{(10v_2 - x)^2}\right] > 0.$$

Výsledný čas pro toto minimální $x = 50$ vypočítáme dosazením do rovnice (1.13), čímž pro $v_2 = 32$ získáme

$$t(50) = 0{,}5 - 10\left[\ln\left(\frac{220 + 50}{305}\right) + \ln\left(\frac{10 \cdot 32 - 50}{10 \cdot 32}\right)\right] \doteq 3{,}4179 \text{ sekundy.}$$

Porovnáním tohoto času s časem, za který míč doletí od hráče ve vnějším poli na domácí metu, vidíme, že házet přes hráče stojícího ve vnitřním poli se týmu nevyplatí. Nyní nás zajímá, zda naši odpověď změní to, že je hráč ve vnitřním poli schopen hodit míč rychleji, tj. $v_2 = 35$. Obdobným způsobem tedy nejprve najdeme x, které minimalizuje celkový čas akce, k čemuž použijeme rovnici (1.14). Pro $v_2 = 35$ řeší tuto rovnici $x = 65$, hráč si tedy nyní musí stoupnout dál od domácí mety. Zbývá vypočítat čas, za který se míč v tomto případě dostane na domácí metu. K tomuto výpočtu opět použijeme rovnici (1.13), přičemž nyní za v_2 dosadíme 35, čímž získáme

$$t(65) = 0{,}5 - 10\left[\ln\left(\frac{220 + 65}{305}\right) + \ln\left(\frac{10 \cdot 35 - 65}{10 \cdot 35}\right)\right] \doteq 3{,}2327 \text{ sekundy.}$$

V tomto případě by tedy měl manažer podpořit hod přes hráče ve vnitřním poli, neboť se zapojením druhého hráče se míč dostane na domácí metu v kratším čase. △

Příklad 1.25. Rychlost padajícího míče
V roce 1939 se baseballový hráč Joe Sprinz pokusil chytit míč puštěný ze vzducholodi letící přibližně 245 metrů nad zemí. Určete, jak dlouho trvalo, než míč spadl na zem a jaká byla jeho rychlost, za předpokladu nulového odporu vzduchu.

Řešení. Označme $y = y(t)$ vzdálenost mezi míčem a zemí v čase t měřeném v sekundách, H výšku, ze které byl míč vyhozen. Jestliže neuvažujeme odpor vzduchu, působí na míček pouze gravitační síla. Vzdálenost y se tedy s časem mění tak, že v čase $t+h$ můžeme psát $y(t+h) = y(t) - gth$, z čehož úpravou získáme

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = -gt.$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule pak sestavíme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt,$$

kde $g \doteq 9,8\frac{m}{s^2}$ značí gravitační zrychlení. Integrací této rovnice získáme vztah

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + c,$$

kde c je rovno H, neboť je to výška, ve které byl míč v čase $t = 0$. V době dopadu je $y = 0$, dobu trvání pádu můžeme tedy najít řešením rovnice

$$0 = H - \frac{g}{2}t^2, \quad \text{z čehož vyjádřením } t \text{ získáme} \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

což je čas, za který míč uletí H metrů směrem dolů. Pro náš případ je

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 245}{9,8}} = 5\sqrt{2} \doteq 7,07 \text{ sekund.}$$

Rychlost padajícího míče můžeme zapsat jako

$$v = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{a tedy} \qquad v = gt = g\sqrt{\frac{2H}{g}},$$

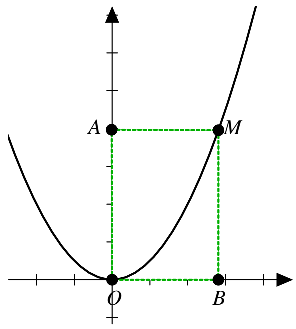
přičemž záporné znaménko u $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ značí, že y se s přibývajícím časem zmenšuje. Hledaná rychlost je tedy

$$v = 9,8\sqrt{\frac{2 \cdot 245}{9,8}} = 49\sqrt{2} \doteq 69,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

△

Při tomto pokusu o zlomení světového rekordu si Joe pravděpodobně nespočítal sílu a rychlost, s jakou míč do jeho rukavice dopadne. Tato rychlost způsobila, že rukavice s míčkem narazila do jeho hlavy tak, že mu vyrazila několik zubů a zlomila čelist. Navíc mu při tom míč vypadl z ruky, více viz [62]. V roce 2013 překonal Zack Hample světový rekord tím, že chytil míč vypuštěný z helikoptéry ve výšce přibližně 305 metrů (viz [68]). S využitím řešení předchozího příkladu si čtenář může snadno vypočítat rychlost tohoto míče v okamžiku, kdy dopadl do jeho rukavice.

Příklad 1.26. Křivka
Najděte rovnici křivky z Obrázku 1.4, jestliže víte, že tato křivka rozděluje obdélník OBMA na dvě části tak, že plocha pod křivkou je polovina plochy nad křivkou, zároveň pro jednoduchost předpokládejte, že křivka je grafem spojité funkce.



Obrázek 1.4: Křivka

Řešení. Označme hledanou křivku $y = y(x)$. Pro bod M platí $M = [x, y(x)]$. Obsah obdélníku OBMA můžeme vyjádřit jako $x \cdot y$, což si označíme S. Označme dále Q plochu pod křivkou. Tato plocha je dána integrálem $Q = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$. Ze zadání víme, že $Q = \frac{1}{3}S$ neboli $S = 3Q$, můžeme tedy psát

$$xy = 3\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Derivováním této rovnice získáme

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}(xy) = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left[3\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t\right] \qquad \text{neboli} \qquad xy' + y = 3y(x),$$

přičemž při integraci jsme využili předpokladu spojitosti funkce y. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, jejímž řešením je triviální řešení $y \equiv 0$. Rovnici dále řešíme úpravou a separací proměnných, tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrováním obou stran rovnice pak získáme

$$\frac{1}{2}\ln|y| = \ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

z čehož úpravou dostaneme

$$y^{\frac{1}{2}} = cx, \quad \text{neboli} \quad y = cx^2.$$

Hledanou křivku dostaneme dosazením podmínky $y(B) = A$, čímž pro c získáme $c = \frac{A}{B^2}$. Rovnice křivky je tedy $y = \frac{A}{B^2}x^2$.

△

Následující dvě úlohy jsou příklady z fyziky ze základní školy. Obě tyto úlohy je možné vyřešit bez použití diferenciálních rovnic, tyto příklady však ilustrují další možnosti jejich využití, což bylo důvodem pro jejich zařazení do této práce.

Příklad 1.27. Brzdění vlaku
Vlak přijíždí do stanice Česká Třebová. Strojvedoucí začne plynule (tj. lineárně) ubírat rychlost z počátečních 160 km/h tak, že vlak za 3 minuty v nádraží zastaví. Kolik kilometrů před stanicí musí strojvedoucí začít brzdit?

Řešení. Ze zadání víme, že rychlost je lineární funkcí času. Zároveň z fyziky víme, že rychlost je derivace vzdálenosti jako funkce času. Označme $v = v(t)$ rychlost v čase t, A bod, ve kterém začne vlak brzdit, a $S = S(t)$ vzdálenost od bodu A v čase t měřeném v hodinách. Z těchto informací můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = at + b.$$

Integrací této rovnice pak získáme

$$S = \frac{a}{2}t^2 + bt + c.$$

Ze zadání můžeme také vypsat podmínky, které využijeme k určení konkrétních hodnot konstant. Jsou to

$$v(0) = 160, \qquad v\left(\frac{1}{20}\right) = 0, \qquad S(0) = 0.$$

Dosazením těchto podmínek do našich dvou rovnic snadno získáme hodnoty konstant $a,\ b,\ c$. Výsledná podoba rovnice dráhy je poté

$$S = -\frac{3200}{2}t^2 + 160t,$$

ze které po dosazení $t = \frac{1}{20}$ získáme hledanou odpověď $S = 4$. Strojvedoucí tedy musí začít brzdit 4 kilometry před stanicí.

△

Příklad 1.28. Vana
Šimon ví, že se jeho vana napouští rychlostí 10 litrů za minutu, ale zároveň z ní kvůli špatnému těsnění voda vytéká rychlostí 6 litrů za hodinu. Šimona by zajímalo, kolik vody je ve vaně po 20 minutách napouštění. Pomozte mu na tuto otázku odpovědět.

Řešení. Vzhledem k tomu, že Šimon úspěšně absolvoval předmět M2100, může si k tomuto problému sestavit diferenciální rovnici. Označme $V = V(t)$ objem vody ve vaně v čase t měřeném v minutách, F rychlost napouštění a L rychlost vytékání vody. Nejprve sepišme rovnici změny. Po krátkém časovém okamžiku h bude ve vaně

$$V(t+h) = V(t) + h(F - L), \qquad \text{což můžeme upravit na} \qquad \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = F - L.$$

Pro h jdoucí k nule je výraz na levé straně roven derivaci $V'(t)$, diferenciální rovnice bude tedy ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F - L.$$

Integrováním výše uvedené rovnice získáme

$$V(t) = (F - L)t + c.$$

Po dosazení počáteční podmínky $V(0) = 0$ a převodu jednotek na litry za minutu můžeme psát

$$V(0) = 0 + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = 0,$$
$$V(20) = (10 - 0,1)20 = 198.$$

Po 20 minutách je v Šimonově vaně 198 litrů vody. △

Příklad 1.29. Populace ovlivněná sezónními změnami
Nabídka potravy pro určitou populaci podléhá sezónním změnám, které ovlivňují její růst. Jako další model populace můžeme uvážit např.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\cos t,$$

kde $y = y(t)$ je velikost populace v čase t, $k > 0$. Je známa velikost populace $y(0) = y_0$. Najděte minimální a maximální hodnotu, mezi kterými bude velikost populace oscilovat.

Řešení. Ze zadání vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Její konstantní řešení je $y = 0$, což musíme uvážit ve výsledném řešení rovnice. Po separování proměnných řešíme rovnici integrováním, kterým získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int k\cos t \,\mathrm{d}t,$$

$$\ln|y| = k\sin t + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$
$$y = c\mathrm{e}^{k\sin t}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

neboť volbou $c = 0$ získáme konstantní řešení. S využitím počáteční podmínky $y(0) = y_0$ pak můžeme psát

$$y = y_0\mathrm{e}^{k\sin t}.$$

Velikost pozorované populace tedy osciluje mezi hodnotami $y_0\mathrm{e}^{-k}$ a $y_0\mathrm{e}^{k}$. △

Jednou z dalších ekonomických aplikací diferenciálních rovnic je popis dynamiky akumulace státního dluhu, který si ukážeme v následující úloze. Pro tento příklad využijeme data o dluhu a HDP České republiky v letech 2016 a 2017 (z [72]). Tento příklad je pouze modelový, předpoklady o konstantním růstu HDP i o dluhu, který je proporcionální k HDP, jsou zde pouze pro ilustraci další aplikace, kterou můžeme popsat diferenciální rovnicí.

Příklad 1.30. Státní dluh
Předpokládejte, že v České republice roste HDP konstantní rychlostí 3 % ročně. Vláda se rozhodla, že udrží dluh proporcionální k HDP. V roce 2016 bylo HDP 4 773,240 miliard Kč (v běžných cenách) a dluh 1 613,4 miliard Kč. Jestliže se vláda rozhodla, že dluh

v roce 2017 udrží na hodnotě 1 625 miliard Kč, určete, kdy vládní dluh přeroste hodnotu 1 700 miliard Kč.

Řešení. Označme $D(t)$ hodnotu dluhu v miliardách v čase t měřeném v letech a $Y(t)$ HDP v miliardách v čase t. Ze zadání víme, že HDP roste konstantní rychlostí 3 %, tj. $Y(t+h) = Y(t) + 0,03Y(t)h$. Z této rovnice můžeme úpravou dojít k výrazu

$$\frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} = 0,03Y(t),$$

přičemž limitním přechodem pro h jdoucí k nule získáme na levé straně derivaci $Y'(t)$ a můžeme tedy psát diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0,03Y.$$

Konstantním řešením této rovnice je $Y = 0$. Zároveň víme, že vláda chce udržet růst dluhu proporcionální k HDP, tedy

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = kY,$$

kde $k > 0$. Diferenciální rovnici pro HDP nyní vyřešíme obdobně jako v předchozích příkladech, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y} = \int 0,03\,\mathrm{d}t, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad Y = c\mathrm{e}^{0,03t}.$$

Dosazením počáteční podmínky $Y(0) = 4773,240$ získáme $c = 4773,240$. Dosazením výrazu pro Y do diferenciální rovnice pro dluh dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 4773,240k\mathrm{e}^{0,03t}.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit metodou separace proměnných, z čehož získáme

$$\int \mathrm{d}D = \int 4773,240k\mathrm{e}^{0,03t}\mathrm{d}t \qquad \text{neboli} \qquad D = 4773,240k\mathrm{e}^{0,03t}\frac{1}{0,03} + b,$$

kde b je integrační konstanta. Obecné řešení je tedy $D = 159108k\mathrm{e}^{0,03t} + b$. Hodnotu parametrů k a b dostaneme dosazením počátečních podmínek do obecného řešení, máme tedy soustavu rovnic

$$1613,4 = 159108k + b \qquad \text{a} \qquad 1625 = 159108k\mathrm{e}^{0,03} + b,$$

ze které řešením získáme

$$k = \frac{1625 - 1613,4}{159108(\mathrm{e}^{0,03} - 1)} \doteq 2,3939 \cdot 10^{-3} \qquad \text{a} \qquad b = 1613,4 - \frac{1625 - 1613,4}{\mathrm{e}^{0,03} - 1} \doteq 1232,5.$$

Zbývá odpovědět na otázku, kdy dluh přeroste 1 700 miliard. Hledáme tedy t, které vyhovuje rovnici

$$1700 = 159108 \cdot 2,3939 \cdot 10^{-3}\mathrm{e}^{0,03t} + 1232,5.$$

Řešením této rovnice je

$$t = \frac{\ln \frac{1700-1232{,}5}{159108 \cdot 2{,}3939 \cdot 10^{-3}}}{0,03} \doteq 6,8297.$$

Za předpokladu, že hodnota dluhu je počítána meziročně, přesáhne dluh hodnotu 1 700 miliard za 7 let.

△

Příklad 1.31. Paretův zákon
Podle ekonoma Vilfréda Pareta je ve stabilní ekonomice míra poklesu počtu obyvatel $y = y(x)$, kteří mají příjem nejméně x dolarů, přímo úměrná počtu takových lidí a nepřímo úměrná jejich příjmu. V roce 2001 bylo v USA 15,2 milionů lidí, kteří mají příjem větší než 75 000 \$ a 90,9 milionů lidí, kteří vydělávají více než 25 000 \$. Za předpokladu platnosti Paretova zákona určete počet lidí (v milionech), kteří vydělávají (a) více než 20 000 \$, (b) více než 100 000 \$.

V roce 2014 bylo v České republice přibližně 25 % obyvatel s příjmem větším než 30 500 Kč, 75 % obyvatel mělo příjem větší než 16 500 Kč. Kolik lidí mělo podle Paretova zákona příjem větší než 43 000 Kč? Jakou mediánovou mzdu tento zákon předpovídá? Jakou mediánovou mzdu bychom získali, kdybychom místo výše uvedených dat využili fakt, že 90 % obyvatel mělo příjem vyšší než 12 000 Kč a 10 % příjem vyšší než 43 500 Kč?

Řešení. Označme konstantu úměrnosti $k > 0$ a uvažujme x v tisících, $y(x)$ v milionech. Z Paretova zákona víme, že

$$y(x+h) = y(x) - \frac{ky(x)h}{x}, \qquad \text{z čehož úpravou získáme} \qquad \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = -k\frac{y}{x}.$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -k\frac{y}{x}.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými, jejímž konstantním řešením je $y = 0$. Tuto rovnici řešíme úpravou a následným integrováním obou stran

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -k\int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

kterým získáme

$$\ln|y| = -k\ln|x| + c, \qquad \text{z čehož úpravou dostaneme} \qquad y = cx^{-k}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

což je hledané obecné řešení, ve kterém je již zahrnuto řešení konstantní. Pro získání konkrétních hodnot integrační konstanty a konstanty úměrnosti použijeme údaje ze zadání $y(75) = 15,2$ a $y(25) = 90,9$, které dosadíme do obecného řešení

$$15,2 = c \cdot 75^{-k}, \qquad 90,9 = c \cdot 25^{-k}.$$

Řešením této soustavy získáme $k \doteq 1,6279$ a $c \doteq 17\,152$. Tyto hodnoty využijeme k zodpovězení otázek ze zadání, pro první část úlohy získáme

$$y = 17\,152 \cdot 20^{-1,6279} \doteq 130,7278,$$

a tedy počet lidí, kteří v roce 2001 vydělávali více než 20 000 \$, je přibližně 131 milionů. Řešení podbodu (b) první části úlohy ponecháme na čtenáři.

Druhou část příkladu pro data z České republiky vyřešíme obdobně. Označme N celkový počet obyvatel a uvažujme x v jednotkách a y v procentech. Diferenciální rovnice je stejná jako v předchozí části příkladu, její řešení je $y = cx^{-k}$. S využitím údajů ze zadání dopočítáme hodnoty konstant, tj.

$$0,25N = c \cdot 30500^{-k} \qquad \text{a} \qquad 0,75N = c \cdot 16500^{-k},$$

z čehož řešením této soustavy získáme

$$k = \frac{-\ln 3}{\ln \frac{165}{305}} \doteq 1,7882 \qquad \text{a} \qquad c = 0,25N \cdot 30500^{k} \doteq 26107481,65N.$$

S využitím těchto hodnot můžeme nyní spočítat přibližný počet lidí, kteří vydělávali více než 43 000 Kč, máme tedy rovnici

$$y = 26107481,65N \cdot 43000^{-1,7882} \doteq 0,13527N, \text{ tedy přibližně } 13,5\,\% \text{ obyvatel.}$$

V datech je v této příjmové skupině přibližně 11 % obyvatel, náš odhad tedy téměř odpovídá realitě. Podívejme se ještě na problém nalezení mediánové mzdy, což je mzda, která rozděluje příjmové rozdělení na poloviny, 50 % obyvatel má příjmy pod touto hranicí, druhých 50 % nad. Do naší rovnice tedy dosadíme $0,5N$ za y, tj.

$$0,5N = 26107481,65N \cdot x^{-1,7882}.$$

Řešením této rovnice získáme

$$\ln x = \frac{\ln \frac{0,5}{26107481,65}}{-1,7882}, \qquad \text{a tedy} \qquad x \doteq 20\,670.$$

Mediánová mzda ve čtvrtém čtvrtletí roku byla necelých 23 000 Kč, i tato jednoduchá diferenciální rovnice je tedy schopna popsat realitu celkem přesně. Poslední podbod této úlohy ponecháme čtenáři k samostatnému řešení. Zajímavým faktem je, že při takto zadaných úrovních příjmů se hodnota mediánové mzdy již poměrně výrazně odchýlí od reality. △

Příklad 1.32. Reklama
Marketingové oddělení firmy rozjíždí novou reklamní kampaň ve městě, ve kterém žijí 2 miliony lidí. S využitím znalostí o minulých kampaních vědí, že šíření povědomí o novém produktu může být popsáno diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kt(N-P),$$

kde $P = P(t)$ je počet lidí, kteří o produktu vědí v čase t vyjádřeném ve dnech, N je celkový počet lidí žijících ve městě v milionech a $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Jestliže při zahájení reklamní kampaně produkt nezná nikdo a po 10 dnech o něm ví 20 % obyvatel, určete, kdy se o produktu dozví 1 500 000 lidí.

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, u které nejprve určíme nulový bod pravé strany rovnice, kterým je $P = N$, což je konstantní řešení. Rovnici dál řešíme úpravou a následnou integrací, tj.

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{N-P} = \int kt \,\mathrm{d}t,$$

z čehož plyne

$$-\ln|N-P| = k\frac{t^2}{2} + c.$$

Obecné řešení je tedy

$$P = N - ce^{-k\frac{t^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

S využitím informací ze zadání získáme integrační konstantu c a konstantu k jako

$$P(0) = 0 = 2 - c, \qquad \text{a tedy} \qquad c = 2,$$

$$P(10) = 0,4 = 2(1 - e^{-50k}), \qquad \text{z čehož po úpravě máme} \qquad k = -\frac{\ln 0,8}{50} \doteq 0,00446.$$

Zbývá odpovědět na otázku, kdy se o produktu dozví 1 500 000 lidí. Hledáme tedy t, které vyhovuje rovnici

$$1,5 = 2(1 - e^{-0,00446\frac{t^2}{2}}).$$

Úpravou této rovnice získáme

$$e^{-0,00446\frac{t^2}{2}} = 0,25, \qquad \text{z čehož úpravou dostaneme} \qquad t^2 = -2\frac{\ln 0,25}{0,00446}.$$

Řešením této rovnice je $t \doteq 24,933$, tři čtvrtiny obyvatel města se o produktu dozvědí přibližně za 25 dní.

$\triangle$

Příklad 1.33. Cena maximalizující zisk
Slovenská společnost vyrábí a prodává ručníky. Mezní náklad (tj. náklad na výrobu dodatečné jednotky) na výrobu jednoho dalšího ručníku je 0,15 €. Šetření trhu ukázalo, že každé zvýšení ceny o 0,1 € znamená snížení objemu prodeje o 50 ručníků za týden. V současnosti společnost prodává 1 000 ručníků týdně za cenu, která maximalizuje jejich zisk. Určete výši této ceny.

Řešení. Označme x počet ručníků prodaných za týden, $P = P(x)$ cenu při prodeji x ručníků a $C = C(x)$ náklady na výrobu x ručníků. Ze zadání a znalosti základů ekonomické teorie nejprve sestavme diferenciální rovnici pro náklady. Víme, že mezní náklad na výrobu dalšího ručníku je 0,15 €, můžeme tedy psát

$$C(x+h) = C(x) + 0,15h,$$

z čehož za předpokladu spojitosti x sestavíme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 0,15.$$

Obdobně sestavíme i rovnici pro cenu $P(x)$, ze znalosti zadání můžeme psát

$$P(x+h) = P(x) - \frac{0,1}{50}h,$$

kde dělením 50 získáme změnu ceny, která by vedla ke snížení objemu prodeje o jeden ručník za týden. Máme tedy diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\frac{0,1}{50}.$$

Tyto diferenciální rovnice můžeme upravit a následně integrovat, tj.

$$\int \mathrm{d}C = \int 0,15\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \mathrm{d}P = \int -\frac{1}{500}\mathrm{d}x,$$

z čehož získáme funkční podobu nákladů a ceny

$$C(x) = 0,15x + c_1 \quad \text{a} \quad P(x) = -\frac{1}{500}x + c_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty. Zisk firmy $\pi(x)$ je dán rozdílem jejích příjmů a výdajů, což lze zapsat jako

$$\pi(x) = x \cdot P(x) - C(x) = -\frac{1}{500}x^2 + c_2 x - 0,15x - c_1.$$

Ze zadání víme, že společnost maximalizuje svůj zisk při prodeji 1 000 ručníků týdně, musí tedy platit $\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x} = 0$, přičemž

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{500}x + c_2 - 0,15.$$

Druhou derivací nyní ověříme, že se skutečně jedná o maximum, platí totiž

$$\pi'' = -\frac{1}{250} < 0.$$

Z výše uvedených vztahů pak můžeme sestavit rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{250} \cdot 1000 + c_2 - 0,15 = 0$$

a najít tak hodnotu konstanty $c_2 = 4,15$. Hledaná cena, která maximalizuje zisk, je tudíž

$$P(x) = -\frac{1}{500}x + c_2 = -2 + 4,15 = 2,15€.$$

Hodnotu konstanty c_1, která vyjadřuje fixní náklady (neboť i při výrobě 0 ručníků jsou tyto náklady stále přítomny), bychom potřebovali pouze k přesnému vyjádření nákladové funkce. Pro zajímavost si můžeme dopočítat zisk, který firma vykazuje, tj.

$$\pi(1000) = -\frac{1}{500}1000^2 + 4150 - 150 - c_1 = 2000 - c_1.$$

Bez dalších znalostí ekonomické teorie nemůžeme ani zisk, ani hodnotu konstanty c_1 blíže určit. Jestliže předpokládáme, že trh ručníků je dokonale konkurenční a situace odpovídá dlouhému období, můžeme říct, že ekonomický zisk této společnosti, stejně jako ekonomické zisky ostatních společností na tomto trhu, je nulový.

$\triangle$

Příklad 1.34. Sněhový pluh
V dopoledních hodinách začne ustavičně sněžit a během dne sněžení nepřestává. V poledne vyjede sněhový pluh, který odklízí sníh konstantní rychlostí. Tato rychlost je přímo úměrná součinu průřezu odklízeného sněhu a rychlosti pluhu. Pluh odklidí dva kilometry v první hodině a jeden kilometr v hodině druhé. Určete, kdy začalo sněžit, za předpokladu, že silnice je všude stejně široká (ω).

Řešení. Označme t čas měřený v hodinách po poledni, tj. $t = 0$ odpovídá poledni, b čas před polednem se záporným znaménkem, ve kterém začalo sněžit, $x = x(t)$ vzdálenost, kterou pluh urazil v čase t měřeném v hodinách, a $H = H(t)$ výšku sněhu v čase t. Ze zadání víme, že sníh padá konstantní rychlostí, výšku sněhu v čase $t+h$ tedy můžeme zapsat jako $H(t+h) = H(t) + kh$, z čehož úpravou získáme

$$\frac{H(t+h) - H(t)}{h} = k.$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = k,$$

kde k je konstanta popisující rychlost padání sněhu. Integrováním této rovnice získáme

$$H = kt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Z tohoto vztahu můžeme integrační konstantu c vypočítat tak, že víme, že $H(-b) = 0$ (neboť v čase b hodin před polednem bylo 0 centimetrů sněhu), z čehož $0 = -bk + c$, a tedy $c = bk$, $H(t) = k(t+b)$. Označme nyní a konstantní rychlost odklízení sněhu. Víme, že a je úměrná průřezu odklízeného sněhu a rychlosti pluhu. S využitím předpokladu o stejné šířce silnic pak můžeme psát

$$a = \omega H(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Po dosazení výrazu pro $H(t)$ a úpravě získáme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{\omega k(t+b)}.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit integrací, kterou dostaneme

$$x = \frac{a}{\omega k} \ln|t+b| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením podmínky $x(0) = 0$ získáme hodnotu integrační konstanty $C = -\frac{a \ln|b|}{\omega k}$. Rovnici tedy můžeme psát jako

$$x = \frac{a}{\omega k} \big[\ln|t+b| - \ln|b|\big].$$

Dosazením dalších dvou podmínek $x(1) = 2$ a $x(2) = 3$ získáme rovnice

$$2 = \frac{a}{\omega k} \big[\ln|1+b| - \ln|b|\big] \qquad \text{a} \qquad 3 = \frac{a}{\omega k} \big[\ln|2+b| - \ln|b|\big].$$

Jelikož nás zajímá pouze hodnota konstanty b, můžeme soustavu řešit např. následujícím způsobem. Nejprve si se znalostí pravidel pro práci s logaritmy přepíšeme v obou rovnicích rozdíly logaritmů na logaritmy podílu logaritmovaných výrazů a poté vydělíme rovnici vlevo rovnicí vpravo, čímž dostaneme

$$\frac{2}{3} = \frac{\ln \frac{1+b}{b}}{\ln \frac{2+b}{b}}.$$

V tomto kroku jsme také odstranili absolutní hodnoty, neboť b a tedy i $b+1$, $b+2$ jsou kladná čísla. Dále rovnici upravíme do tvaru

$$\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)^2 = \ln\left(\frac{1+b}{b}\right)^3, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \left(\frac{2+b}{b}\right)^2 = \left(\frac{1+b}{b}\right)^3.$$

Úpravou této rovnice dostaneme kvadratickou rovnici

$$b^2 + b - 1 = 0, \qquad \text{jejíž kořeny jsou} \qquad b_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pouze kořen $b_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \doteq 0{,}618$ je kladný, a tedy odpovídá hledanému řešení. Sněžit začalo přibližně $0{,}618$ hodiny před polednem, tj. asi v 11:23.

△

Příklad 1.35. Nádrž se slanou vodou
V nádrži je 500 litrů vody, ve které je rozpuštěno 30 kilogramů soli. Do této nádrže přitéká čistá voda rychlostí 20 litrů za minutu, ven vytéká dokonale promíchaný roztok rychlostí 15 litrů za minutu. Jestliže je objem nádrže 1 500 litrů, jaké bude množství soli rozpuštěné ve vodě v okamžiku, kdy se nádrž naplní?

Řešení. Nejprve sestavíme diferenciální rovnici odpovídající výše uvedenému problému. Označme $y = y(t)$ množství soli v nádrži v čase t měřeném v minutách, $V = V(t)$ celkový objem kapaliny v čase t. Hledaná diferenciální rovnice bude ve tvaru

$$\begin{array}{c}\text{rychlost změny}\\ \text{množství soli}\\ \text{v nádrži}\end{array} = \left(\begin{array}{c}\text{rychlost, kterou}\\ \text{sůl přitéká}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{rychlost, kterou}\\ \text{sůl vytéká.}\end{array}\right)$$

Rychlost odtoku soli můžeme vypočítat jako

$$\frac{y(t)}{V(t)} \cdot 15, \quad \text{kde 15 je rychlost odtoku dokonalé směsi.}$$

Vzhledem k tomu, že do nádrže přitéká pouze voda bez soli, je rychlost přítoku soli rovna nule. Z těchto informací sestavme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot 15. \tag{1.15}$$

Nyní nám zbývá určit celkový objem kapaliny v čase t, označený $V(t)$. Víme, že objem v čase $t = 0$ je $V(0) = 500$ litrů a také, že každou minutu přibude v nádrži 5 litrů kapaliny, z čehož plyne

$$V(t) = 500 + (20 - 15)t = (500 + 5t),$$

přičemž $V(t)$ je vyjádřen v litrech. Dosazením vztahu pro objem do rovnice (1.15) získáme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{500+5t} \cdot 15 = -\frac{3y}{100+t}.$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, jejíž konstantní řešení je $y = 0$. Rovnici řešíme obdobně jako předchozí příklady, tj.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{3y} &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{100+t},\\
\frac{1}{3}\ln|y| &= -\ln|100+t| + c, \qquad c \in \mathbb{R},\\
\ln|y|^{\frac{1}{3}} &= \ln|100+t|^{-1} + c,\\
y^{\frac{1}{3}} &= \frac{c}{100+t},\\
y(t) &= \frac{c}{(100+t)^3}, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

V obecném řešení rovnice je již zahrnuto její konstantní řešení. Dosazením počáteční podmínky $y(0) = 30$ do obecného řešení určíme hodnotu integrační konstanty c, tj.

$$30 = \frac{c}{(100)^3} \qquad c = 30 \cdot (100)^3.$$

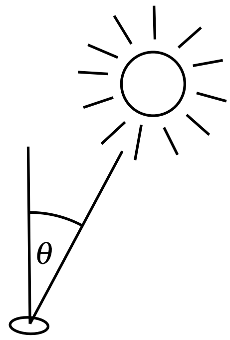
Čtenář snadno ověří, že čas, ve kterém se nádrž naplní, je $t = 200$. Množství soli v nádrži v tomto čase získáme dosazením c a času $t = 200$ do obecného řešení rovnice. Hledané množství soli v plné nádrži je tedy

$$y(200) = \frac{30 \cdot (100)^3}{(300)^3} = \frac{10}{9}\ \text{kg}.$$

△

Příklad 1.36. Růst listu kaktusu

Mladý list určitého druhu kaktusu (pozn. vicuna plant) má přibližně kruhový tvar. Plocha listu má tempo růstu, které je přímo úměrné součinu poloměru listu a intenzitě paprsků světla, jež na list dopadají. Tato intenzita je přímo úměrná součinu plochy listu a kosinu úhlu mezi směrem paprsku světla a přímkou kolmou k zemi. Vyjádřete plochu listu jako funkci času, jestliže tato plocha byla 0,16 cm^2 v 6 hodin a 0,25 cm^2 v 18 hodin. Pro jednoduchost předpokládejte, že slunce ten den vycházelo v 6 hodin a zapadalo v 18 hodin.



Řešení. Označme $S = S(t)$ plochu listu v čase t měřeném v hodinách, přičemž stanovme, že $t = 0$ pro 6 hodin ráno. Ze zadání víme, že $S(0) = 0,16\,\text{cm}^2$ a $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = \alpha r(t)I(t)$, kde $r = r(t)$ je poloměr listu v čase t a $I = I(t)$ je intenzita světla dopadajícího na list v čase t. Ze zadání víme také, že $I(t) = \beta S(t)\cos\theta(t)$, kde β je konstanta a $\theta = \theta(t)$ je úhel mezi paprskem světla a přímkou kolmou k zemi. Za předpokladu, že slunce je ve své nejvyšší pozici v poledne a že úhel θ je přibližně lineární funkcí času, máme

$$\theta(t) = at + b, \quad \theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta(6) = 0, \quad \theta(12) = \frac{\pi}{2},$$

z čehož $a = \frac{\pi}{12}, b = -\frac{\pi}{2}$ a $\theta(t) = \frac{\pi(t-6)}{12}$.

Ze zadání víme, že $S(t) = \pi r^2(t)$, a tedy $r(t) = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. S využitím vztahů uvedených výše můžeme hledanou diferenciální rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \alpha\beta\sqrt{\frac{S}{\pi}}S(t)\cos\left[\frac{\pi(t-6)}{12}\right].$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Označíme-li $k := \alpha\beta/\sqrt{\pi}$, můžeme problém zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}S}{S\sqrt{S}} = k\cos\left[\frac{\pi(t-6)}{12}\right]\mathrm{d}t.$$

Integrováním obou stran obdržíme

$$\frac{-2}{\sqrt{S}} = \frac{12k}{\pi}\sin\left[\frac{\pi(t-6)}{12}\right] + c.$$

Hodnoty konstant k a c získáme dosazením podmínek $S(0) = 0,16$ a $S(12) = 0,25$ do výše uvedeného řešení, čímž dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$$\frac{-2}{0,4} = \frac{12k}{\pi}\sin\left(\frac{-6\pi}{12}\right) + c \quad \text{a} \quad \frac{-2}{0,5} = \frac{12k}{\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right) + c.$$

Po úpravě máme rovnice

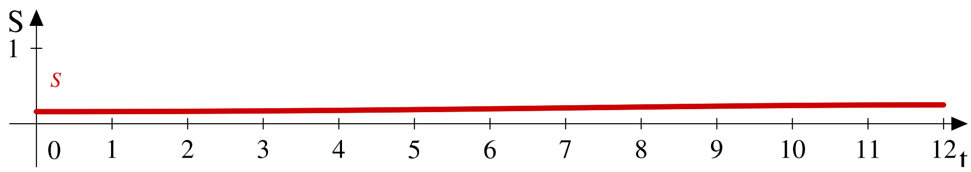
$$-5 = -\frac{12k}{\pi} + c \quad \text{a} \quad -4 = \frac{12k}{\pi} + c.$$

Řešením této soustavy jsou $k = \frac{\pi}{24}$ a $c = -\frac{9}{2}$. Po dosazení těchto hodnot a úpravě rovnice můžeme hledanou plochu listu v závislosti na čase vyjádřit jako

$$S(t) = \frac{16}{\left[\sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right) - 9\right]^2}.$$

Graf této funkce je pro ilustraci znázorněn na Obrázku 1.5.

△



Obrázek 1.5: Růst kaktusového listu

V následujícím příkladu se podíváme na jednu z tzv. stíhacích křivek, které obecně popisují trajektorii objektu, který následuje jiný pohybující se objekt. Jedním z příkladů může být např. pes, který běží za zajícem v poli, či osoba, která je tažena psem.

Příklad 1.37. Psí křivka

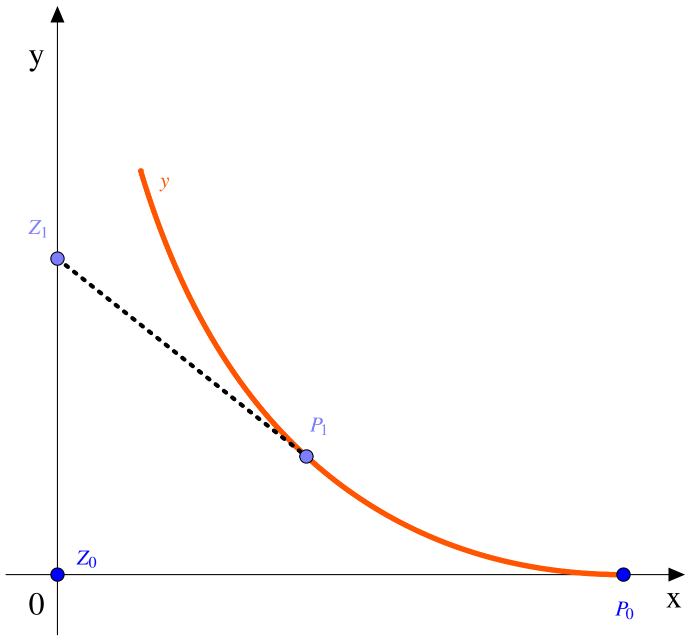
Pes spatří zajíce, který běží polem, a začne ho pronásledovat. Zajíc se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v_z a pes běží ve směru k zajíci rovnoměrnou rychlostí v_p. Určete tvar dráhy psa a čas T, za který pes zajíce dohoní, jestliže zajíc běží z bodu $(0,0)$ kartézské soustavy souřadnic ve směru osy y a pes vybíhá z bodu $(a,0)$ a v každém okamžiku běží přímo za zajícem. Uvažujme $a > 0$, pro $a = 0$ jde o jednoduchou úlohu, pro $a < 0$ je dráha psa stejná, osově souměrná. Sestavte diferenciální rovnici, jejímž řešením lze najít rovnici dráhy psa, a vyřešte ji pro stejné rychlosti běhu psa i zajíce, tj. v případě $v_z = v_p = v$. Situace je ilustrována na Obrázku 1.6. Body, ze kterých zajíc a pes vybíhají, jsou označeny jako Z_0, resp. P_0, body, ve kterých jsou zajíc a pes v čase t_1, jsou poté Z_1 a P_1. Na obrázku je také znázorněn směr, kterým pes v čase t_1 běží.

Řešení. Dráhu psa vyjádříme jako funkci $y = y(x)$. V čase $t = 0$ je $x = a$ a $y = 0$, tj. $y(a) = 0$. Předpokládejme, že $y'(0) = 0$, tj. pes vybíhá z klidu. V čase $0 < t_1 < T$ se zajíc nachází v bodě $(0, v_z t_1)$ a pes v bodě $(x_0, y(x_0))$, kde $x_0 \in (0,a)$, neboť zajíc běží po ose y. Rovnici tečny k psí křivce, kterou označíme K, můžeme psát jako

$$K : y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{z čehož plyne} \qquad y'(x_0) = \frac{y - y(x_0)}{x - x_0}.$$

Tato tečna je znázorněna na Obrázku 1.7. Jelikož tato tečna prochází bodem $Z_1 = [0, v_z t_1]$ dostáváme odtud volbou $x = 0$ rovnost

$$y'(x_0) = \frac{v_z t_1 - y(x_0)}{-x_0} = \frac{y(x_0) - v_z t_1}{x_0},$$



Obrázek 1.6: Psí křivka

a pro rychlost psa tedy můžeme psát

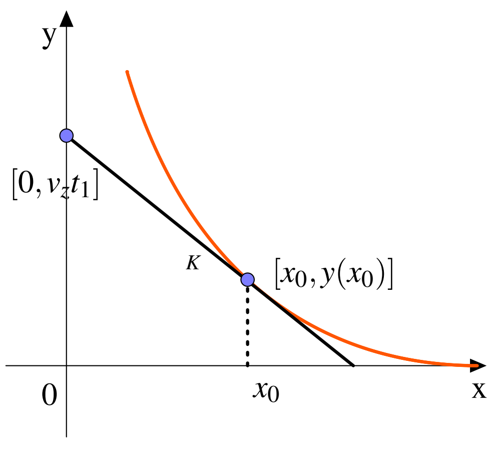
$$y'(x) = \frac{y - v_z t_1}{x}. \tag{1.16}$$

Za čas t_1 urazí pes dráhu $v_p t_1$, jejíž délku můžeme zapsat jako

$$v_p t_1 = \int_a^x \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, \mathrm{d}u = -\int_x^a \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, \mathrm{d}u.$$

Dosazením výrazu pro t_1 do rovnice (1.16) dostaneme

$$xy' = y + \frac{v_z}{v_p} \int_x^a \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, \mathrm{d}u. \tag{1.17}$$



Obrázek 1.7: Tečna psí křivky

Derivováním obou stran rovnice (1.17) podle x získáme

$$y' + xy'' = y' + \frac{v_z}{v_p}\sqrt{1+[y'(x)]^2} \qquad \text{neboli} \qquad xy'' = \frac{v_z}{v_p}\sqrt{1+[y'(x)]^2}, \tag{1.18}$$

což je hledaná diferenciální rovnice, která je nelineární rovnicí 2. řádu. Uvažujme dále případ, ve kterém je $v_p = v_z = v$. Tuto rovnici vyřešíme substitucí $z(x) = y'$. Máme tedy

$$xz' = \sqrt{1+z^2},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Tuto rovnici vyřešíme integrováním

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{1.19}$$

kterým dostaneme

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + c.$$

Odlogaritmováním a odstraněním absolutních hodnot získáme rovnost

$$z + \sqrt{1+z^2} = cx.$$

Hodnotu integrační konstanty c najdeme s využitím podmínky $y'(a) = z(a) = 0$, máme tedy $c = \frac{1}{a}$. Výsledek integrování (1.19) můžeme zapsat také jako

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln|x| + c = \ln cx,$$

což lze upravit na

$$z = \sinh \ln cx = \frac{1}{2}\left(cx - \frac{1}{cx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right).$$

Při této úpravě jsme využili definice hyperbolického sinu, pro který platí

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Dráhu y získáme integrováním z, tj.

$$y = \int z\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ln|x|\right) + k,$$

kde k značí integrační konstantu, jejíž hodnotu získáme s využitím podmínky $y(a) = 0$. Řešíme tedy rovnici

$$0 = \frac{a^2}{4a} - \frac{a}{2}\ln a + k, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad k = \frac{a}{2}\ln a - \frac{a^2}{4a}.$$

Dráhu y tedy můžeme zapsat jako

$$y = \frac{x^2}{4a} - \frac{a}{2}\ln x + \frac{a}{2}\ln a - \frac{a^2}{4a} = \frac{x^2 - a^2}{4a} - \frac{a}{2}\ln\frac{x}{a}.$$

Čas T, ve kterém pes zajíce dostihne, můžeme získat limitním přechodem pro x jdoucí k nule, tj.

$$T = \lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2-a^2}{4a} - \frac{a}{2}\ln\frac{x}{a}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2-a^2}{4a} + \frac{a}{2}\ln a - \frac{a}{2}\ln x\right) =$$
$$= -\frac{a}{4} + \frac{a}{2}\ln a - \frac{a}{2}\lim_{x\to0^+}\ln x = \infty.$$

V případě, že pes i zajíc běží oba stejnou rychlostí, pes zajíce nikdy nedohoní. Při řešení rovnice pro různé rychlosti běhu bychom postupovali obdobně, jejich podrobnější řešení ponecháme na čtenáři. Inspiraci je možné najít např. v [48] či [50].

△

1.1 Homogenní rovnice

Další typ rovnice, který uvádíme v této kapitole, je homogenní diferenciální rovnice. Název *homogenní rovnice* vychází z definice homogenity funkcí uvedené níže. Hlavním důvodem zařazení homogenních rovnic k rovnicím se separovanými proměnnými je postup jejich řešení, který je uveden v Poznámce 1.14.

Definice 1.12. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.20}$$

nazýváme *homogenní diferenciální rovnicí 1. řádu.*

Definice 1.13. Nechť funkce dvou proměnných $f(x,y)$ je definována na nějakém kuželu K, tj. na množině s vlastností, že s každým bodem $[x,y] \in K$ je také $[tx,ty] \in K$ pro každé $t \geq 0$. Tato funkce se nazývá *homogenní k-tého stupně*, kde $k \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $t \geq 0$ platí

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Diferenciální rovnice ve tvaru

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

je homogenní rovnicí prvního stupně právě tehdy, když jsou funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ homogenní téhož stupně.

Poznámka 1.14 (Řešení homogenní diferenciální rovnice). Homogenní rovnici převedeme substitucí $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ na rovnici se separovanými proměnnými. Touto substitucí získáme $y' = z'x + z$, což je ekvivalentní rovnici $z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big)$, kterou vyřešíme vzhledem k z. Toto řešení pak využijeme k nalezení řešení y původní rovnice, přičemž y může být implicitně zadaná funkce. Tento postup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.38. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx}.$$

Řešení. Rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$2xy\mathrm{d}y = (y^2 - x^2)\mathrm{d}x,$$

ze kterého vidíme, že $f(x,y)$ je homogenní funkce druhého stupně. Tuto rovnici tedy můžeme řešit jako homogenní rovnici. Čitatel i jmenovatel zlomku na pravé straně vydělíme x^2, abychom rovnici dostali do podoby $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, máme tak

$$y' = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2\frac{y}{x}}.$$

Nyní můžeme zavést substituci $z(x) = \frac{y}{x}$, neboli $y = zx$. Pro y' pak můžeme psát $y' = z'x + z$. Dosazením substituce získáme

$$z + xz' = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad \text{z čehož úpravou dostaneme} \quad xz' = -\frac{(z^2+1)}{2z},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro $z(x)$. Ze zadání je zřejmé, že $y \neq 0$, a tedy $z \neq 0$. Tuto rovnici řešíme nám již známým způsobem následovně

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z}{z^2+1}\mathrm{d}z &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\ln|z^2+1| &= -\ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}, \\
z^2 + 1 &= \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Po navrácení substituce tedy

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad y^2 + x^2 = cx, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Hledané obecné řešení je ve tvaru

$$y = \pm\sqrt{cx - x^2}.$$

△

Následující příklad vychází z [37].

Příklad 1.39. Elasticita
Jestliže $y = C(x)$ reprezentuje náklady na produkci x jednotek ve výrobním procesu, můžeme definovat elasticitu jako

$$E(x) = \frac{\text{mezní náklady}}{\text{průměrné náklady}} = \frac{C'(x)}{\frac{C(x)}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Najděte nákladovou funkci, jestliže elasticita je

$$E(x) = \frac{20x - y}{2y - 10x}, \text{ kde } C(100) = 500 \text{ a } x \geq 100.$$

Řešení. Ze zadání můžeme rovnou napsat diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{20x - y}{2y - 10x}, \qquad \text{kterou upravíme na} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{20 - \frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 10}.$$

Nyní zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, neboli $y = zx$, čímž získáme

$$z'x + z = z\frac{20 - z}{2z - 10}, \qquad \text{což upravíme na} \qquad z'x = \frac{20z - z^2 - z(2z - 10)}{2z - 10} = \frac{3(10z - z^2)}{2z - 10}.$$

Separováním proměnných a integrováním obou stran dostaneme

$$\int \frac{2z - 10}{10z - z^2} \mathrm{d}z = \int \frac{3}{x} \mathrm{d}x,$$

a tedy

$$-\ln|10z - z^2| = 3\ln|x| + c.$$

Úpravou a odlogaritmováním dojdeme k výrazu

$$z(10 - z) = \frac{c}{x^3}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pro původní proměnné tedy máme

$$\frac{y}{x}\left(10 - \frac{y}{x}\right) = \frac{c}{x^3}, \qquad \text{z čehož úpravou obdržíme} \qquad 10y - \frac{y^2}{x} = \frac{c}{x^2}.$$

Hodnotu integrační konstanty c získáme dosazením podmínky $y(100) = 500$ do řešení, tj.

$$100^2\left(5000 - \frac{500^2}{100}\right) = c = 25 \cdot 10^6.$$

Řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y\left(10 - \frac{y}{x}\right) = \frac{25 \cdot 10^6}{x^2},$$

kde $y(x)$ je hledaná nákladová funkce vyjádřená implicitně. $\triangle$

Kapitola 2

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 2.1. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí 1. řádu*. Pokud je $g(x) \equiv 0$, hovoříme o *homogenní* lineární diferenciální rovnici, v opačném případě tuto rovnici nazýváme *nehomogenní* lineární diferenciální rovnicí.

Název *lineární* vyjadřuje linearitu funkce $f(x,y) = -f(x)y + g(x)$ vzhledem k závisle proměnné y. Vzhledem k nezávisle proměnné x může být funkce libovolná, což ovšem neříká nic o řešitelnosti takové rovnice. O řešitelnosti rovnice (2.1) pojednává Věta 2.3. Pojem *homogenní* zde má zcela odlišný význam než v rovnici (1.20), kde homogenita značí skutečnost, že pravou stranu rovnice lze přepsat do tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Poznámka 2.2. *Přidruženou homogenní rovnicí* rozumíme rovnici $y' + f(x)y = 0$, která vznikla nahrazením $g(x)$ v rovnici (2.1) nulovou funkcí.

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [32].

Věta 2.3. *Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ (přičemž $-\infty \leq a < b \leq \infty$) jsou spojité funkce. Pak má počáteční problém*

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

kde $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, jediné řešení, které lze explicitně zapsat ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right). \tag{2.2}$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice

Obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice získáme pomocí metody separace proměnných. Řešení rovnice $y' = -f(x)y$ lze potom explicitně vyjádřit jako

$$y = c\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce $f(x)$) triviální řešení $y \equiv 0$, což lze ověřit přímým dosazením.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice
Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice lze získat dvěma způsoby, a to metodou integračního faktoru nebo metodou variace konstant. Obě tyto metody si nyní obecně popíšeme a ukážeme na konkrétních příkladech.

Poznámka 2.4 (Metoda integračního faktoru). Integračním faktorem rozumíme výraz $\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$. Pro jeho určení není nutné uvažovat integrační konstantu c, tj. k funkci $f(x)$ stačí najít jednu primitivní funkci. Obecný postup řešení metodou integračního faktoru je tedy následující. Nejprve rovnici vynásobíme integračním faktorem, čímž získáme

$$y'\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)y\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x},$$

kde na levé straně rovnice máme rozepsanou derivaci součinu. Rovnici tedy můžeme přepsat na

$$\left(y\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Integrováním obou stran rovnice získáme

$$y\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = \int g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c,$$

z čehož osamostatněním y získáme obecné řešení nehomogenní rovnice (2.1). Pro počáteční problém $y(x_0) = y_0$ tento výsledek odpovídá explicitnímu zápisu řešení z Věty 2.3.

Příklad 2.1. Pro $x > 0$ vyřešme diferenciální rovnici

$$xy' = x^2 + 3y.$$

Řešení. Nejprve rovnici upravíme do tvaru

$$y' - 3\frac{y}{x} = x$$

a poté ji vynásobíme integračním faktorem $\mathrm{e}^{-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-3\ln|x|} = x^{-3}$, čímž získáme

$$y'x^{-3} - 3yx^{-4} = x^{-2}.$$

Na levé straně rovnice máme rozepsanou derivaci součinu, můžeme tedy psát

$$\left(yx^{-3}\right)' = x^{-2}.$$

Integrováním obou stran rovnice získáme

$$yx^{-3} = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1} + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

z čehož osamostatněním y získáme obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice, které je

$$y = -x^2 + cx^3, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$\triangle$

Poznámka 2.5 (**Metoda variace konstant**). Myšlenka této metody spočívá v tom, že získáme řešení přidružené homogenní rovnice, které poté využijeme pro řešení rovnice nehomogenní. Nejdříve najdeme řešení přidružené homogenní rovnice (tj. $y(x) = c\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$), ve kterém pak nahradíme integrační konstantu c neznámou funkcí $c(x)$. S využitím pravidel pro derivování pak vypočítáme $y'(x)$, jež společně s řešením homogenní rovnice dosadíme do zadání rovnice nehomogenní. Pokud jsme postupovali správně, obdržíme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $c(x)$, ve které se neobjevuje žádný výraz obsahující nederivované $c(x)$. Tuto diferenciální rovnici pak vyřešíme a její řešení dosadíme do obecného řešení přidružené homogenní rovnice, čímž získáme hledané obecné řešení rovnice nehomogenní. I tento postup si nyní ukážeme na příkladu.

Příklad 2.2. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x.$$

Řešení. Nejprve se zaměříme na přidruženou homogenní rovnici, která je ve tvaru

$$y' = 3y \operatorname{tg} x.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit separováním proměnných. Nulovým bodem funkce $g(y)$ je v tomto případě $y = 0$. Poté za předpokladu, že $y \not\equiv 0$, separujeme proměnné a obě strany rovnice integrujeme, čímž získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 3 \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x, \\
\ln|y| &= -3\ln|\cos x| + c, \\
\ln|y| &= \ln|\cos x|^{-3} + c, && c \in \mathbb{R}, \\
|y| &= c\,|\cos x|^{-3}, && c > 0, \\
y &= c\cos^{-3} x, && c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Se zahrnutím triviálního řešení můžeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice psát ve tvaru $y = c\cos^{-3} x,\ c \in \mathbb{R}$. Nyní uvažujme tuto funkci, v níž konstantu c nahradíme neznámou funkcí $c(x)$, čímž získáme $y = c(x)\cos^{-3} x$. S využitím pravidel pro derivování můžeme spočítat $y'(x)$ jako

$$y'(x) = c'(x)\cos^{-3} x + c(x)[-3\cos^{-4} x \cdot (-\sin x)] = c'(x)\cos^{-3} x + 3c(x)\cos^{-4} x \cdot \sin x.$$

Dosazením výrazu pro $y'(x)$ a $y(x)$ do původního zadání získáme

$$c'(x)\cos^{-3} x + 3c(x)\cos^{-4} x \cdot \sin x = 1 + 3c(x)\cos^{-3} x \operatorname{tg} x.$$

S využitím vzorce $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ můžeme tuto rovnici upravit na

$$c'(x)\cos^{-3} x = 1,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro funkci $c(x)$, jejíž řešení získáme integrací

$$\int c'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně řešíme substitucí $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x$, kterou dostaneme

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t = t - \frac{t^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Hledané řešení je tedy

$$c(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Dosazením $c(x)$ do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme obecné řešení původní (nehomogenní) rovnice ve tvaru

$$y = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\right) \cos^{-3} x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

△

Přestože jsou výše uvedené způsoby odlišné, stojí za povšimnutí, že je při nich potřeba spočítat stejné primitivní funkce.

Obě výše uvedené metody řešení lineárních diferenciálních rovnic si nejprve ukážeme na příkladech dvou slovních úloh vedoucích na autonomní rovnice. Autonomní rovnice můžeme chápat také jako lineární rovnice, a proto je možné je řešit metodami uvedenými výše. Zároveň v některých případech může být metoda integračního faktoru výrazně rychlejší než separace proměnných. Příklady v této kapitole vychází ze zdrojů uvedených v úvodu a [26], [36], [38], [43], [70].

Příklad 2.3. Volný pád s odporem vzduchu
Parašutista má i s padákem hmotnost 100 kg. Padák je otevřen 30 sekund po výskoku z výšky 2 000 metrů. Konstanta popisující odpor prostředí je

$$k = \begin{cases} 15 & \text{při neotevřeném padáku,} \\ 100 & \text{při otevřeném padáku.} \end{cases}$$

Jestliže předpokládáme, že odpor vzduchu je přímo úměrný rychlosti parašutisty, určete, za jak dlouho parašutista dopadne na zem. Jaká je jeho rychlost při přistání?

Řešení. Označme $v'(t) = a$ zrychlení parašutisty, na kterého působí dvě proti sobě jdoucí síly, a to síla gravitační $F_g = mg$ a síla odporová, kterou se znalostí zadání můžeme zapsat jako $F_o = -kv$, kde k je konstanta popisující odpor prostředí. Z Newtonova druhého zákona, který říká, že velikost zrychlení tělesa je přímo úměrná velikosti výslednice sil působících na těleso a nepřímo úměrná hmotnosti tělesa, můžeme psát

$$a = v'(t) = \frac{F}{m} = \frac{F_g + F_o}{m} = \frac{mg - kv}{m} = g - \frac{k}{m} v,$$

což je hledaná diferenciální rovnice, kterou vyřešíme metodou integračního faktoru. Rovnici tedy upravíme a vynásobíme integračním faktorem $\mathrm{e}^{\int \frac{k}{m} \mathrm{d}t}$, čímž dostaneme

$$v' \mathrm{e}^{\frac{kt}{m}} + \frac{k}{m} v \mathrm{e}^{\frac{kt}{m}} = g \mathrm{e}^{\frac{kt}{m}}.$$

Na levé straně máme rozepsanou derivaci součinu, můžeme tedy psát

$$(v\mathrm{e}^{\frac{kt}{m}})' = g\mathrm{e}^{\frac{kt}{m}}.$$

Integrováním obou stran rovnice získáme obecné řešení, které je ve tvaru

$$v = \frac{gm}{k} + c\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnotu integrační konstanty můžeme získat dosazením podmínky $v(0) = 0$ do obecného řešení, čímž získáme $c = -\frac{gm}{k}$. Pro konkrétní údaje ze zadání můžeme po úpravě rovnici pro skok při zavřeném padáku psát ve tvaru

$$v_1 = \frac{196}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3t}{20}}\right).$$

Při otevření padáku (tj. 30 sekund po výskoku) má parašutista rychlost

$$v_1 = \frac{196}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3\cdot 30}{20}}\right) \doteq 64,608 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Označme $S(t)$ dráhu, kterou parašutista urazí v čase t. Ze znalosti vztahu $v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ například z Příkladu 1.27 můžeme dráhu, kterou parašutista překoná za čas $t = 30$ sekund, psát jako

$$S_1(t) = \int_0^t v_1(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{196}{3}u - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3u}{20}} \cdot \left(-\frac{100}{15}\right)\right]_0^t = \frac{196}{3}t + \frac{3920}{9}\mathrm{e}^{-\frac{3t}{20}} - \frac{3920}{9}.$$

Což při dosazení $t = 30$ můžeme vyčíslit jako

$$S_1(30) = \frac{13720}{9} + \frac{3920}{9}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}} \doteq 1529,283 \text{ metru.}$$

Rychlost parašutisty při otevřeném padáku můžeme psát jako

$$v_2 = \frac{gm}{k} + c\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}.$$

Hodnotu integrační konstanty c můžeme spočítat ze znalosti počáteční rychlosti v čase, kdy se otevře padák, který teď pro jednoduchost opět označme jako $t = 0$, tj.

$$\frac{196}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3\cdot 30}{20}}\right) = 9,8 + c\mathrm{e}^0, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = \frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}} \doteq 54,808.$$

Rychlost, kterou parašutista letí po otevření padáku, můžeme tedy zapsat jako

$$v_2(t) = 9,8 + \left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right)\mathrm{e}^{-t}. \tag{2.3}$$

Stejně jako v předchozí části úlohy získáme dráhu, kterou parašutista uletí s otevřeným padákem, integrováním výrazu pro rychlost. Máme tedy

$$\begin{aligned} S_2(t) = \int_0^t v_2(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^t 9,8 + \left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right)\mathrm{e}^{-u} = \\ &= \left[9,8u + \left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right)\mathrm{e}^{-u} \cdot (-1)\right]_0^t = \\ &= 9,8t - \left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\right). \end{aligned}$$

Celkovou dráhu S můžeme zapsat jako součet S_1 a S_2, úpravou získáme

$$S = 9,8t - \frac{833}{15}\mathrm{e}^{-t} + \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\mathrm{e}^{-t} + \frac{71099}{45} + \frac{3332}{9}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}$$

Ze zadání víme, že parašutista vyskočil z 2 000 metrů, hledáme tedy t_1, které vyhovuje rovnici

$$2\,000 = 9,8t_1 - \frac{833}{15}\mathrm{e}^{-t_1} + \frac{196}{3}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}\mathrm{e}^{-t_1} + \frac{71099}{45} + \frac{3332}{9}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}.$$

Jedná se o transcendentní rovnici, ze které nemůžeme t_1 explicitně vyjádřit. Hodnotu t_1 tedy zjistíme např. za pomoci softwaru Maxima, který najde kořen $t_1 \doteq 42,4397$. Parašutista dopadne na zem po necelých 43 sekundách letu s otevřeným padákem, celková doba letu je tedy necelých 73 sekund. Rychlost parašutisty při dopadu vypočteme dosazením tohoto t_1 do rovnice (2.3) pro v_2, přičemž musíme vzít v potaz, že v této rovnici měříme t od okamžiku, kdy parašutista otevře padák. Při dopadu se tedy parašutistova rychlost blíží hodnotě $9,8\frac{m}{s}$.

△

Příklad 2.4. Populace hmyzu ohrožovaná predátory
Populace hmyzu v určité oblasti roste úměrně k současné populaci a bez přítomnosti jiných faktorů je čas potřebný k jejímu zdvojnásobení jeden měsíc. Původně je v oblasti 500 jedinců, přičemž predátoři jich zahubí 100 měsíčně. Za jak dlouho se hmyz v oblasti přemnoží, jestliže hranice přemnožení je tisícinásobek původního počtu?

Řešení. Předpokládejme nejprve, že se v oblasti nevyskytují predátoři, a označme $P = P(t)$ populaci hmyzu v čase t měřeném v měsících. Tato situace odpovídá diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP,$$

kde k je kladná konstanta, jejíž hodnotu potřebujeme znát při řešení druhé části příkladu. Jedná se o autonomní rovnici, jejímž řešením je

$$P = c\mathrm{e}^{kt},\ c \in \mathbb{R}.$$

Ze zadání víme, že $P(0) = 500$ a že se populace zdvojnásobí za jeden měsíc, platí tedy $P(1) = 1\,000$. Dosazením těchto podmínek do řešení získáme $c = 500$ a $k = \ln 2$. Podrobnější postupy ponecháme na čtenáři, neboť se jedná o analogii Příkladu 1.3. Nyní uvažme situaci s predátory. Diferenciální rovnice bude v tomto případě ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP - 100.$$

Jedná se opět o autonomní rovnici, kterou vyřešíme metodou variace konstant, neboť již z předchozí části úlohy známe řešení přidružené homogenní rovnice. V tomto řešení nyní uvažujme konstantu c jako neznámou funkci $c = c(t)$, tedy

$$P = c(t)\mathrm{e}^{kt}.$$

S využitím pravidel pro derivování můžeme psát

$$P' = c'(t)\mathrm{e}^{kt} + kc(t)\mathrm{e}^{kt}.$$

Dosazením tohoto výrazu a řešení přidružené homogenní rovnice do lineární diferenciální rovnice získáme

$$c'(t)\mathrm{e}^{kt}+kc(t)\mathrm{e}^{kt}=kc(t)\mathrm{e}^{kt}-100,$$

z čehož získáme diferenciální rovnici pro $c(t)$ ve tvaru

$$c'(t)=-100\mathrm{e}^{-kt},$$

kterou vyřešíme integrováním obou stran. Řešení

$$c(t)=\frac{100}{k}\mathrm{e}^{-kt}+c$$

dosadíme do řešení přidružené homogenní rovnice, čímž získáme

$$P=\left(\frac{100}{k}\mathrm{e}^{-kt}+c\right)\mathrm{e}^{kt}=\frac{100}{k}+c\mathrm{e}^{kt}.$$

Hodnotu konstanty c získáme z podmínky $P(0)=500$, tj.

$$c=500-\frac{100}{k},$$

přičemž hodnotu $k=\ln 2$ jsme vypočítali v první části příkladu. Zbývá již jen odpovědět na otázku, kdy se hmyz v oblasti přemnoží. Tuto odpověď získáme vyčíslením t z rovnice

$$500\,000=\frac{100}{\ln 2}+\left(500-\frac{100}{\ln 2}\right)\mathrm{e}^{\ln 2\cdot t}=\frac{100}{\ln 2}+\left(500-\frac{100}{\ln 2}\right)2^t.$$

Hmyz se tedy přemnoží přibližně za

$$t=\frac{\ln\left(\frac{500\,000-\frac{100}{\ln 2}}{500-\frac{100}{\ln 2}}\right)}{\ln 2}\doteq 10{,}4565 \text{ měsíce}.$$

$\triangle$

Nyní si ukážeme slovní úlohy vedoucí na rovnice ve tvaru (2.1). V některých případech půjde o rozšíření úloh, které jsme již vyřešili v předchozí kapitole. Setkáme se zde opět jak s fyzikálními, tak s ekonomickými a dalšími aplikacemi.

Příklad 2.5. Znečištění jezera
V jezeře je 200 milionů litrů vody. Kvůli chemické továrně, která používá vodu z tohoto jezera k čištění, se do vody každou hodinu dostává 1 000 litrů vody. V těchto 1000 litrech je $100(1+\cos t)$ kilogramů rozpuštěných nečistot. Za předpokladu, že do jezera nic jiného nepřitéká a že z jezera do továrny teče každou hodinu 1 000 litrů vody, určete množství nečistot v čase t. Množství nečistot v $t=0$ je y_0.

Řešení. Označme $y=y(t)$ hledané množství nečistot v čase t měřeném v hodinách. Změna tohoto množství závisí na tom, jak rychle nečistoty přitékají a odtékají. Přítok nečistot je zadán vztahem $100(1+\cos t)$ kg/hod. Ze zadání také víme, že objem jezera je v každém časovém okamžiku $2\cdot 10^8$ litrů. Koncentrace nečistot na litr je tedy dána jako $y(t)/(2\cdot 10^8)$. Každou hodinu se z jezera dostává 1000 litrů vody. Odtok nečistot můžeme tedy zapsat jako $1000y(t)/(2\cdot 10^8)$. Z těchto informací již můžeme sestavit diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100(1+\cos t) - \frac{1000y(t)}{2\cdot 10^8}.$$

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici, kterou vyřešíme např. metodou integračního faktoru. Pro zjednodušení si rovnici upravíme do tvaru

$$y' = -ay + 100(1+\cos t),$$

kde $a := \frac{1}{2\cdot 10^5} = 5\cdot 10^{-6}$. Obě strany rovnice potom vynásobíme integračním faktorem $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{at}$, čímž dostaneme

$$y'\mathrm{e}^{at} + ay\mathrm{e}^{at} = 100(1+\cos t)\mathrm{e}^{at},$$

což můžeme psát jako

$$\left(y\mathrm{e}^{at}\right)' = 100(1+\cos t)\mathrm{e}^{at}. \tag{2.4}$$

Úpravou a integrováním pravé strany rovnice získáme

$$\int 100\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t + \int 100\cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{100}{a}\mathrm{e}^{at} + 100\int \cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t,$$

přičemž poslední uvedený integrál nyní vyřešíme metodou per-partes, tj.

$$\int \cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & v' = \mathrm{e}^{at} \\ u' = -\sin t & v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{at} \end{array} \right| = \frac{\cos t}{a}\mathrm{e}^{at} + \frac{1}{a}\int \sin t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & v' = \mathrm{e}^{at} \\ u' = \cos t & v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{at} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{\cos t}{a}\mathrm{e}^{at} + \frac{1}{a}\left(\frac{\sin t}{a}\mathrm{e}^{at} - \frac{1}{a}\int \cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\cos t}{a}\mathrm{e}^{at} + \frac{\sin t}{a^2}\mathrm{e}^{at} - \frac{1}{a^2}\int \cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož na obou stranách předchozí rovnosti máme nyní stejný integrál, platí

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int \cos t\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{at}\frac{a\cos t + \sin t}{a^2},$$

z čehož už získáme hledanou hodnotu integrálu. Integrováním obou stran rovnice (2.4) tedy obdržíme

$$y\mathrm{e}^{at} = 100\mathrm{e}^{at}\left(\frac{1}{a} + \frac{a\cos t + \sin t}{a^2+1}\right) + c$$

neboli

$$y(t) = 100\left(\frac{1}{a} + \frac{a\cos t + \sin t}{a^2+1}\right) + c\mathrm{e}^{-at}.$$

S využitím znalosti toho, že v čase $t = 0$ bylo v jezeře y_0 nečistot, můžeme vyjádřit integrační konstantu c ve tvaru

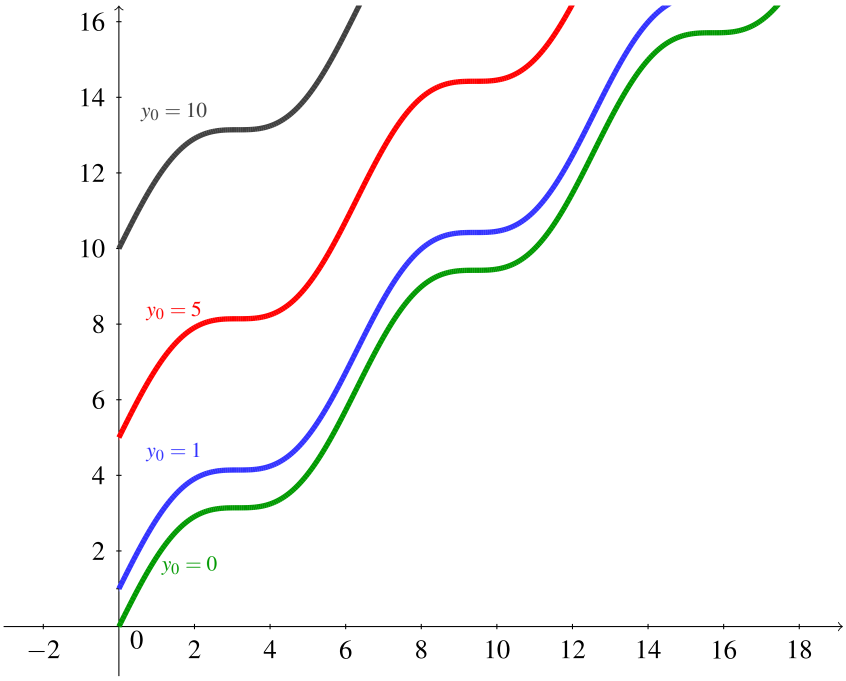
$$y_0 = 100\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+1}\right) + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = y_0 - 100\left(\frac{2a^2+1}{a^3+a}\right).$$

Hledané obecné řešení je ve tvaru

$$y(t) = y_0 e^{-at} + 100\left(\frac{1}{a} + \frac{\sin t + a\cos t}{a^2+1}\right) - 100\left(\frac{2a^2+1}{a^3+a}\right)e^{-at}.$$

Pro ilustraci je tato funkce pro hodnoty $y_0 = 0,\, 1,\, 5,\, 10$ vykreslena na Obrázku 2.1, měřítko osy y je ve stovkách kilogramů.

△



Obrázek 2.1: Znečištění jezera

Příklad 2.6. Spoření III.

Vezměme znovu v úvahu profesora P. z Příkladu 1.12. V tomto příkladu jsme vypočítali, na jak dlouho mu vydrží naspořená částka, jestliže bude následujících 10 let spořit a poté vybírat vždy 60 000 ročně. Nyní uvažme, že si profesor po odchodu do důchodu bude vybírat $60\,000 + 1\,000t$, protože si v každém roce chce dopřát stejný luxus a bojí se zdražování zboží. Na jak dlouho mu důchod vydrží v tomto případě? Jak se změní odpověď, jestliže se profesor rozhodne vybírat $60\,000 + 3\,500\cos(t\frac{\pi}{2})$, neboť si chce jednou za 4 roky dopřát větší dovolenou?

Řešení. Stejně jako v Příkladu 1.12 označme $P = P(t)$ částku peněz na účtu v tisících v čase t měřeném v letech. Se znalostí Příkladu 1.12 můžeme napsat diferenciální rovnici

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} 0{,}03P + 10 & \text{pro } 0 < t \le 10, \\ 0{,}03P - 60 - (t-10) & \text{pro } 10 < t \le T. \end{cases}$$

T nyní značí čas, kdy profesor úspory vyčerpá. V druhém případě je výraz $t - 10$, neboť v prvním roce důchodu (tj. roce 11) chce profesor vybrat 61 000. Řešení první části rovnice známe z Příkladu 1.12, vyřešme tedy nyní druhou část rovnice, a to např. metodou integračního faktoru. Úpravou a vynásobením celé rovnice výrazem $e^{-\int 0{,}03 dt}$ získáme

$$P'e^{-0{,}03t} - 0{,}03Pe^{-0{,}03t} = -(50+t)e^{-0{,}03t}.$$

Na levé straně je rozepsaná derivace součinu, můžeme tedy psát

$$\left(Pe^{-0{,}03t}\right)' = -(50+t)e^{-0{,}03t}.$$

Integrací této rovnice pak dostaneme

$$Pe^{-0{,}03t} = \int -(50+t)e^{-0{,}03t}\,dt, \tag{2.5}$$

přičemž integrál na pravé straně vyřešíme metodou per-partes, tj.

$$-\int (50+t)e^{-0{,}03t}\,dt = -50e^{-0{,}03t}\cdot\left(-\frac{1}{0{,}03}\right) - \int te^{-0{,}03t}\,dt \left|\begin{array}{ll} u=t & v'=e^{-0{,}03t} \\ u'=1 & v=-\frac{e^{-0{,}03t}}{0{,}03}\end{array}\right| =$$
$$= \frac{5000}{3}e^{-0{,}03t} - \left(-\frac{te^{-0{,}03t}}{0{,}03} - \int -\frac{e^{-0{,}03t}}{0{,}03}\,dt\right) =$$
$$= \frac{5000}{3}e^{-0{,}03t} + \frac{te^{-0{,}03t}}{0{,}03} + \frac{e^{-0{,}03t}}{0{,}03^2} + c.$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (2.5) pak po vynásobení výrazem $e^{0{,}03t}$ získáme

$$P = \frac{5000}{3} + \frac{t}{0{,}03} + \frac{1}{0{,}03^2} + ce^{0{,}03t}.$$

Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením podmínky $P(10) = 791{,}549$, tj.

$$c = \frac{791{,}549 - \frac{5000}{3} - \frac{10}{0{,}03} - \frac{1}{0{,}03^2}}{e^{0{,}03\cdot 10}} \doteq -1718{,}374.$$

Zbývá jen najít t, které řeší rovnici

$$0 = \frac{5000}{3} + \frac{t}{0{,}03} + \frac{1}{0{,}03^2} - 1718{,}374e^{0{,}03t}.$$

Toto t můžeme najít např. s pomocí softwaru Maxima, čímž získáme $t \doteq 24{,}64523$. Profesorovi, který bude následujících 10 let ukládat vždy 10 000 a poté v důchodu vybírat $60\,000 + 1\,000t$ ročně, naspořené peníze vydrží na přibližně 14,5 let strávených v důchodu.
V druhé části příkladu postupujeme obdobně. Diferenciální rovnice je nyní ve tvaru

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} 0{,}03P + 10 & \text{pro } 0 < t \le 10, \\ 0{,}03P - 60 - 3{,}5\cos(t\frac{\pi}{2}) & \text{pro } 10 < t \le T. \end{cases}$$

V této části příkladu není v argumentu funkce kosinus uvažována doba $t-10$. Vzhledem k periodicitě funkce není příliš podstatné, zda začínáme $t=1$ či $t=11$. Profesor tedy začíná vybírat tak, že v prvním roce (tj. roce 11) vybere 60 tisíc, ve druhém 63,5, atd.

Řešení první části rovnice již známe, druhou část opět vyřešíme metodou integračního faktoru. Vynásobením celé rovnice výrazem $\mathrm{e}^{-0,03t}$ získáme

$$P'\mathrm{e}^{-0,03t} - 0,03P\mathrm{e}^{-0,03t} = -60\mathrm{e}^{-0,03t} - 3,5\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t},$$

což můžeme zapsat jako

$$(P\mathrm{e}^{-0,03t})' = -60\mathrm{e}^{-0,03t} - 3,5\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}. \tag{2.6}$$

Nyní integrujeme obě strany rovnice, přičemž integrál na pravé straně si rozepíšeme na rozdíl dvou integrálů, tj.

$$\begin{aligned}\int -60\mathrm{e}^{-0,03t} - 3,5\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\mathrm{d}t &= -60\int \mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t - 3,5\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{60}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} - 3,5\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nyní zbývající integrál vyřešíme metodou per-partes, tj.

$$\begin{aligned}\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t &\left|\begin{array}{ll} u=\cos(t\frac{\pi}{2}) & v'=\mathrm{e}^{-0,03t} \\ u'=-\frac{\pi}{2}\sin(t\frac{\pi}{2}) & v=-\frac{\mathrm{e}^{-0,03t}}{0,03}\end{array}\right| = \\ &= \frac{-\cos(t\frac{\pi}{2})}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} - \frac{\pi}{0,06}\int\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t \left|\begin{array}{ll} u=\sin(t\frac{\pi}{2}) & v'=\mathrm{e}^{-0,03t} \\ u'=\frac{\pi}{2}\cos(t\frac{\pi}{2}) & v=-\frac{\mathrm{e}^{-0,03t}}{0,03}\end{array}\right| = \\ &= -\frac{\cos(t\frac{\pi}{2})}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} - \frac{\pi}{0,06}\left[-\frac{\sin(t\frac{\pi}{2})}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} + \frac{\pi}{0,06}\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t\right] = \\ &= -\frac{\cos(t\frac{\pi}{2})}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} + \frac{\pi\sin(t\frac{\pi}{2})}{0,0018}\mathrm{e}^{-0,03t} - \frac{\pi^2}{0,06^2}\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Úpravou poté získáme

$$\left(1+\frac{\pi^2}{0,06^2}\right)\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(t\frac{\pi}{2})}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} + \frac{\pi\sin(t\frac{\pi}{2})}{0,0018}\mathrm{e}^{-0,03t},$$

z čehož plyne

$$\int\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-0,03t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{0,06^2}{0,06^2+\pi^2}\right)\left\{\frac{e^{-0,03t}}{0,03}\left[\frac{\pi\sin(t\frac{\pi}{2})}{0,06} - \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}.$$

Integrováním obou stran rovnice (2.6) obdržíme

$$P\mathrm{e}^{-0,03t} = \frac{60}{0,03}\mathrm{e}^{-0,03t} - 3,5\left(\frac{0,06^2}{0,06^2+\pi^2}\right)\left\{\frac{e^{-0,03t}}{0,03}\left[\frac{\pi\sin(t\frac{\pi}{2})}{0,06} - \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} + c,$$

z čehož úpravami dostaneme

$$P = 2000 - \left(\frac{7}{0,06^2+\pi^2}\right)\left[\pi\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) - 0,06\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right] + c\mathrm{e}^{0,03t}.$$

S využitím podmínky $P(10) = 791,549$ pak vyčíslíme integrační konstantu jako

$$c \doteq -895,2110057.$$

Nyní zbývá najít t, které řeší rovnici

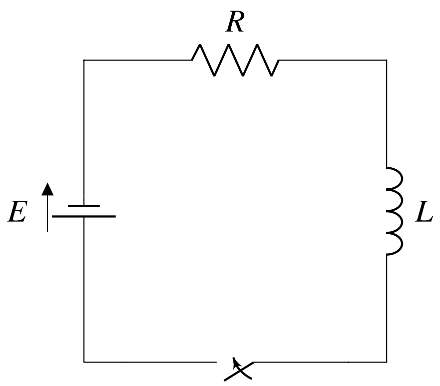
$$0 = 2000 - \left(\frac{7}{0,06^2+\pi^2}\right)\left[\pi \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) - 0,06\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right] - 895,211\,\mathrm{e}^{0,03t}.$$

Toto t najdeme opět s pomocí softwaru Maxima, získáme tedy $t = 26,83$. V tomto případě profesorovi důchod vystačí na necelých 17 let. Tento výsledek je v podstatě stejný jako výsledek, ke kterému jsme došli v Příkladu 1.12, což je dáno tím, že profesor vybírá jednou za 4 roky více, jednou méně a dva roky stejně jako v Příkladu 1.12. Výsledek ale není úplně stejný, což je způsobeno charakterem úročení. K jinému výsledku bychom došli i např. v případě, ve kterém by profesor začal výběrem 63,5 tisíc.

△

Příklad 2.7. Elektrický obvod

Baterie v elektrickém obvodu vyrábí v čase t měřeném v sekundách napětí $U = U(t)$ voltů (V) a proud $I = I(t)$ ampérů (A). Do obvodu zapojíme rezistor s odporem R ohmů (Ω) a cívku s indukčností L henry (H). Podle Ohmova zákona je úbytek napětí způsobený rezistorem roven RI a úbytek napětí způsobený zapojením cívky $L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$. Podle druhého Kirchhoffova zákona je součet těchto úbytků napětí roven napětí zdroje.



Jinými slovy tento zákon říká, že algebraický součet napětí je roven nule. Sestavte a vyřešte diferenciální rovnici tak, abyste našli proud procházející obvodem po jedné sekundě od zapojení pro hodnoty $R = 12\Omega$, $L = 4\mathrm{H}$ a $U(t) = 60\mathrm{V}$. Dále uvažujme stejný elektrický obvod, místo baterie však tentokrát použijeme generátor, který vyrábí střídavé napětí $U = U(t) = 60\sin(30t)$ voltů. Najděte výraz pro proud $I = I(t)$, kde t měříme v sekundách. Jaký proud procházel obvodem 10 sekund po zapojení?

Řešení. Se znalostí Kirchhoffova zákona můžeme hledanou diferenciální rovnici napsat ve tvaru

$$L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) + RI = U(t).$$

Tuto rovnici vyřešíme např. metodou variace konstant. Nejprve tedy vyřešme přidruženou homogenní rovnici

$$L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right) + RI = 0 \qquad \text{neboli} \qquad LI' = -RI.$$

Jedná se o autonomní rovnici, kterou vyřešíme separací proměnných a následným integrováním obou stran (podrobnější řešení ponecháme na čtenáři)

$$\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = \int -3\mathrm{d}t.$$

Řešení přidružené homogenní rovnice je tedy $I = c\mathrm{e}^{-3t},\ c \in \mathbb{R}$. Nyní konstantu c nahraď me neznámou funkcí $c(t)$, tj.

$$I = c(t)\mathrm{e}^{-3t},$$

a s využitím pravidel pro derivaci počítejme

$$I' = c'(t)\mathrm{e}^{-3t} - 3c(t)\mathrm{e}^{-3t}.$$

Tento výraz a obecné řešení přidružené homogenní rovnice nyní dosadíme do původního zadání, máme tedy

$$L\left[c'(t)\mathrm{e}^{-3t} - 3c(t)\mathrm{e}^{-3t}\right] + R[c(t)\mathrm{e}^{-3t}] = U.$$

Po dosazení konkrétních hodnot ze zadání můžeme psát

$$4\left[c'(t)\mathrm{e}^{-3t} - 3c(t)\mathrm{e}^{-3t}\right] + 12[c(t)\mathrm{e}^{-3t}] = 60.$$

Pro $c'(t)$ tedy platí

$$c'(t)\mathrm{e}^{-3t} = 15 \qquad \text{neboli} \qquad c'(t) = 15\mathrm{e}^{3t},$$

z čehož integrací získáme

$$c(t) = 5\mathrm{e}^{3t} + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Tento výsledek dosadíme do řešení přidružené homogenní rovnice. Výsledné řešení je ve tvaru

$$I = (5\mathrm{e}^{3t} + C)\mathrm{e}^{-3t} = 5 + C\mathrm{e}^{-3t}.$$

Integrační konstantu můžeme dopočítat za pomoci počáteční podmínky $I(0) = 0$, z čehož

$$0 = 5 + C, \qquad \text{a tedy} \qquad C = -5.$$

Zbývá najít proud, který obvodem prochází v $t = 1$. Jeho hodnotu získáme dosazením, tj.

$$I(1) = 5(1 - \mathrm{e}^{-3\cdot 1}) \doteq 4{,}75 \text{ A}.$$

Nyní vyřešíme situaci, ve které je v obvodu generátor střídavého napětí. Stejně jako v předchozí části příkladu sestavíme s pomocí Kirchhoffova zákona diferenciální rovnici, která bude nyní ve tvaru

$$4\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + 12I = 60\sin(30t) \qquad \text{neboli} \qquad I' + 3I = 15\sin(30t).$$

Jde o lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Vzhledem k tomu, že již máme řešení přidružené homogenní rovnice, vyřešíme tuto rovnici opět metodou variace konstant. Po dosazení řešení homogenní rovnice do zadání získáme rovnici

$$c'(t)\mathrm{e}^{-3t} - 3c(t)\mathrm{e}^{-3t} + 3c\mathrm{e}^{-3t} = 15\sin(30t),$$

ze které úpravou obdržíme diferenciální rovnici pro $c(t)$, tj.

$$c'(t) = 15\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}.$$

Integrováním obou stran rovnice máme

$$c(t) = 15\int \sin(30t)\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t,$$

přičemž integrál na pravé straně vyřešíme dvojnásobným použitím metody per-partes. Postup řešení tohoto integrálu je následující

$$\begin{aligned}
&\int \sin(30t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u = \sin(30t) & v' = \mathrm{e}^{3t} \\ u' = 30\cos(30t) & v = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} \end{matrix} \right| = \sin(30t)\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} - \int 30\cos(30t)\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{3}\sin(30t)\mathrm{e}^{3t} - 10\int \cos(30t)\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u = \cos(30t) & v' = \mathrm{e}^{3t} \\ u' = -30\sin(30t) & v = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{1}{3}\sin(30t)\mathrm{e}^{3t} - 10\left[\frac{1}{3}\cos(30t)\mathrm{e}^{3t} + \int 30\sin(30t)\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t\right] = \\
&= \frac{1}{3}\sin(30t)\mathrm{e}^{3t} - \frac{10}{3}\cos(30t)\mathrm{e}^{3t} - 100\int \sin(30t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Z tohoto výrazu získáme úpravami rovnost

$$\int \sin(30t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{3t}}{303}\big[\sin(30t) - 10\cos(30t)\big] + C.$$

Pro $c(t)$ tedy máme vztah

$$c(t) = \frac{5\mathrm{e}^{3t}}{101}\big[\sin(30t) - 10\cos(30t)\big] + C.$$

Po dosazení do řešení přidružené homogenní rovnice získáme pro proud I rovnost

$$I = \left\{ \frac{15e^{3t}}{303}\big[\sin(30t) - 10\cos(30t)\big] + C \right\}\mathrm{e}^{-3t},$$

kterou po úpravě můžeme psát jako

$$I = \frac{15}{303}\big[\sin(30t) - 10\cos(30t)\big] + C\mathrm{e}^{-3t}.$$

Integrační konstantu C získáme dosazením počáteční podmínky $I(0) = 0$ do tohoto řešení, tj.

$$0 = \frac{5}{101}\big[\sin(0) - 10\cos(0)\big] + C, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad C = \frac{50}{101}.$$

Hledaný výraz pro I je

$$I(t) = \frac{5}{101}\big[\sin(30t) - 10\cos(30t)\big] + \frac{50}{101}\mathrm{e}^{-3t}.$$

Proud procházející obvodem po deseti sekundách můžeme spočítat jako

$$I(10) = \frac{5}{101}\big[\sin(300) - 10\cos(300)\big] + \frac{50}{101}\mathrm{e}^{-30} \doteq -0{,}03855 \text{ A}.$$

$\triangle$

Příklad 2.8. Příprava na zimu
V olejové rafinérii je v nádrži 7 500 litrů benzínu, ve kterých je rozpuštěno 45 kg aditiva. Při přípravě na zimu do nádrže přidávají benzín, který obsahuje 0,25 kg aditiva na litr. Tento benzín je do nádrže napouštěn rychlostí 150 litrů za minutu, ven vytéká dokonale promíchaná směs rychlostí 170 litrů za minutu. Kolik aditiva je v nádrži po 20 minutách této procedury?

Řešení. Označme $y = y(t)$ množství aditiva v kilogramech v nádrži v čase t měřeném v minutách a $V = V(t)$ objem směsi v litrech v nádrži v čase t. Přítok i odtok směsi budeme udávat v litrech za minutu. Z Příkladu 1.35 již víme, že hledaná diferenciální rovnice bude ve tvaru

$$\text{změna množství aditiva} = (\text{přítok aditiva}) - (\text{odtok aditiva}).$$

Nejprve vypočítáme objem směsi v nádrži, tj.

$$V(t) = 7500 + (150 - 170)t \qquad \text{neboli} \qquad V(t) = 7500 - 20t.$$

Nyní vyjádřeme to, jak se aditivum dostává ven. Tento proces můžeme popsat výrazem

$$\frac{y(t)}{V(t)} \cdot 170 = \frac{17y(t)}{750 - 2t}.$$

Přítok aditiva je pak dán výrazem

$$150 \cdot 0{,}25 = 37{,}5,$$

neboť v každém litru benzínu je 0,25 kg aditiva. Z výše uvedených informací již můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 37{,}5 - \frac{17y}{750 - 2t}.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 1. řádu, kterou můžeme řešit např. metodou integračního faktoru. Nejprve převedeme členy obsahující y na levou stranu rovnice, tj.

$$y' + \frac{17y}{750 - 2t} = 37{,}5,$$

poté rovnici vynásobíme integračním faktorem

$$\mathrm{e}^{\int \frac{17}{750-2t}\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\frac{17}{2}\ln|375-t|} = |375 - t|^{-\frac{17}{2}}.$$

Při řešení této úlohy nás primárně zajímá čas $t = 20$, pro který je výraz $375 - t$ kladný. Úlohu tedy vyřešíme pro jednoduchost jen pro $t \in (-\infty, 375)$, po úpravě tedy můžeme psát

$$y'(375-t)^{-\frac{17}{2}} + \frac{17}{2}y(375-t)^{-\frac{19}{2}} = 37{,}5(375-t)^{-\frac{17}{2}}.$$

Na levé straně máme rozepsanou derivaci součinu, můžeme tedy psát

$$\left[y(375-t)^{-\frac{17}{2}}\right]' = 37{,}5(375-t)^{-\frac{17}{2}},$$

z čehož integrací (za pomoci substituce $u = 375 - t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) získáme

$$y(375-t)^{-\frac{17}{2}} = 5(375-t)^{-\frac{15}{2}} + c.$$

Hledané obecné řešení je tedy

$$y = 5(375-t) + c(375-t)^{\frac{17}{2}}.$$

Hodnotu integrační konstanty získáme dosazením počáteční podmínky $y(0) = 45$ do obecného řešení, čímž dostaneme

$$45 = 5(375) + c(375)^{\frac{17}{2}}, \qquad \text{a tedy} \qquad c \doteq -2{,}416 \cdot 10^{-19}.$$

Po dvaceti minutách procesu bude v nádobě

$$y(20) = 5(375-20) - 2{,}416 \cdot 10^{-19}(375-20)^{\frac{17}{2}} \doteq 626{,}746 \text{ kg aditiva.}$$

$\triangle$

Příklad 2.9. Nerloveův–Arrowův model II
Vezměme znovu v úvahu Příklad 1.16, ve kterém jsme zkoumali vliv reklamy na počet lidí, kteří znají propagovaný produkt. Uvažme nyní firmu, která chce propagovat svůj výrobek nejvíce v 1. měsíci a postupně výdaje za reklamu snižovat, a to tak, že pro intenzitu reklamy platí $q(t) = 100(13-t)$, kde t je čas v měsících. Za předpokladu, že $k = \frac{1}{4}$ a $b = 25$ určete, kolik lidí zná produkt na konci roku. Jak se tento počet liší od počtu, který jsme získali v Příkladu 1.16? Jaký jsou v tomto případě celkové náklady na reklamu? Dále upravme příklad tak, aby výdaje na reklamu byly rozloženy v průběhu celého roku tak, že celkový rozpočet je stejně jako v Příkladu 1.16, tj. 12 000 Kč.

Řešení. V Příkladu 1.16 jsme sestavili diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = bq(t) - kA(t),$$

kde $A = A(t)$ je počet lidí, kteří v čase t měřeném v měsících znají propagovaný produkt, $q = q(t)$ je intenzita reklamy, b je konstanta popisující intenzitu reklamy a k je konstanta popisující zapomínání. Tuto rovnici nyní opět využijeme. Za předpokladu, že q není konstantní, se jedná o lineární diferenciální rovnici, kterou vyřešíme např. metodou integračního faktoru. Rovnici si nejprve přepíšeme do tvaru

$$A' + kA = bq,$$

dále ji vynásobíme integračním faktorem, který je v tomto případě ve tvaru $\mathrm{e}^{\int k \mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{kt}$. Dosazením za $q(t)$ pak získáme

$$A'\mathrm{e}^{kt} + kA\mathrm{e}^{kt} = 100\,b(13-t)\mathrm{e}^{kt} \qquad \text{neboli} \qquad \left(A\mathrm{e}^{kt}\right)' = 100b(13-t)\mathrm{e}^{kt}.$$

Integrováním obou stran dostaneme

$$A\mathrm{e}^{kt} = 100\,b\int (13-t)\,\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t, \tag{2.7}$$

přičemž integrál na pravé straně vyřešíme metodou per–partes následujícím způsobem

$$\int (13-t)\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t = \int 13\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t - \int t\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u=t & v'=\mathrm{e}^{kt} \\ u'=1 & v=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt} \end{matrix} \right| =$$
$$= \frac{13}{k}\mathrm{e}^{kt} - \left(\frac{t}{k}\mathrm{e}^{kt} - \int 1\cdot\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{13-t}{k}\mathrm{e}^{kt} + \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kt} + c.$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (2.7) získáme rovnost

$$A\mathrm{e}^{kt} = 100\,b\left(\frac{13-t}{k}\mathrm{e}^{kt} + \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kt} + c\right),$$

ze které plyne

$$A = \frac{100\,b}{k}\left(13 - t + \frac{1}{k}\right) + c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Dosazením počáteční podmínky $A(0) = 0$ a konkrétních hodnot konstant b a k do tohoto obecného řešení získáme

$$0 = 10\,000(13+4) + c,$$

z čehož můžeme vyjádřit hodnotu integrační konstanty $c = -170\,000$. Nyní již můžeme spočítat počet lidí, kteří produkt znají po jednom roce, což je

$$A(12) = 10\,000(13-12+4) - 170\,000\mathrm{e}^{-\frac{12}{4}} \doteq 41\,536 \text{ lidí.}$$

Firma v tomto případě využila rozpočet

$$\sum_{t=1}^{12} 100(13-t) = 7\,800.$$

Po roce zná výrobek firmy v tomto případě větší počet lidí než v druhé části příkladu 1.16, přičemž s touto reklamní strategií využila firma méně prostředků. Nyní příklad změníme tak, aby výdaje za reklamu byly v průběhu celého roku rovny 12 000, čemuž odpovídá $q(t) = 100\frac{12000}{7800}(13-t) = \frac{2000}{13}(13-t)$. Podrobnější ověření toho, že při takovéto strategii budou celkové náklady 12 000, ponechme na čtenáři. Při řešení této části úlohy postupujeme obdobně jako v předchozí části. Výsledek diferenciální rovnice

$$A' + kA = \frac{2000}{13}b(13-t) \qquad \text{je} \qquad A(t) = \frac{2000b}{13k}\left(13 - t + \frac{1}{k}\right) + c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Integrační konstantu pak s využitím podmínky $A(0)=0$ vyjádříme jako $c \doteq -261538{,}46$. Počet lidí, kteří na konci roku znají produkt, je tedy

$$A(12)=\frac{2000\cdot 25\cdot 4}{13}(13-12+4)-261538{,}46\mathrm{e}^{-\frac{12}{4}} \doteq 63\,901.$$

Zvýšením rozpočtu o 4 200 Kč jsme sice dosáhli navýšení počtu lidí, kteří na konci roku znají výrobek, o více než 20 000, ovšem ani v tomto případě není tento počet větší než při rovnoměrném investování.

△

V následujícím příkladu si ukážeme další způsob, kterým lze popsat změnu koncentrace alkoholu v krvi. Tento příklad vychází z článku [38], ve kterém je odvozen a experimentálně otestován model, který budeme v úloze používat. Hodnoty konstant k_1 a k_2 jsou též přejaty z tohoto článku.

Příklad 2.10. Alkohol v krvi II
Označme $A=A(t)$ koncentraci alkoholu v krvi a $Z=Z(t)$ koncentraci alkoholu v žaludku, přičemž obě tyto koncentrace měříme v miligramech na litr v čase t měřeném v minutách. Koncentrace alkoholu v žaludku se zmenšuje úměrně této koncentraci, přičemž tuto konstantu úměrnosti označme k_1. Koncentrace alkoholu v krvi roste přímo úměrně koncentraci alkoholu v žaludku a zároveň klesá přímo úměrně koncentraci alkoholu v krvi (konstantu úměrnosti označme k_2). Předpokládejme dále, že $A(0)=0$. Jestliže pro dospělého muže o hmotnosti 75 kg, který vypije 15 mililitrů 95% alkoholu, je po deseti minutách koncentrace $A(10)=150$ a jsou známy hodnoty konstant $k_1=0{,}109456$ a $k_2=0{,}017727$, určete, za jak dlouho klesne hodnota A pod 50 mg/l a za jak dlouho klesne pod 10 mg/l. Vypočtěte také hodnotu počáteční koncentrace alkoholu v žaludku $Z(0)=Z_0$.

Řešení. Sestavme nejdřív diferenciální rovnici pro Z. Ze zadání víme, že koncentraci v čase $t+h$ můžeme vyjádřit jako $Z(t+h)=Z(t)-k_1Z(t)h$, z čehož úpravou získáme

$$\frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}=-k_1Z(t).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule pak dostaneme autonomní rovnici

$$Z'=-k_1Z,$$

kterou řešíme obdobně jako příklady v předchozí kapitole. Její obecné řešení můžeme zapsat jako $Z(t)=c\mathrm{e}^{-k_1t}$, $c\in\mathbb{R}$, přičemž hodnotu integrační konstanty získáme využitím podmínky $Z(0)=Z_0$. Máme tedy

$$Z(t)=Z_0\mathrm{e}^{-k_1t}.$$

Nyní sestavme rovnici pro A. Ze zadání můžeme pro $A(t+h)$ napsat vztah $A(t+h)=A(t)+k_1Z(t)h-k_2A(t)h$, ze kterého úpravou získáme

$$\frac{A(t+h)-A(t)}{h}=k_1Z(t)-k_2A(t).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme na levé straně derivaci $A'(t)$. Hledaná diferenciální rovnice je s dosazením za Z ve tvaru

$$A' = k_1 Z - k_2 A = k_1 Z_0 \mathrm{e}^{-k_1 t} - k_2 A.$$

Tuto lineární diferenciální rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru. Rovnici tedy upravíme a vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{\int k_2 \mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{k_2 t}$, tj.

$$A' \mathrm{e}^{k_2 t} + k_2 A \mathrm{e}^{k_2 t} = k_1 Z_0 \mathrm{e}^{-k_1 t} \mathrm{e}^{k_2 t} = k_1 Z_0 \mathrm{e}^{t(k_2 - k_1)}.$$

Na levé straně vidíme rozepsanou derivaci součinu, můžeme tedy psát

$$(A\mathrm{e}^{k_2 t})' = k_1 Z_0 \mathrm{e}^{t(k_2 - k_1)}.$$

Integrováním obou stran rovnice získáme

$$A\mathrm{e}^{k_2 t} = k_1 Z_0 \mathrm{e}^{t(k_2 - k_1)} \cdot \frac{1}{(k_2 - k_1)} + c,$$

z čehož úpravou dojdeme k obecnému řešení rovnice, kterým je

$$A = Z_0 \frac{k_1}{(k_2 - k_1)} \mathrm{e}^{-k_1 t} + c\mathrm{e}^{-k_2 t}.$$

S využitím podmínky $A(0) = 0$ určíme hodnotu integrační konstanty c jako

$$0 = Z_0 \frac{k_1}{(k_2 - k_1)} + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = -Z_0 \frac{k_1}{(k_2 - k_1)}.$$

Řešení je tedy ve tvaru

$$A = Z_0 \frac{k_1}{(k_2 - k_1)} (\mathrm{e}^{-k_1 t} - \mathrm{e}^{-k_2 t}).$$

Hodnotu Z_0 získáme s využitím znalosti k_1 a k_2 a podmínky $A(10) = 150$, tj.

$$150 = Z_0 \frac{0,109456}{0,017727 - 0,109456} (\mathrm{e}^{-0,109456 \cdot 10} - \mathrm{e}^{-0,017727 \cdot 10}),$$

z čehož plyne $Z_0 \doteq 249,98$. Nyní odpovězme na otázku, za jak dlouho klesne A pod 50 mg/l. Hledáme tedy t, pro které platí rovnost

$$50 = 249,98 \frac{0,109456}{0,017727 - 0,109456} (\mathrm{e}^{-0,109456 t} - \mathrm{e}^{-0,017727 t}).$$

Kořen této rovnice opět najdeme s pomocí softwaru Maxima, získáme tedy $t \doteq 100,7472$ minut. Nalezení času, za který klesne koncentrace alkoholu v krvi pod 10 mg/l, ponecháme na čtenáři.

$\triangle$

Ani tento model neodpovídá realitě dokonale, je však mnohem přesnější než model v Příkladu 1.19. V článku [38], ze kterého tento příklad vychází, byly experimentálně získané výsledky srovnány s výsledky předpovídanými tímto modelem. Shoda modelu s daty je téměř 94 %, z čehož můžeme soudit, že jde o dost přesný, přitom ale dostatečně jednoduchý model. Ani v tomto případě ovšem koncentrace alkoholu v krvi nikdy neklesne na nulovou hodnotu.

Příklad 2.11. Spoření IV.
Jan začal ve svých 25 letech spořit na důchod tak, že na účet se spojitým připisováním úroků s 2% úrokem ukládal $2000\sqrt{t}\mathrm{e}^{0{,}02t}$ korun ročně. Podobně jako Klára z Příkladu 1.13 si chce za 40 let spoření naspořit milion korun. Povede se mu to? Jestliže ne, jaká je výše konstantní částky, kterou musí každý rok přidat, aby měl v 65 letech na účtu milion? Jak se situace změní, jestliže Jan ve svých 30 letech zdědí 100 000, které se rozhodne ušetřit? Stačí mu nyní ukládat $2000\sqrt{t}\mathrm{e}^{0{,}02t}$ korun ročně, aby milion naspořil?

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 1.13 je diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP + 2\sqrt{t}\mathrm{e}^{0{,}02t},$$

kde $P = P(t)$ vyjadřuje množství peněz na účtu v tisících v čase t měřeném v letech. Konstanta k je opět rovna 0,02. Tuto rovnici můžeme opět řešit např. metodou integračního faktoru, úpravou a vynásobením výrazem $\mathrm{e}^{-\int 0{,}02\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-0{,}02t}$ dostaneme

$$P'\mathrm{e}^{-0{,}02t} - 0{,}02P\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 2\sqrt{t},$$

což můžeme zapsat jako

$$(P\mathrm{e}^{-0{,}02t})' = 2\sqrt{t}.$$

Integrováním obou stran této rovnice získáme

$$P\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c, \qquad \text{neboli} \qquad P(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{0{,}02t} + c\mathrm{e}^{0{,}02t}.$$

Jestliže $P(0) = 0$, pak hodnota integrační konstanty je $c = 0$. Za 40 let si tímto způsobem Jan naspoří

$$P(40) = \frac{4}{3}40^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{0{,}02\cdot 40} \doteq 750{,}696 \text{ tisíce korun.}$$

Jan chce ale naspořit milion korun, rozhodne se tedy ke svým $2\sqrt{t}\mathrm{e}^{0{,}02t}$ tisícům ročně přidat ještě částku d, jejíž výši nyní spočítáme. Rovnice je v tomto případě ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP + 2\sqrt{t}\mathrm{e}^{0{,}02t} + d,$$

její podrobnější řešení ponecháme na čtenáři. Obecné řešení této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$P(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{0{,}02t} - \frac{d}{0{,}02} + c\mathrm{e}^{0{,}02t}.$$

V případě, že $P(0) = 0$ je $c = \frac{d}{0,02}$, s využitím toho můžeme psát

$$P(t) = \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{0,02t} + \frac{d}{0,02}(\mathrm{e}^{0,02t} - 1).$$

Aby Jan za 40 let spoření našetřil milion, musí každoročně navíc uložit částku

$$d = 0,02 \frac{1000 - \frac{4}{3} 40^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{0,02\cdot 40}}{\mathrm{e}^{0,02\cdot 40} - 1} \doteq 4,068 \text{ tisíce korun.}$$

V druhé části úlohy předpokládáme, že Jan prvních 10 let spoří nám známým způsobem, a po 10 letech pak na účet uloží 100 000 navíc. Jan chce vědět, kolik takto naspoří. První část úlohy je tedy obdobná, po deseti letech bude mít Jan na účtu (jak ze spoření, tak z dědictví)

$$P(10) = \frac{4}{3} 10^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{0,02\cdot 10} + 100 \doteq 151,4989 \text{ tisíce korun.}$$

Z řešení rovnice v první části příkladu víme, že

$$P(t) = \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{0,02t} + c\mathrm{e}^{0,02t},$$

dosadíme–li do této rovnice hodnotu $P(10) = 151,4989$, můžeme vypočítat hodnotu konstanty c jako $c \doteq 81,8731$. (Fakt, že Jan po 10 letech uloží na účet 100 000, tedy matematicky odpovídá situaci, ve které by při začátku spoření uložil necelých 82 000.) Poté již s využitím znalosti c stačí spočítat, kolik Jan naspoří za 40 let spoření, tj.

$$P(40) = \frac{4}{3} 40^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{0,02\cdot 40} + 81,8731\, \mathrm{e}^{0,02\cdot 40} \doteq 932,908 \text{ tisíce korun.}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i s využitím znalosti diferenciální rovnice, která odpovídá spojitému úročení bez dalších vkladů (tj. $P' = kP$), kterou známe např. z Příkladu 1.12. Vklad 100 tisíc bychom pak nechali úročit 30 let, čímž bychom získali

$$P(30) = 100\mathrm{e}^{0,02\cdot 30} \doteq 182,2119 \text{ tisíce korun.}$$

Součet této částky a částky, kterou Jan získá svým spořením (750,696), je pak opět roven přibližně 933 tisíc korun. Ani s uspořením tohoto nečekaného příjmu tedy Jan bez dalších úspor milion za 40 let nenaspoří.

△

Příklad 2.12. Chladnutí dortu

Soňa peče dort na oslavu. Když ho vyndá z trouby, má dort teplotu 180 °C, přičemž v místnosti je 22 °C. Jelikož Soňa spěchá, otevře okna, aby teplotu v místnosti snížila a urychlila tak ochlazování dortu. Venku je 15 °C. Změnu teploty v místnosti i změnu teploty dortu můžeme popsat Newtonovým zákonem ochlazování. Jestliže se v místnosti teplota po 20 minutách sníží na 20 °C a dort má 10 minut po vyndání z trouby teplotu 150 °C, určete, za jak dlouho se teplota dortu sníží na 30 °C a bude možné dort ozdobit. Jaká je v tomto čase teplota v místnosti?

Řešení. Označme $T_p = T_p(t)$ pokojovou teplotu v čase t měřeném v minutách, T_v venkovní teplotu a $T_d = T_d(t)$ teplotu dortu. Nejprve sestavme diferenciální rovnici pro ochlazování místnosti, která bude ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T_p}{\mathrm{d}t} = -k(T_p - T_v).$$

Tuto rovnici jsme již viděli např. v Příkladu 1.21, ze kterého víme, že řešení můžeme napsat ve tvaru

$$T_p = T_v + c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Ověření tohoto ponechme na čtenáři. Dosazením podmínek $T_p(0) = 22$, $T_p(20) = 20$ a konstanty $T_v = 15$ získáme hodnoty c a k z rovnic

$$22 = 15 + c, \qquad \text{a tedy} \qquad c = 7,$$

$$20 = 15 + 7\mathrm{e}^{-k\cdot 20}, \qquad \text{a tedy} \qquad k = -\frac{\ln\frac{5}{7}}{20} \doteq 0{,}0168236.$$

Pokojovou teplotu tedy můžeme psát jako $T_p = 15 + 7\mathrm{e}^{-0{,}0168236t}$. Nyní určeme teplotu dortu v čase $t+h$, která je $T_d(t+h) = T_d(t) - m(T_d - T_p)h$, kde m je konstanta úměrnosti. Z této rovnice pak úpravou dojdeme k

$$\frac{T_d(t+h) - T_d(t)}{h} = -m(T_d - T_p).$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}T_d}{\mathrm{d}t} = -m(T_d - T_p).$$

V tomto případě není T_p konstantní, nemůžeme tedy postupovat jako v předchozí části úlohy. Výraz pro T_p tedy dosadíme do předchozí rovnice, tj.

$$\frac{\mathrm{d}T_d}{\mathrm{d}t} = -m[T_d - (15 + 7\mathrm{e}^{-0{,}0168236t})] = -mT_d + m(15 + 7\mathrm{e}^{-0{,}0168236t}),$$

což je lineární rovnice, kterou vyřešíme metodou integračního faktoru. Úpravou a vynásobením rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int m\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{mt}$ dostaneme

$$T_d'\mathrm{e}^{mt} + mT_d\mathrm{e}^{mt} = 15m\mathrm{e}^{mt} + 7m\mathrm{e}^{-0{,}0168236t}\mathrm{e}^{mt}.$$

Pro zpřehlednění výpočtu se vrátíme ke k. Na levé straně máme rozepsanou derivaci součinu, můžeme tedy psát

$$(T_d\mathrm{e}^{mt})' = 15m\mathrm{e}^{mt} + 7m\mathrm{e}^{mt-kt}.$$

Integrováním obou stran rovnice získáme

$$T_d\mathrm{e}^{mt} = \int \left(15m\mathrm{e}^{mt} + 7m\mathrm{e}^{mt-kt}\right)\mathrm{d}t = 15m\int \mathrm{e}^{mt}\mathrm{d}t + 7m\int \mathrm{e}^{t(m-k)}\mathrm{d}t,$$

z čehož plyne

$$T_d\mathrm{e}^{mt} = 15\mathrm{e}^{mt} + \frac{7m}{m-k}\mathrm{e}^{mt-kt} + c.$$

Úpravou pak dostaneme obecné řešení rovnice, které je ve tvaru

$$T_d = 15 + \frac{7m}{m-k}\mathrm{e}^{-kt} + c\mathrm{e}^{-mt}.$$

S využitím podmínky $T_d(0) = 180$ vyjádříme integrační konstantu c, tj.

$$180 = 15 + \frac{7m}{m-k} + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = 165 - \frac{7m}{m-k}.$$

Výraz pro T_d můžeme psát ve tvaru

$$T_d = 15 + \frac{7m}{m-k}\mathrm{e}^{-kt} + \left(165 - \frac{7m}{m-k}\right)\mathrm{e}^{-mt} = 15 + 165\mathrm{e}^{-mt} + \frac{7m}{m-k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-mt}).$$

Ze zadání víme, že teplota dortu v čase $t = 10$ je 150 °C. Využitím této podmínky můžeme např. za pomoci softwaru Maxima najít hodnotu konstanty $m \doteq 0,0209714$. Nyní již můžeme určit čas, ve kterém se teplota dortu sníží na 30 °C. Řešíme tedy rovnici

$$30 = 15 + 165\mathrm{e}^{-0,0209714\cdot t} + \frac{7\cdot 0,0209714}{0,0209714 - 0,0168236}(\mathrm{e}^{-0,0168236\cdot t} - \mathrm{e}^{-0,0209714\cdot t}).$$

S využitím softwaru Maxima získáme kořen této rovnice jako $t \doteq 120,554$. Soňa tedy může začít zdobit dort přibližně za dvě hodiny. Teplotu v místnosti po dvou hodinách dopočítáme dosazením tohoto času do rovnice pro T_p, tj.

$$T_p = 15 + 7\mathrm{e}^{-0,0168236\cdot 120,554} \doteq 15,92.$$

V pokoji je po dvou hodinách větrání necelých 16 °C. △

Příklad 2.13. Továrna
V továrně přijali nového pracovníka Jaroslava, který bude pracovat na výrobní lince ve dvanáctihodinových směnách. Jaroslav za první hodinu práce vyrobil 25 kusů zboží, za druhou hodinu pak 45 kusů. Pomocí diferenciální rovnice určete, jaká je jeho maximální produkce za hodinu, jestliže víte, že to, jak rychle se učí vyrábět výrobky, je přímo úměrné rozdílu mezi maximem M a tím, kolik jich v čase t vyrobí. V další části využijte hodnotu maxima, kterou jste našli, a změňte rovnici tak, že do ní vložíte faktor únavy, který je $u(t) = 0,25t^2$. Tato únava modeluje situaci, ve které pracovník, jenž je v práci déle, vyrábí méně než na začátku směny. V druhé části příkladu uvažujme $t = 1,\dots,12$. O kolik méně vyrobí pracovník v čase $t = 12$ než v čase $t = 6$? Kdy je jeho denní produkce maximální?

Řešení. Sestavme nejprve diferenciální rovnici bez únavy, která je obdobně jako v Příkladu 1.18 ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k(M-y),$$

kde $y = y(t)$ je počet výrobků vyrobených v čase t měřeném v hodinách. Z Příkladu 1.18 víme, že řešení této rovnice můžeme zapsat jako

$$y(t) = M - c\mathrm{e}^{-kt},$$

přičemž z podmínky $y(0)=0$ dostaneme $c=M$. Dosazením podmínek ze zadání získáme soustavu dvou rovnic

$$y(1)=25=M(1-\mathrm{e}^{-k}) \quad \text{a} \quad y(2)=45=M(1-\mathrm{e}^{-2k}).$$

Z této soustavy nejprve vyjádříme M, získáme tak rovnost

$$\frac{25}{1-\mathrm{e}^{-k}}=\frac{45}{1-\mathrm{e}^{-2k}},$$

ze které úpravou dostaneme rovnici

$$5\mathrm{e}^{-2k}-9\mathrm{e}^{-k}+4=0.$$

Substitucí $x=\mathrm{e}^{-k}$ můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$5x^2-9x+4=0.$$

Jejími řešeními jsou $x_1=\frac{4}{5}$ a $x_2=1$. Druhé řešení odpovídá situaci, kdy $e^{-k}=1$, tj. $k=0$. Toto řešení pro nás není zajímavé, neboť pro nulové k by byla produkce pracovníka stále stejná, a to $y=M-c$, což je za předpokladu $c=M$ rovno nule. Při dalším řešení úlohy se tedy zaměřme na $\mathrm{e}^{-k}=x_1=\frac{4}{5}$, ze kterého můžeme k vyjádřit jako $k=-\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{5}{4}\doteq 0,223$. Maximální produkce Jaroslava je poté

$$M=\frac{25}{1-\mathrm{e}^{\ln\frac{4}{5}}}=\frac{25}{0,2}=125 \text{ výrobků za hodinu.}$$

Toto $M=125$ nyní využijeme v druhé části úlohy. Diferenciální rovnice je nyní ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k(M-y)-0,25t^2=k(125-y)-0,25t^2.$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru. Úpravou a vynásobením celé rovnice výrazem $\mathrm{e}^{\int k\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{kt}$ získáme

$$y'\mathrm{e}^{kt}+ky\mathrm{e}^{kt}=125k\mathrm{e}^{kt}-0,25t^2\mathrm{e}^{kt},$$

což můžeme zapsat jako

$$(y\mathrm{e}^{kt})'=125k\mathrm{e}^{kt}-0,25t^2\mathrm{e}^{kt}.$$

Integrováním obou stran rovnice dostaneme

$$y\mathrm{e}^{kt}=125\mathrm{e}^{kt}-0,25\int t^2\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

a zbývající integrál vyřešíme metodou per-partes

$$\int t^2\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \left|\begin{matrix} u=t^2 & v'=\mathrm{e}^{kt} \\ u'=2t & v=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\end{matrix}\right| = \frac{t^2}{k}\mathrm{e}^{kt}-\frac{2}{k}\int t\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \left|\begin{matrix} u=t & v'=\mathrm{e}^{kt} \\ u'=1 & v=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\end{matrix}\right| =$$
$$=\frac{t^2}{k}\mathrm{e}^{kt}-\frac{2}{k}\left(\frac{t}{k}\mathrm{e}^{kt}-\frac{1}{k}\int\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t\right)=\frac{t^2}{k}\mathrm{e}^{kt}-\frac{2t}{k^2}\mathrm{e}^{kt}+\frac{2}{k^3}\mathrm{e}^{kt}+c.$$

Řešení rovnice (2.8) je tedy

$$y = 125 - \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{k} - \frac{2t}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) + c\mathrm{e}^{-kt} = 125 - \frac{t^2}{4k} + \frac{t}{2k^2} - \frac{1}{2k^3} + c\mathrm{e}^{-kt}.$$

S využitím podmínky $y(1) = 25$ ze zadání můžeme c vyjádřit jako

$$c = \left(-100 + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}\right)\mathrm{e}^{k}.$$

Nyní zbývá určit hodnotu konstanty k, k čemuž využijeme podmínku $y(2) = 45$, máme tedy rovnici

$$45 = \left(-100 + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}\right)\mathrm{e}^{-k} + 125 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^3},$$

ze které za pomoci softwaru Maxima získáme $k \doteq 0,22984$. Konstantu c můžeme vyčíslit jako $c \doteq -84,56011$. Řešení rovnice (2.8) můžeme se znalostí c a k zapsat ve tvaru

$$y = 125 - \frac{t^2}{4 \cdot 0,22984} + \frac{t}{2 \cdot 0,22984^2} - \frac{1}{2 \cdot 0,22984^3} - 84,56011\mathrm{e}^{-0,22984t}.$$

Tato funkce je pro ilustraci znázorněna na Obrázku 2.2.

Nyní již můžeme porovnat výrobu pracovníka v 6. a 12. hodině práce, spočteme tedy

$$y(6) \doteq 80,16 \qquad \text{a} \qquad y(12) \doteq 35,41.$$

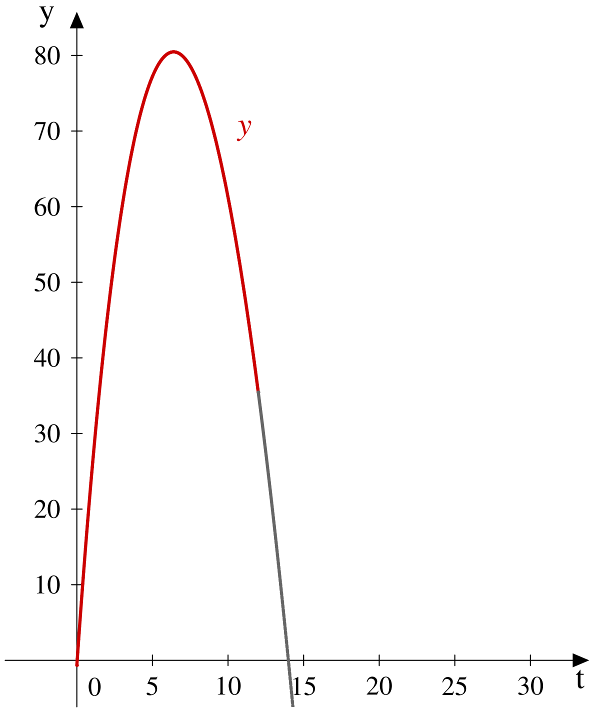
Maximální produkci můžeme najít jako nulový bod funkce y', řešíme tedy rovnici

$$0 = -\frac{t}{2 \cdot 0,22984} + \frac{1}{2 \cdot 0,22984^2} + 19,435296\mathrm{e}^{-0,22984t}.$$

Kořen této rovnice opět získáme s využitím softwaru Maxima, hledané $t \doteq 6,402$. Pomocí druhé derivace ověříme, že se skutečně jedná o maximum, neboť touto derivací získáme

$$-\frac{1}{2 \cdot 0,22984} + 19,435296\mathrm{e}^{-0,22984t} \cdot (-0,22984) < 0.$$

Jedná se tedy o maximum. Jaroslav vyrobí nejvíc kusů přibližně po 6,4 hodiny práce. V tento čas vyrobí přibližně $y(6,402) \doteq 80,42$ kusu. △



Obrázek 2.2: Výroba pracovníka Jaroslava v továrně

Příklad 2.14. Učení na zkoušku II
Jana si při přípravě na zkoušku spočítala, že míra toho, jak se učí nový materiál, nezávisí pouze na rozdílu mezi maximem toho, co se má naučit M a množstvím toho, co už v čase t umí $A = A(t)$, ale i na zapomínání $z = z(t)$, které můžeme popsat rovnicí $z(t) = 0,5t + \cos t$. Jana v čase $t = 0$ umí pouze $0,1M$ a na konci prvního dne studia umí $0,21M$. Kolik dní učení potřebuje k tomu, aby se naučila alespoň 60 % látky a měla tak šanci udělat zkoušku? Kdy bude umět nejvíce látky?

Řešení. Pro jednoduchost si položme $M = 100$. Ze zadání pak můžeme sestavit rovnici změny $A(t+h) = A(t) + k(100-A)h - 0,5th - h\cos t$, ze které úpravami dostaneme

$$\frac{A(t+h)-A(t)}{h} = k(100-A) - 0,5t - \cos t.$$

Limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme na levé straně derivaci, hledaná diferenciální rovnice je tedy ve tvaru

$$A' = k(100-A) - 0,5t - \cos t.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, kterou vyřešíme např. metodou variace konstant, neboť z Příkladu 1.18 již známe řešení přidružené homogenní rovnice

$$A' = k(M-A),$$

které je ve tvaru

$$A = M - c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Jestliže $M = 100$, můžeme řešení přidružené homogenní rovnice zapsat ve tvaru

$$A(t) = 100 - c\mathrm{e}^{-kt}.$$

Nyní místo integrační konstanty uvažujme neznámou funkci $c(t)$, tj. $A = 100 - c(t)\mathrm{e}^{-kt}$. S využitím pravidel pro derivování spočítáme

$$A' = -c'(t)\mathrm{e}^{-kt} + k\,c(t)\mathrm{e}^{-kt}.$$

Dosazením tohoto výrazu a řešení přidružené homogenní rovnice do původního zadání dostaneme rovnici

$$-c'(t)\mathrm{e}^{-kt} + kc(t)\mathrm{e}^{-kt} = k[100 - 100 + c(t)\mathrm{e}^{-kt}] - 0{,}5t - \cos t,$$

ze které plyne

$$c'(t)\mathrm{e}^{-kt} = 0{,}5t + \cos t.$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými pro $c(t)$, kterou vyřešíme úpravou a integrováním obou stran, tj.

$$\int c'(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(0{,}5t\,\mathrm{e}^{kt} + \cos t\,\mathrm{e}^{kt}\right)\mathrm{d}t = 0{,}5\int t\,\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t + \int \cos t\,\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

Integrály na pravé straně vyřešíme postupně metodou per-partes, tj.

$$0{,}5\int t\,\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u = t & v' = \mathrm{e}^{kt} \\ u' = 1 & v = \frac{\mathrm{e}^{kt}}{k} \end{matrix} \right| = 0{,}5\left(\frac{t}{k}\mathrm{e}^{kt} - \frac{1}{k}\int \mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t\right) = \frac{t}{2k}\mathrm{e}^{kt} - \frac{1}{2k^2}\mathrm{e}^{kt} + c.$$

Druhý z integrálů jsme již spočítali v Příkladu 2.5, jeho řešení je

$$\int \cos t\,\mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{kt}\frac{k\cos t + \sin t}{k^2+1}.$$

S využitím těchto informací můžeme zapsat řešení rovnice (2.9) ve tvaru

$$c(t) = \frac{t}{2k}\mathrm{e}^{kt} - \frac{1}{2k^2}\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{kt}\frac{k\cos t + \sin t}{k^2+1} + c.$$

Dosazením $c(t)$ do řešení přidružené homogenní rovnice dostaneme

$$A = 100 - \frac{t}{2k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{k\cos t + \sin t}{k^2+1} + c\mathrm{e}^{-kt},$$

což je hledané řešení rovnice nehomogenní. S využitím toho, že Jana v čase $t = 0$ umí $A(0) = 10$, můžeme vypočítat integrační konstantu jako

$$10 = 100 + \frac{1}{2k^2} - \frac{k}{k^2+1} + c, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c = -90 - \frac{1}{2k^2} + \frac{k}{k^2+1}.$$

Konstantu k vypočítáme za pomoci softwaru Maxima s využitím podmínky $A(1) = 21$ z následující rovnice

$$21 = 100 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{k\cos 1 + \sin 1}{k^2+1} + \left(-90 - \frac{1}{2k^2} + \frac{k}{k^2+1}\right)\mathrm{e}^{-k},$$

získáme tedy $k \doteq 0,14332$. Jana bude 60 % látky umět za t, které řeší rovnici

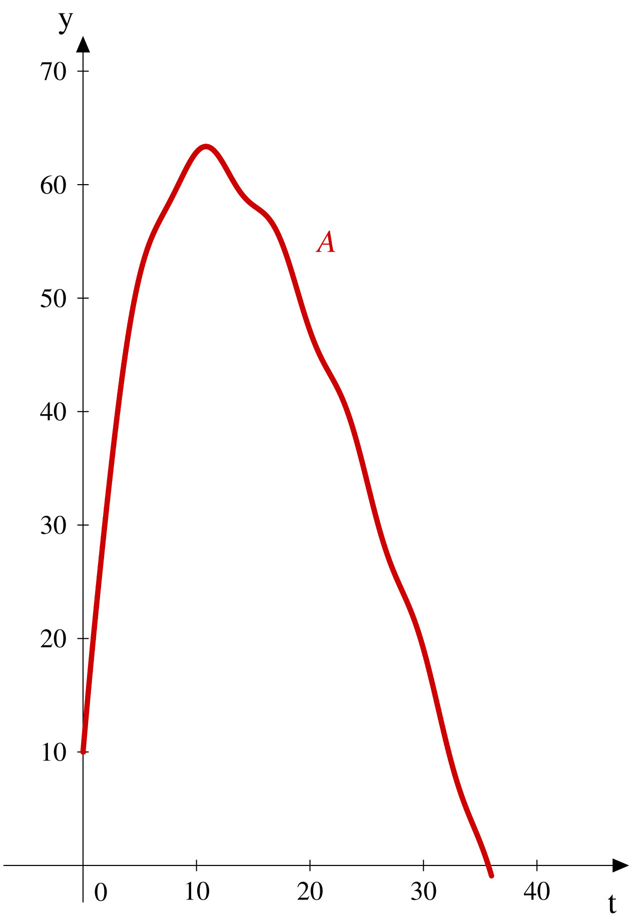
$$60 = 100 - \frac{t}{2k} + \frac{1}{2k^2} - \frac{k\cos t + \sin t}{k^2+1} + \left(-90 - \frac{1}{2k^2} + \frac{k}{k^2+1}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny a to $t_1 \doteq 8,39539$ a $t_2 \doteq 13,4238$, což znamená, že Jana je na zkoušku připravená po přibližně 8,4 dne studia. Na stejnou úroveň se dostane i po přibližně 13,4, neboť s rostoucím časem roste i hodnota zapomínání $z(t)$. Křivka učení Jany je pro ilustraci znázorněna na Obrázku 2.3. Maximum toho, co se Jana dokáže naučit, získáme nalezením nulového bodu funkce A'. Řešíme tedy rovnici

$$0 = -\frac{1}{2k} + \frac{k\sin t_m - \cos t_m}{k^2+1} - k\cdot\left(-90 - \frac{1}{2k^2} + \frac{k}{k^2+1}\right)\mathrm{e}^{-kt_m},$$

které pro $k = 0,14332$ vyhovuje $t_m \doteq 10,8305$. Toto t_m jsme opět získali za pomoci softwaru Maxima. Ověření toho, že jde opravdu o maximum, ponecháme na čtenáři. V tomto čase umí Jana vzhledem ke svému zapomínání pouze $A(10,8305) \doteq 63,36$ % látky.

$\triangle$



Obrázek 2.3: Křivka učení Jany

Kapitola 3

Bernoulliho rovnice

Definice 3.1. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x)y + g(x)y^n, \quad \text{kde} \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

nazýváme *Bernoulliho diferenciální rovnice.*

Pro $n = 0$ se jedná o rovnici lineární, pro $n = 1$ jde o rovnici se separovanými proměnnými.

Poznámka 3.2 (**Řešení Bernoulliho rovnice**). Pro $n > 0$ je vždy triviálním řešením rovnice $y \equiv 0$, které nelze zahrnout do obecného řešení. Řešení $y \not\equiv 0$ Bernoulliho rovnice nalezneme tak, že ji vydělíme y^n, čímž získáme

$$y'y^{-n} = f(x)y^{1-n} + g(x).$$

Poté zavedeme substituci $z = y^{1-n}$ a obdržíme tak lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$z' = (1-n)[f(x)z + g(x)],$$

kterou řešíme jedním z postupů uvedených dříve. Postup řešení Bernoulliho rovnice si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.1. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 4y + x\sqrt{y}.$$

Řešení. Triviálním řešením této rovnice je $y = 0$. Rovnici nejprve vydělíme $\sqrt{y}$, tj.

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 4\sqrt{y} + x.$$

Nyní zavedeme substituci $z = \sqrt{y}$, pro jejíž derivaci platí $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$. Dosazením z do rovnice tedy obdržíme

$$2z' = 4z + x, \qquad \text{což upravíme do tvaru} \qquad z' - 2z = \frac{x}{2}.$$

Tuto lineární diferenciální rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru. Nejprve tedy rovnici vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x}$, čímž získáme

$$z'\mathrm{e}^{-2x} - 2z\mathrm{e}^{-2x} = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x},$$

z čehož úpravou dostaneme

$$z\mathrm{e}^{-2x} = \int \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x} + c.$$

Tento integrál jsme vyřešili metodou per-partes. Obecné řešení diferenciální rovnice pro proměnnou z je ve tvaru

$$z = -\frac{x}{4} - \frac{1}{8} + c\mathrm{e}^{2x}.$$

Po dosazení původní proměnné y získáme hledané řešení

$$y = \left(c\mathrm{e}^{2x} - \frac{2x+1}{8}\right)^2 \quad \text{a} \quad y \equiv 0.$$

△

Bernoulliho rovnice ve tvaru

$$y' = Ay - By^2$$

se nazývá *logistická* (někdy též *Verhulstova*) rovnice. Tato rovnice se využívá např. při popisu růstu populace, což si ukážeme na Příkladu 3.5. Při popisu populačního růstu je rovnice typicky ve tvaru

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad \text{nebo také} \quad y' = ry(K - y), \tag{3.1}$$

kde r značí růstovou konstantu a K nosnou kapacitu prostředí. S touto rovnicí se můžeme setkat také při modelování šíření nemoci v uzavřené populaci. Tento problém bude předmětem následujícího příkladu.

Zdroje příkladů v této kapitole jsou [5], [6] a [22]. Příklad 3.5 vychází z [42]. Zdroje použitých dat je možné najít v [72].

Příklad 3.2. Chřipka

Šest lidí z 1000 pasažérů a posádky výletní lodi má chřipku. Po jednom dni plavby se počet nemocných zdvojnásobí. Předpokládejme, že rychlost šíření chřipky je přímo úměrná součinu počtu nakažených a zdravých lidí na palubě. Kolik lidí bude trpět chřipkou na konci sedmidenní plavby?

Řešení. Označme $y = y(t)$ počet nemocných v čase t měřeném ve dnech, počet zdravých pak můžeme zapsat jako $Z = Z(t) = 1000 - y(t)$. Ze zadání víme, že rychlost šíření chřipky je přímo úměrná součinu $y(t)$ a $Z(t)$, a můžeme tedy psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(1000 - y) = 1000ky - ky^2,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Jedná se o Bernoulliho rovnici s $n = 2$, jejíž konstantní řešení jsou $y_1 = 0$ a $y_2 = 1000$. Tuto rovnici vydělíme výrazem y^2 a upravíme ji na

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1000k}{y} = -k.$$

Dále rovnici řešíme substitucí $z = \frac{1}{y}$. Pro toto z platí $z' = -\frac{1}{y^2}y'$, diferenciální rovnice pro z je tedy tvaru

$$-z' - 1000kz = -k \quad \text{neboli} \quad z' + 1000kz = k.$$

Jedná se o autonomní diferenciální rovnici, kterou vyřešíme např. metodou integračního faktoru. Jde o postup, který byl již popsán výše, uvedeme ho tedy pouze ve stručnosti. Nejprve rovnici vynásobíme integračním faktorem a poté integrujeme obě strany rovnice, čímž získáme

$$z'\mathrm{e}^{1000kt} + 1000kz\mathrm{e}^{1000kt} = k\mathrm{e}^{1000kt},$$

$$z\mathrm{e}^{1000kt} = \int k\mathrm{e}^{1000kt}\mathrm{d}t = \frac{k\mathrm{e}^{1000kt}}{1000k} + c.$$

Obecné řešení pro proměnnou z pak můžeme psát jako

$$z = \frac{\mathrm{e}^{1000kt} + 1000c}{1000\mathrm{e}^{1000kt}},$$

pro původní proměnnou y tedy platí

$$y = \frac{1000\mathrm{e}^{1000kt}}{\mathrm{e}^{1000kt} + c_2}.$$

Do tohoto obecného řešení dosadíme počáteční podmínky $y(0) = 6$ a $y(1) = 12$, z čehož získáme hodnoty konstant $c_2 (= 1000c)$ a k, tj.

$$6 = \frac{1000}{1 + c_2}, \quad \text{a tedy (po zkrácení)} \quad c_2 = \frac{497}{3},$$

$$12 = \frac{1000\mathrm{e}^{1000k}}{\mathrm{e}^{1000k} + \frac{497}{3}}, \quad \text{a tedy} \quad k \doteq 0{,}0006992.$$

Na konci sedmidenní plavby bude chřipkou trpět

$$y(7) = \frac{1000\mathrm{e}^{1000\cdot 0{,}0006992\cdot 7}}{\mathrm{e}^{1000\cdot 0{,}0006992\cdot 7} + \frac{497}{3}} \doteq 446 \text{ lidí.}$$

△

Příklad 3.3. Drb

Městem, ve kterém žije 5 000 obyvatel, se šíří drb. Rychlost šíření drbu je přímo úměrná součinu odmocniny z počtu lidí, kteří drb již slyšeli, a rozdílu celkového počtu lidí a odmocniny z počtu lidí, kteří drb již slyšeli, a nepřímo úměrná času. Jestliže drb v čase $t = 1$ slyšelo 100 lidí a v čase $t = 2$ ho zná 350 lidí, určete, za jak dlouho ho bude znát 75 % obyvatel.

Řešení. Označme N počet obyvatel, kteří žijí ve městě, $P = P(t)$ počet lidí, kteří v čase t měřeném ve dnech znají drb. Ze zadání můžeme sestavit rovnici pro počet lidí, kteří v čase $t+h$ znají drb, $P(t+h) = P(t) + \frac{k\sqrt{P}}{t}(N-\sqrt{P})h$, ze které úpravou a limitním přechodem pro h jdoucí k nule získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{k\sqrt{P}}{t}(N-\sqrt{P}) = \frac{kN\sqrt{P}}{t} - \frac{kP}{t},$$

kde $k > 0$. Triviálními řešeními této rovnice jsou $P_1 \equiv 0$ a $P_2 = N^2 = 5000^2$. Tuto rovnici budeme řešit obdobně jako v předchozím příkladě převedením na

$$\frac{P'}{\sqrt{P}} + \frac{k\sqrt{P}}{t} = \frac{kN}{t},$$

a následnou substitucí $z = \sqrt{P}$, pro jejíž derivaci platí $z' = \frac{1}{2\sqrt{P}}P'$. Touto substitucí získáme lineární diferenciální rovnici

$$2z' + \frac{kz}{t} = \frac{kN}{t} \qquad \text{neboli} \qquad z' + \frac{kz}{2t} = \frac{kN}{2t}.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru. Celou rovnici tedy nejprve vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{\int \frac{k}{2t}\mathrm{d}t} = t^{\frac{k}{2}}$, čímž získáme

$$z't^{\frac{k}{2}} + \frac{kz}{2t}t^{\frac{k}{2}} = \frac{kN}{2t}t^{\frac{k}{2}}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \left(zt^{\frac{k}{2}}\right)' = \frac{kN}{2}t^{\frac{k}{2}-1}.$$

Integrováním obou stran rovnice dostaneme

$$zt^{\frac{k}{2}} = Nt^{\frac{k}{2}} + c,$$

a obecné řešení je tedy ve tvaru

$$z = N + ct^{-\frac{k}{2}}.$$

Pro původní proměnnou P máme vztah

$$P(t) = (N + ct^{-\frac{k}{2}})^2.$$

Dosazením počátečních podmínek do tohoto vztahu vypočteme konstanty c a k, tj.

$$100 = (5000 + c)^2, \qquad \text{a tedy} \qquad c_1 = -4990,\ c_2 = -5010.$$

Pro c_1 pak dopočítáme hodnotu k z rovnice

$$350 = (5000 - 4990 \cdot 2^{-\frac{k}{2}})^2,$$

ze které úpravou obdržíme $k_1 \doteq 5{,}0398 \cdot 10^{-3}$ a $k_2 \doteq -1{,}6553 \cdot 10^{-2}$. Pro c_2 pak obdobně získáme dvojici řešení $k_3 \doteq -5{,}011 \cdot 10^{-3}$ a $k_4 \doteq 1{,}6581 \cdot 10^{-2}$. Řešení k_2 a k_3 nevyhovují zadání, neboť $k > 0$. Rovnice

$$\left(5000 - 5010t^{-\frac{1{,}6581 \cdot 10^{-2}}{2}}\right)^2 = 0$$

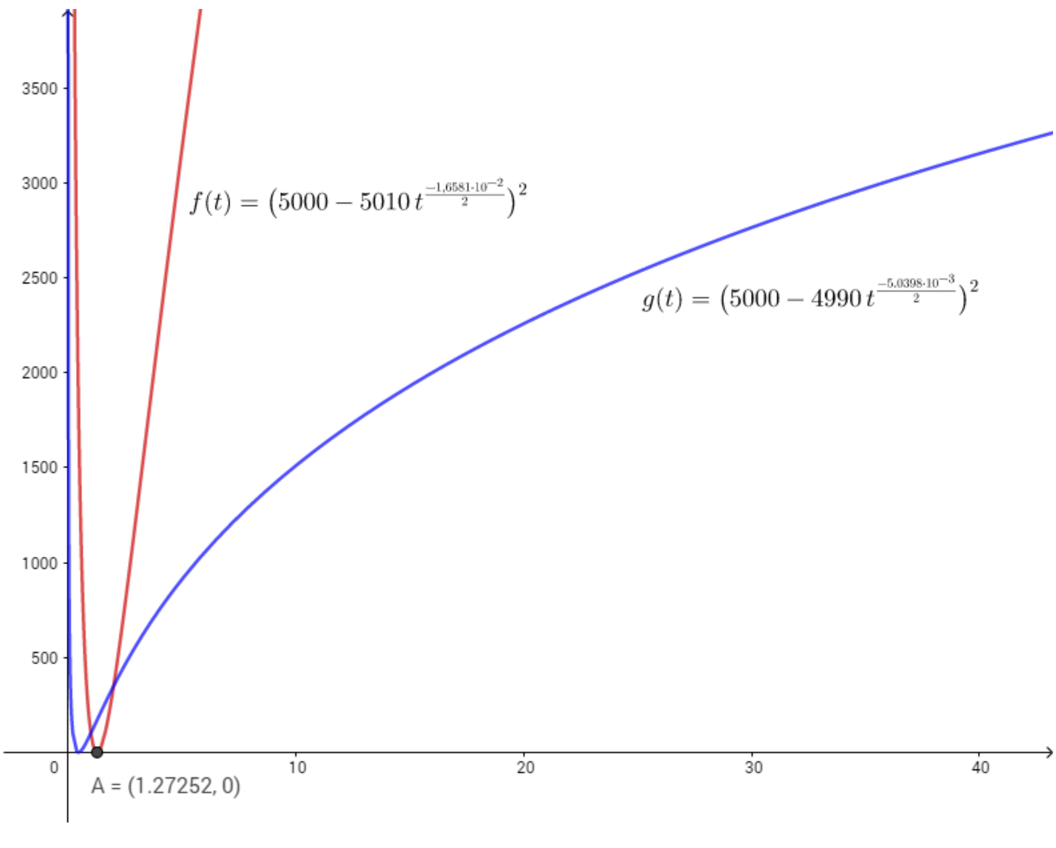
má kořen $1{,}27252$. Toto řešení tedy také nevyhovuje zadání, neboť jestliže drb v čase přibližně $1{,}27$ nezná nikdo, nikdo další se ho již nemůže dozvědět. Hodnoty konstant, které odpovídají zadání, jsou tedy c_1 a k_1. Tyto hodnoty bychom získali i v případě, kdybychom postupovali přes substituovanou proměnnou z, tento postup tedy využijeme i v následujících příkladech. Zbývá už jen určit čas t_0, ve kterém bude drb znát 75 % obyvatel. Ten najdeme vyřešením rovnice

$$3750 = \left(5000 - 4990 t_0^{-\frac{5{,}0398\cdot 10^{-3}}{2}}\right)^2.$$

Podrobnější řešení této rovnice ponecháme na čtenáři, ovšem výsledkem je, že 75 % obyvatel bude drb znát po přibližně 60 dnech. Funkce

$$f(t) = \left(5000 - 5010 t^{\frac{-1{,}6581\cdot 10^{-2}}{2}}\right)^2 \quad \text{a} \quad g(t) = \left(5000 - 4990 t^{\frac{-5.0398\cdot 10^{-3}}{2}}\right)^2$$

jsou pro ilustraci zobrazeny na Obrázku 3.1. △



Obrázek 3.1: Šíření drbu

Příklad 3.4. Prodej

Nový model tabletu byl právě uveden na trh. Saturace (nasycení) trhu je předpokládána na 3 miliony tabletů. Označme $S = S(t)$ počet milionů kusů prodaných v čase t měřeném v měsících. Počet prodaných tabletů se mění úměrně počtu jak již prodaných tabletů, tak rozdílu $3-\sqrt{S}$. Jestliže víte, že konstanta úměrnosti je rovna $\frac{1}{6}$ a že v den, kdy byl produkt uveden na trh, se prodalo 1 000 kusů, najděte diferenciální rovnici popisující vývoj prodeje a zjistěte, kdy se prodají dva miliony tohoto nového tabletu.

Řešení. Ze zadání můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{6}S(3-\sqrt{S})=\frac{1}{2}S-\frac{1}{6}S^{\frac{3}{2}},$$

neboť hodnotu konstanty úměrnosti známe ze zadání. Konstantní řešení této rovnice jsou $S_1=0$ a $S_2=9$. Tuto rovnici vyřešíme podobně jako rovnice v předchozích příkladech, a to vydělením nejvyšší mocninou S a následnou substitucí $z(t)=\frac{1}{\sqrt{S}}$, tj.

$$\frac{S'}{S^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{S}}=-\frac{1}{6},$$

$$-2z'-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{6}\qquad\text{neboli}\qquad z'+\frac{1}{4}z=\frac{1}{12},$$

což je autonomní rovnice. Její podrobnější řešení ponechme na čtenáři. Obecným řešením diferenciální rovnice pro z je

$$z=\frac{1}{3}+c\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t},$$

pro $S(t)$ tedy platí

$$S(t)=\frac{9\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}}{(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}+3c)^2}.$$

Pro jednoduchost můžeme hodnotu integrační konstanty zjistit s využitím rovnosti pro z, se znalostí podmínky $S(0)=0{,}001$, tedy sestavíme rovnici

$$\frac{1}{\sqrt{0{,}001}}=\frac{1}{3}+c,$$

ze které plyne $c\doteq 31{,}28944$. Dva miliony tohoto nového tabletu se tedy prodají za čas t_0, který vyhovuje rovnici

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}+31{,}28944\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t_0},\qquad\text{což je}\qquad t_0\doteq 17{,}7095\text{ měsíce}.$$

Tento čas jsme pro jednoduchost vypočítali s využitím vztahu pro z, pro původní proměnnou S bychom se dostali ke stejnému výsledku, tento postup by však trval déle. Ověření tohoto ponecháme na čtenáři.

△

Příklad 3.5. Logistický růst populace
Předpokládejme, že vývoj japonské populace můžeme popsat logistickou rovnicí (3.1), přičemž náš odhad nosné kapacity v tisících je 130 000. Vypočtěte počet obyvatel Japonska v roce 2010, jestliže víte, že počet obyvatel v tisících v roce 1960 byl 94 092 a k roku 1970 vzrostl na 104 345.

V druhé části příkladu zkuste za pomoci logistického modelu zjistit počet obyvatel České republiky (v jednotkách) v roce 2017, víte–li, že v roce 1960 byl počet 9 659 818 a v roce 1970 vzrostl na 9 805 157. Uvažujte přitom nosnou kapacitu 11 300 000.

Řešení. Podle (3.1) lze logistickou rovnici zapsat ve tvaru

$$y' = ry - \frac{ry^2}{K},$$

kde $y = y(t)$ je velikost populace v tisících v čase t měřeném v letech, r je růstová konstanta a K je nosná kapacita prostředí. Triviálním řešením této rovnice je $y_1 \equiv 0$ a $y_2 = K$. Tuto rovnici vyřešíme jako Bernoulliho rovnici vydělením nejvyšší mocninou y, úpravou a následnou substitucí $z(t) = \frac{1}{y}$, postupně tedy dostaneme

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{r}{y} = -\frac{r}{K},$$

po zavedení substituce máme

$$-z' - rz = -\frac{r}{K}.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, kterou získáme řešení

$$z = \frac{1}{K} + c\mathrm{e}^{-rt}.$$

Ponechme pro zjednodušení rovnici v tomto tvaru, hodnoty integračních konstant můžeme spočítat s využitím podmínek $y(0) = 94\,092$ a $y(10) = 104\,345$, tj.

$$\frac{1}{94092} = \frac{1}{130000} + c\mathrm{e}^{-r\cdot 0}, \quad \text{a tedy} \quad c = \frac{1}{94092} - \frac{1}{130000} \doteq 2{,}9356 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{1}{104345} = \frac{1}{130000} + 2{,}9356 \cdot 10^{-6}\mathrm{e}^{-r\cdot 10}, \quad \text{a tedy} \quad r \doteq 0{,}04397.$$

Řešení pro původní proměnnou můžeme zapsat ve tvaru

$$y(t) = \frac{K}{1 + Kc\mathrm{e}^{-rt}} = \frac{130000}{1 + 130000 \cdot 2{,}9356 \cdot 10^{-6}\mathrm{e}^{-0{,}04397t}}.$$

Předpověď velikosti japonské populace v roce 2010 je tedy

$$y(50) = \frac{130000}{1 + 130000 \cdot 2{,}9356 \cdot 10^{-6}\mathrm{e}^{-0{,}04397\cdot 50}} \doteq 124\,718 \text{ tisíc obyvatel.}$$

Pro srovnání uvádíme reálná data. V roce 2010 bylo v Japonsku přibližně 128 milionů obyvatel. Procentuální rozdíl mezi realitou a předpovědí modelu tedy není nijak závratný.

Výsledek logistické diferenciální rovnice využijeme i pro modelování české populace. Z řešení

$$y(t) = \frac{K}{1 + Kc\mathrm{e}^{-rt}}$$

vyjádříme s využitím podmínek $y(0) = 9659818$ a $y(10) = 9805157$ konstanty c a r jako

$$c \doteq 1{,}5026 \cdot 10^{-8} \qquad \text{a} \qquad r \doteq 0{,}01077.$$

Počet obyvatel České republiky v roce 2017 předpovězený modelem je tedy

$$y(57) = \frac{11300000}{1 + 11300000 \cdot 1{,}5026 \cdot 10^{-8} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01077 \cdot 57}} \doteq 10\,348\,938.$$

Ani v tomto případě není tento jednoduchý model daleko od skutečného počtu, počet obyvatel ke konci roku 2017 byl totiž 10 610 055.

△

Příklad 3.6. Šíření inovací
Rychlost šíření inovací mezi firmami je přímo úměrná součinu počtu firem, které inovaci již používají (označme y), a rozdílu $N - y^{\frac{3}{4}}$, kde N je celkový počet firem v odvětví. Jestliže v čase $t = 0$ používá inovaci jediná firma a v čase $t = 3$ firmy tři, určete, kdy bude inovaci využívat více než polovina firem v odvětví, ve kterém jich je 2 000.

Řešení. Označme $y = y(t)$ počet firem s inovací v čase t měřeném v měsících. Ze zadání víme, že rychlost šíření inovací je úměrná součinu $y(t)$ a $N - y^{\frac{3}{4}}$, a můžeme tedy psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(N - y^{\frac{3}{4}}) = Nky - ky^{\frac{7}{4}}.$$

Jedná se o Bernoulliho rovnici s $n = \frac{7}{4}$, jejíž konstantní řešení jsou $y_1 = 0$ a $y_2 = 2000^{\frac{4}{3}}$. Rovnici tedy nejprve vydělíme výrazem $y^{\frac{7}{4}}$ a poté ji dále upravíme na

$$\frac{y'}{y^{\frac{7}{4}}} - \frac{Nk}{y^{\frac{3}{4}}} = -k.$$

Tuto rovnici řešíme zavedením substituce $z = y^{-\frac{3}{4}}$. Pro toto z platí $z' = -\frac{3}{4} y^{-\frac{7}{4}} y'$ a diferenciální rovnice je ve tvaru

$$-\frac{4}{3} z' - Nkz = -k \qquad \text{neboli} \qquad z' + \frac{3}{4} Nkz = \frac{3}{4} k.$$

Jedná se o autonomní rovnici, kterou řešíme např. metodou integračního faktoru. Jde o postup, který byl již popsán výše, uvedeme ho tedy pouze ve stručnosti. Pro usnadnění zaveďme novou konstantu $m := \frac{3}{4} N = 1500$. Potom

$$z' \mathrm{e}^{mkt} + mkz\mathrm{e}^{mkt} = \frac{3}{4} k\mathrm{e}^{mkt},$$

$$z\mathrm{e}^{mkt} = \int k\mathrm{e}^{mkt} \mathrm{d}t = \frac{k\mathrm{e}^{mkt}}{mk} + c,$$

$$z = \frac{1}{m} + c\mathrm{e}^{-mkt} = \frac{\mathrm{e}^{mkt} + cm}{m\mathrm{e}^{mkt}}.$$

Pro původní proměnnou tedy můžeme psát

$$y = z^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{\mathrm{e}^{mkt} + cm}{m\mathrm{e}^{mkt}}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{m\mathrm{e}^{mkt}}{\mathrm{e}^{mkt} + cm}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Pro jednoduchost vypočítáme hodnoty konstant c a k z rovnosti pro z. Dosazením podmínek $N(0) = 1$ a $N(3) = 3$ tedy získáme

$$z(0) = \frac{1}{1} = \frac{1}{1500} + c, \qquad \text{a tedy} \qquad c = \frac{1499}{1500},$$

$$z(3) = \frac{1}{3^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1500}\left(1 + 1499\mathrm{e}^{-1500\cdot 3k}\right), \qquad \text{a tedy} \qquad k \doteq 1{,}8329 \cdot 10^{-4}.$$

K více než polovině firem v odvětví se inovace dostane za t, které řeší rovnici

$$\frac{1}{927^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1500}\left(1 + 1499\,\mathrm{e}^{-1500\cdot 1{,}8329\cdot 10^{-4}t}\right),$$

což je $t \doteq 19{,}067$ měsíce. △

Model šíření inovací a jeho další rozšíření je možné nalézt např. v [49].

Příklad 3.7. Schaeferův model
Populace nějakého druhu ryb (např. tuňáka) může být popsána logistickou rovnicí (3.1). Tyto ryby jsou zdrojem obživy a v případě, že by jich rybáři vylovili příliš mnoho, by se mohlo stát, že jejich populace klesne pod jakousi „užitečnou hodnotu“. Předpokládejme, že lovení závisí na populaci těchto ryb, což můžeme popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y - Ey,$$

kde $y = y(t)$ je počet ryb, r je růstová konstanta populace, k je nosná kapacita prostředí a E je úsilí vynaložené na chycení ryby. Hodnotu Ey tedy můžeme považovat za počet chycených ryb. Tato rovnice se nazývá *Schaeferova rovnice* podle biologa M. B. Schaefera, který ji využil k modelování populací ryb. Tuto diferenciální rovnici vyřešte a ukažte, že pro $E < r$ je řešením rovnice funkce $y_1 = k(1 - E/r) > 0$.

Řešení. Nejprve upravíme Schaeferovu rovnici do tvaru

$$y' = ry - Ey - \frac{ry^2}{k} = (r - E)y - \frac{ry^2}{k}. \tag{3.2}$$

Ihned si můžeme všimnout, že rovnice má triviální řešení $y \equiv 0$. Rovnici poté vyřešíme obdobně jako rovnice v předchozích příkladech zavedením substituce $z = \frac{1}{y}$, tj.

$$-z' - (r - E)z = -\frac{r}{k},$$

což je autonomní rovnice, kterou vyřešíme metodou integračního faktoru. Ten je v tomto případě ve tvaru $\mathrm{e}^{\int (r-E)\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{(r-E)t}$. Vynásobením celé rovnice tímto faktorem získáme

$$z'\mathrm{e}^{(r-E)t} + (r - E)z\mathrm{e}^{(r-E)t} = \frac{r}{k}\mathrm{e}^{(r-E)t}.$$

Podrobnější řešení tohoto příkladu ponecháme na čtenáři. Řešení této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$z(t) = \frac{r}{k(r-E)} + c\mathrm{e}^{-(r-E)t} = \frac{r\mathrm{e}^{(r-E)t} + ck(r-E)}{k(r-E)\mathrm{e}^{(r-E)t}}.$$

Pro původní proměnnou y tedy můžeme psát

$$y(t) = \frac{k(r-E)\mathrm{e}^{(r-E)t}}{r\mathrm{e}^{(r-E)t} + ck(r-E)}.$$

Nyní ověříme, že $y_1 = k(1-E/r)$ je řešením této rovnice. Pro $c = 0$ získáme

$$y = \frac{k(r-E)\mathrm{e}^{(r-E)t}}{r\mathrm{e}^{(r-E)t}} = \frac{k(r-E)}{r} = y_1.$$

Toto ověření jsme mohli získat i přímým dosazením y_1 do rovnice (3.2), tj.

$$y_1' = 0 = rk\left(1 - \frac{E}{r}\right) - Ek\left(1 - \frac{E}{r}\right) - \frac{rk^2(1-\frac{E}{r})^2}{k},$$

podrobnější prověření platnosti této rovnosti ponecháme na čtenáři. Toto řešení je zajímavé, neboť udržitelný počet vylovených ryb Y, což je množství, jehož lovením můžeme chytat ryby nekonečně dlouho, je dán právě součinem $Y = Ey_1$.

△

Příklad 3.8. Solowův model
V tomto příkladu si ukážeme *Solowův* (někdy též *Swanův–Solowův*) model ekonomického růstu. Více podrobností o tomto modelu najde čtenář např. v [21], [63] a [64]. Před tím, než tento model zavedeme, si uvedeme několik ekonomických pojmů a zavedeme značení. Označme $K = K(t)$ celkový kapitál dané země, $Y = Y(t)$ produkt (tj. HDP), $L = L(t)$ celkovou pracovní sílu, $k(t) = k = K/L$ kapitál na osobu (tzv. kapitálová intenzita), $y(t) = y = Y/L$ produkt na osobu, přičemž všechny tyto ukazatele uvažujeme v čase t. Označme dále $L' = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ změnu počtu obyvatel, $n = L'/L$ tempo růstu populace, které budeme uvažovat konstantní (tj. můžeme ho zapsat např. jako tempo růstu ve výchozím časovém okamžiku $n = \frac{L'(t_0)}{L(t_0)}$), γ část produktu, kterou investujeme do kapitálu, a $\delta > 0$ depreciaci kapitálu (tj. to, jak se kapitál v čase opotřebovává). V tomto příkladu budeme dále uvažovat Cobbovu–Douglasovu produkční funkci, která je ve tvaru

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

kde $A > 0$ označuje produktivitu a $\alpha \in (0,1)$ je koeficient udávající podíl kapitálu. Tato produkční funkce splňuje klasické předpoklady, kterými jsou konstantní výnosy z rozsahu (což můžeme pro produkční funkci obecně zapsat jako $F(zK,zL) = zF(K,L)$) a kladný a klesající mezní produkt (tj. $F_k'(K,L) > 0$, $F_{kk}''(K,L) < 0$). Ověření toho, že pro Cobbovu–Douglasovu jsou tyto předpoklady splněny, ponecháme na čtenáři. Jestliže $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, můžeme produkci na osobu zapsat jako

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

Pro jednoduchost uvažujme model, ve kterém je A konstantní, a který odpovídá situaci v uzavřené ekonomice (tj. platí, že investice γY se rovnají úsporám). Změnu kapitálu můžeme z definice zapsat jako rozdíl investic do kapitálu a depreciace kapitálu, máme tedy rovnici

$$K(t+h) = K(t) + h(\gamma Y - \delta K),$$

ze které úpravou a limitním přechodem pro h jdoucí k nule dostaneme diferenciální rovnici

$$K'(t) = \gamma Y - \delta K.$$

Nyní se zaměřme na tzv. kapitálovou intenzitu k, pro niž můžeme psát

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} = \frac{\gamma Y - \delta K}{L} - kn = \gamma y - \delta k - kn.$$

Vezmeme–li v úvahu Cobbovu–Douglasovu produkční funkci, tj. $y = Ak^{\alpha}$, získáme

$$k' = A\gamma k^{\alpha} - k(\delta + n), \tag{3.3}$$

což je Bernoulliho rovnice. Tuto rovnici vyřešte a najděte hodnotu kapitálové intenzity v dlouhém období (pro $t \to \infty$) za předpokladu, že $\delta + n > 0$. Jaký je pro tuto hodnotu produkt na osobu y?

Řešení. Rovnici (3.3) vyřešíme obdobně jako v předchozích příkladech. Neboť $\alpha > 0$, má rovnice také řešení $y \equiv 0$, toto řešení ale není z praktického pohledu vůbec zajímavé, protože odpovídá konstantně nulovému produktu na obyvatele. Rovnici nejprve úpravou převedeme na

$$\frac{k'}{k^{\alpha}} = A\gamma - k^{1-\alpha}(\delta + n)$$

a následně zavedeme substituci $z = k^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k'$, kterou dostaneme rovnici

$$\frac{z'}{1-\alpha} = A\gamma - z(\delta + n).$$

Jedná se o autonomní rovnici, kterou vyřešíme např. metodou integračního faktoru, tj.

$$z'\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t} + z(\delta+n)(1-\alpha)\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t} = (1-\alpha)A\gamma\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t},$$

z čehož úpravou získáme

$$z\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t} = \int (1-\alpha)A\gamma\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t}\mathrm{d}t = \frac{A\gamma}{\delta+n}\mathrm{e}^{(\delta+n)(1-\alpha)t} + c.$$

Pro z tedy platí rovnost

$$z(t) = \frac{A\gamma}{\delta+n} + c\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}.$$

Pro kapitálovou intenzitu pak můžeme psát

$$k(t) = \left(\frac{A\gamma}{\delta+n} + c\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Za předpokladu, že $\delta + n > 0$, jde výraz $\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}$ pro t jdoucí do nekonečna k nule, v dlouhém období bude kapitálová intenzita v blízkosti hodnoty $k^{ss} := \left(\frac{A\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Značení k^{ss} a později i y^{ss} jsou zde použity záměrně, neboť tyto hodnoty označují tzv. stabilní či ustálené stavy neboli „steady states“, ke kterým se úrovně kapitálu a produktu dlouhodobě blíží. Tento ustálený stav můžeme definovat jako bod, ve kterém se proměnná již nemění v čase, tj. její derivace podle času je nulová. Z tohoto plyne, že ke stejnému výsledku jsme mohli dojít položením $k' = 0$ v rovnici (3.3). Produkt na osobu můžeme s využitím znalosti rovnice kapitálové intenzity psát

$$y(t) = Ak^{\alpha} = A\left(\frac{A\gamma}{\delta+n} + c\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta+n} + C\mathrm{e}^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

kde $C = \frac{c}{A}$. V dlouhém období je y v blízkosti hodnoty, kterou označíme y^{ss}. Pro tuto hodnotu platí

$$y^{ss} := A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

$\triangle$

Hodnoty k^{ss} a y^{ss} jsou významné výstupy tohoto modelu, neboť pomocí nich můžeme porovnávat země, které se liší např. jen v růstu populace n. Tyto hodnoty udávají jakési stabilní úrovně kapitálové intenzity a produktu na osobu, ke kterým jednotlivé země směřují. Tento model tak umožňuje růst pouze, pokud se zmenší n, nebo se sníží úroveň depreciace δ, nebo se zvýší produktivita A či část úspor investovaná do kapitálu γ.

Ačkoli je tento model velmi jednoduchý, srovnáme–li jeho výsledky s daty, předpovídá dobře určité trendy, jako například fakt, že země s vyšší mírou úspor γ mají tendenci mít vyšší kapitálovou intenzitu. Model je samozřejmě možné rozšířit např. o zahrnutí lidského kapitálu (tj. jakési kvality pracovníků) nebo o rozšíření produktivity na součet efektivnosti a technologie, které již nejsou konstantní. V případě těchto rozšíření modelu již nelze obecně říci, jakou rovnicí můžeme model popsat, neboť záleží na konkrétních podobách jednotlivých funkcí.

Kapitola 4

Exaktní rovnice

Exaktní rovnice je posledním typem diferenciálních rovnic 1. řádu, které jsou zařazeny v této práci. Exaktní rovnice úzce souvisí s ostatními typy rovnic, které jsme viděli v předchozích kapitolách, což je patrné např. z Poznámky 4.6. Před tím, než definujeme exaktní diferenciální rovnici, uvedeme definici diferenciálu, který s exaktní rovnicí úzce souvisí.

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h, k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$, případně $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$.

Takto definovaný diferenciál se nazývá *totální* nebo také *Fréchetův* diferenciál. Přírůstky h, k nezávisle proměnných x, y v definici diferenciálu se často značí dx, $\mathrm{d}y$. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [14].

Věta 4.2. *Nechť je funkce $f(x,y)$ definovaná v nějaké oblasti Ω roviny (x,y) a má v této oblasti spojité parciální derivace prvního řádu. Pak má v Ω totální diferenciál, který je roven*

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Funkce $f(x,y)$ se nazývá kmenová funkce tohoto diferenciálu.

Definice 4.3. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4.1}$$

kde M, N jsou funkce definované na nějaké oblasti Ω roviny (x,y), nazýváme *exaktní diferenciální rovnicí*, jestliže existuje funkce $f(x,y)$ taková, že na Ω platí

$$df(x,y) = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [29].

Věta 4.4. *Nechť $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ jsou funkce spojité v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Je–li v tomto okolí $N(x,y) \neq 0$ a platí*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \tag{4.2}$$

je rovnice (4.1) exaktní a má v jistém okolí bodu x_0 jediné řešení $y(x)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je dáno implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$, kde

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 4.5 (Řešení exaktní diferenciální rovnice). Nejprve si diferenciální rovnici přepíšeme do tvaru $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ a ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici. Poté určíme kmenovou funkci, pro kterou platí $F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + c(y)$, kde při integrování podle x považujeme y za konstantu a $c(y)$ je integrační konstanta. Derivací pravé strany a ze vztahu $N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ získáme $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + c'(y)$, z čehož integrací určíme hledanou funkci $c(y)$, ve které vystupuje integrační konstanta c. Kmenovou funkci pak získáme dosazením $c(y)$ do $F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + c(y)$. Je–li $F(x,y)$ nalezená kmenová funkce, je obecné řešení exaktní diferenciální rovnice určeno implicitně rovnicí

$$F(x,y) = c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Při výpočtu lze analogicky postupovat i s využitím vztahu $F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y + c(x)$. Oba tyto postupy ale nemusí být stejně obtížné.

Příklad 4.1. Vyřešme diferenciální rovnici

$$(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Označme $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ a $N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Nejprve parciální derivací ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici. V našem případě se o exaktní rovnici jedná, platí totiž

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Nyní najdeme kmenovou funkci, a to ze vztahu

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \left(6x^2y + 4y^3\right)\,\mathrm{d}y = 3x^2y^2 + y^4 + c(x).$$

Zároveň víme, že platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + y^4 + c(x)\right) = M(x,y),$$

z čehož plyne

$$6xy^2 + c'(x) = 3x^2 + 6xy^2 \qquad \text{neboli} \qquad c'(x) = 3x^2.$$

Tuto rovnici vyřešíme integrací, získáme tedy

$$c(x) = \int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + c.$$

Hledaná kmenová funkce je tedy

$$F(x,y) = 3x^2y^2 + y^4 + x^3 + c$$

a řešení rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c.$$

$\triangle$

Poznámka 4.6 (Integrační faktor). Někdy je možné rovnici, která není exaktní, upravit na rovnici, která exaktní je, a to vynásobením vhodným výrazem $m(x,y)$. Tento výraz se nazývá *integrační faktor.* Například pro lineární rovnici $y' = f(x)y + g(x)$ je integrační faktor $m(x,y) = \mathrm{e}^{\int_x^{x_0} a(s)\,\mathrm{d}s}$, rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$ má integrační faktor $m(y) = \frac{1}{g(y)}$. O existenci integračního faktoru pojednává následující věta.

Následující věta i její důkaz jsou uvedeny v [30], [31].

Věta 4.7 (Kamkeho). *Jestliže v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ jsou funkce M, N spojitě diferencovatelné a $N(x_0, y_0) \neq 0$, pak existuje integrační faktor $m(x,y)$ rovnice (4.1) definovaný v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$.*

Dalším způsobem řešení exaktní diferenciální rovnice je nalezení kmenové funkce výpočtem obou integrálů $\int M(x,y)\,\mathrm{d}x$ a $\int N(x,y)\,\mathrm{d}y$. Kmenová funkce pak vznikne jako součet těchto dvou výsledků, přičemž členy, které se objeví v obou primitivních funkcích, uvažujeme pouze jedenkrát. Tento postup se může na první pohled zdát jednodušší a rychlejší, pro složitější funkce ovšem nemusí být vždy jednoduché poznat, které členy jsou stejné a jak tedy vypadá výsledné řešení. Další nevýhodou tohoto postupu může v některých případech (např. v Příkladu 4.3) být nutnost výpočtu obou integrálů. Tento postup si nyní ukážeme na příkladu.

Příklad 4.2. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y\,\mathrm{d}x + \left(x + \frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladu nejprve ověříme, že se jedná o exaktní rovnici, tj.

$$\frac{\partial}{\partial y} y = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{2}{y}\right).$$

Rovnici dále řešíme integrováním, kterým získáme

$$\int y\,\mathrm{d}x = xy + c(y)$$

a

$$\int \left(x + \frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y = xy + 2\ln|y| + c(x).$$

Porovnáním těchto dvou výrazů dostaneme kmenovou funkci $F(x,y) = xy + \ln y^2 + c$ a řešení tedy můžeme zapsat jako

$$xy + \ln y^2 = c.$$

$\triangle$

Aplikace uvedené v této kapitole vychází převážně z [17], dalším užitečným zdroj byl [71], odborné informace týkající se termodynamické identity, elektrického potenciálu a proudnic nalezne čtenář např. v [24], [46] a [9].

Příklad 4.3. Konstantní náklady
Jste vedoucím výrobní linky firmy, která vyrábí ozubená kolečka. Ředitel vám nařídil, abyste zvýšil produkci, ale odmítl vám zvýšit rozpočet. Rozhodl jste se to provést tak, že do každého ozubeného kolečka budete dávat méně kovu. Nechť $C = C(S,M)$ jsou celkové náklady, S počet ozubených koleček, který vyrobíte, a M počet gramů kovu v každém kolečku. Vezmeme–li v potaz počet gramů kovu na kolečko M a jejich počet S, pak

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{M(S+10)}{\sqrt{(S+10)^2-100}} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial C}{\partial M} = \sqrt{(S+10)^2-100}.$$

Najděte a vyřešte rovnici dávající do souvislosti S a M, která udrží vaše celkové náklady konstantní.

Řešení. Zapišme si stav $C(S+h, M+k)$ jako

$$C(S+h, M+k) = C(S,M) + h\cdot\frac{\partial C}{\partial S} + k\cdot\frac{\partial C}{\partial M}.$$

Ze zadání víme, že $C(S+h, M+k) = C(S,M)$, výraz

$$h\cdot\frac{\partial C}{\partial S} + k\cdot\frac{\partial C}{\partial M}$$

je tedy roven nule. Přírůstky h, k nezávisle proměnných S, M označíme dS, dM, obdobně jako v Definici 4.1. S využitím této znalosti můžeme psát

$$\frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial C}{\partial M}\mathrm{d}M = 0.$$

Označme si

$$P = P(S,M) = \frac{\partial C}{\partial S} \qquad \text{a} \qquad Q = Q(S,M) = \frac{\partial C}{\partial M}.$$

Nyní již můžeme sestavit diferenciální rovnici ve tvaru

$$\frac{M(S+10)}{\sqrt{(S+10)^2-100}}\mathrm{d}S + \sqrt{(S+10)^2-100}\,\mathrm{d}M = 0,$$

která je exaktní, neboť platí

$$\frac{\partial P}{\partial M} = \frac{S+10}{\sqrt{(S+10)^2-100}} = \frac{\partial Q}{\partial S}.$$

Pro kmenovou funkci $C(S,M)$ platí

$$C(S,M) = \int P(S,M)\,\mathrm{d}S + k(M) = \int Q(S,M)\,\mathrm{d}M + k(S),$$

přičemž $k(M)$ a $k(S)$ označují integrační konstanty závisející na příslušných proměnných. Zde si můžeme všimnout rozdílné obtížnosti integrování, pro usnadnění výpočtu budeme integrovat výraz $Q(S,M)$, čímž získáme

$$C(S,M) = M\sqrt{(S+10)^2 - 100} + k(S).$$

Derivací pravé strany podle S a ze vztahu $P(S,M) = \frac{\partial C}{\partial S}$ dostaneme rovnici

$$\frac{M(S+10)}{\sqrt{(S+10)^2-100}} + k'(S) = \frac{M(S+10)}{\sqrt{(S+10)^2-100}},$$

ze které plyne $k'(S) = 0$, a tedy $k(S) = k$. Řešení exaktní rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$M\sqrt{(S+10)^2 - 100} = k.$$

Tato rovnice říká, jakým způsobem se musí změnit M, změníme–li S tak, abychom zvýšili produkci, ale celkově touto změnou nezměnili náklady (tj. k se nezměnilo). Konkrétní hodnotu k bychom získali ze aktuálního stavu výroby.

$\triangle$

Příklad 4.4. Osvícený objekt

Zdroj světla se silou S svítí na objekt, který je vzdálen x metrů. Uvažujme takový případ, že při zvýšení síly zdroje se osvětlení objektu I zvýší podle $\frac{\partial I}{\partial S} = \frac{k}{x^2}$, kde k je kladná konstanta. Dále uvažujme situaci, ve které se osvětlení sníží podle $\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{-2kS}{x^3}$ v případě, že objekt posuneme dál od zdroje. Napište a vyřešte diferenciální rovnici, která říká: „Jak S, tak x se o malinko zvýší tak, že nedojde k žádné změně osvětlení objektu.“

Řešení. Obdobně jako v předchozím příkladu sestavíme rovnici

$$\frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}S - \frac{2kS}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pro přehlednost označme $M(S,x) = \frac{k}{x^2}$ a $N(S,x) = -\frac{2kS}{x^3}$. Tato rovnice je exaktní, neboť platí rovnost

$$\frac{\partial M(S,x)}{\partial x} = -\frac{2k}{x^3} = \frac{\partial N(S,x)}{\partial S}.$$

Výše uvedenou diferenciální rovnici vyřešíme nalezením kmenové funkce $I(S,x)$. Pro tuto funkci platí

$$I(S,x) = \int M(S,x)\,\mathrm{d}S + c(x) = \int \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}S + c(x),$$

a tedy

$$I(S,x) = \frac{kS}{x^2} + c(x).$$

Hodnotu integrační konstanty $c(x)$ získáme zderivováním pravé strany a ze vztahu

$$N(S,x) = \frac{\partial I(S,x)}{\partial x} = \frac{-2kS}{x^3}.$$

Pro tyto výrazy platí rovnost

$$\frac{-2kS}{x^3} + c'(x) = \frac{-2kS}{x^3},$$

z čehož plyne

$$c'(x) = 0, \qquad \text{tj. } c(x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Hledanou kmenovou funkci lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$I(S,x) = \frac{kS}{x^2} + c.$$

Změní–li se vzdálenost objektu, musí se pro zachování stejného osvětlení změnit síla zdroje světla tak, aby platila rovnost

$$\frac{kS}{x^2} = c.$$

Konkrétní hodnotu konstanty c bychom obdobně jako v předchozím příkladu získali z počátečního stavu.

△

Příklad 4.5. Termodynamická identita
Termodynamická identita pro plyn v uzavřené nádobě (tj. plyn obsahující konstantní počet molekul) dává do souvislosti změnu vnitřní energie plynu U a změny v jeho entropii S a objemu V: $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$, kde T je teplota a P tlak plynu, více čtenář najde např. v [24]. Pro ideální monoatomický plyn jsou dány

$$T = \frac{C}{V^{(2/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)} \qquad P = \frac{CNk_B}{V^{(5/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)},$$

kde N je počet molekul, k_B Boltzmannova konstanta a C jiná konstanta, která závisí na N. Z termodynamické identity odvoďte vztah mezi S a V, který platí pro ideální plyn, který prochází procesem při konstantní vnitřní energii.

Řešení. Ze zadání sestavíme diferenciální rovnici

$$\frac{C}{V^{(2/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)}\mathrm{d}S - \frac{CNk_B}{V^{(5/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)}\mathrm{d}V = 0.$$

Dále ověříme, že je rovnice exaktní. Platí

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{2}{3}\frac{C}{V^{(5/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)} = \frac{\partial P}{\partial S}.$$

Kmenovou funkci najdeme pomocí integrace

$$U(S,V) = \int \frac{C}{V^{(2/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)}\mathrm{d}S + c(V) = \frac{3CNk_B}{2V^{(2/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)} + c(V).$$

Pro derivaci tohoto výrazu podle V a výraz pro P platí rovnost, tj.

$$-\frac{CNk_B}{V^{(5/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)} + c'(V) = \frac{CNk_B}{V^{(5/3)}}\mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)},$$

ze které plyne

$$c'(V) = 0, \qquad \text{a tedy} \qquad c(V) = c.$$

Hledaný vztah můžeme zapsat jako

$$\frac{3CNk_B}{2V^{(2/3)}} \mathrm{e}^{(2S)/(3Nk_B)} = c.$$

△

Příklad 4.6. Délka objektu

Ve speciální relativitě je délka objektu daná vzorcem $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, kde L_0 je délka objektu změřená pozorovatelem, který je vůči tomuto objektu v klidu, v je rychlost objektu a c je rychlost světla. Vypočítejte změnu dL délky objektu, ke které dojde v důsledku zvýšení klidové délky objektu L_0 o malé dL_0. Dále vypočítejte změnu dL délky objektu, která vznikne v důsledku zvýšení rychlosti objektu v o malé dv. Dále napište a vyřešte diferenciální rovnici, která říká: „Jak L_0, tak v se malinko zvětší tak, že nedojde k žádné skutečné změně délky objektu.“

Řešení. Změnu dL, která vznikne v důsledku změny L_0, můžeme vyjádřit jako

$$\mathrm{d}L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}L_0.$$

Změnu dL, která vznikne v důsledku změny rychlosti v, můžeme zapsat jako

$$\mathrm{d}L = \frac{L_0}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right)\mathrm{d}v = -\frac{vL_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}v.$$

S využitím těchto informací můžeme sestavit hledanou diferenciální rovnici

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}L_0 - \frac{vL_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}v = 0.$$

Nyní za pomoci parciálních derivací ověřme, že jde o exaktní rovnici. Počítejme tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{-v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad = \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L_0}\left(-\frac{vL_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{-v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

z této rovnosti vidíme, že rovnice je exaktní. Vyřešíme ji integrováním, tj.

$$\int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}L_0 = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + c(v)$$

a následným derivováním pravé strany podle v, kterým dostaneme

$$-\frac{vL_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + c'(v),$$

z čehož plyne, že $c'(v) = 0$, a tedy $c(v) = c$. Hledaný vztah tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = c.$$

Tato rovnice říká, že jestliže se L_0 změní a v se změní odpovídajícím způsobem, celková délka objektu zůstane stejná.

△

Příklad 4.7. Elektrický potenciál
Hodnota kmenové funkce $V(x,y)$ v bodě (x,y) ve fyzice obvykle odpovídá potenciální energii v daném místě. V elektrostatice se funkcí V reprezentuje plošný elektrostatický potenciál. Elektrický potenciál v bodě $\vec{r}$ ve dvoudimenzionálním statickém elektrickém poli $\vec{E}$ je dán křivkovým integrálem

$$V = -\int_C \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\int_C (E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y),$$

kde C je libovolná křivka spojující bod s nulovým potenciálem a $\vec{r}$. Z toho vyplývá, že pro vztah elektrického potenciálu V a elektrického pole platí

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x \quad a \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -E_y.$$

Jestliže je křivka uzavřená, je křivkový integrál nulový (což je ekvivalentní podmínce, že nezáleží na integrační cestě, viz [19]). S využitím znalosti Greenovy věty můžeme psát

$$0 = \oint_C (E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y) = \iint \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Elektrický potenciál tedy můžeme spočítat jako kmenovou funkci diferenciální rovnice $-E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y = 0$. Vyřešením této diferenciální rovnice získáme ekvipotenciální křivky $V(x,y) = c$ elektrického potenciálu $V(x,y)$, které spojují body se stejným elektrickým potenciálem. Najděte $V(x,y)$, jestliže měření elektrického pole dávají

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}+1 \\ -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Řešení. Ze zadání sestavíme diferenciální rovnici ve tvaru

$$(2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 1)\,\mathrm{d}x + (2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2})\,\mathrm{d}y = 0.$$

Nejprve ověříme, že se jedná o exaktní rovnici, tj.

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

z čehož vidíme, že tomu tak skutečně je. Nyní obdobně jako v předchozích příkladech najdeme kmenovou funkci $V(x,y)$. Integrací získáme

$$V(x,y) = \int \left(2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 1\right) \mathrm{d}x = -\int 1 \,\mathrm{d}x + \int 2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x \begin{vmatrix} t = -x^2 - y^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$
$$= -x - \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -x - \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + c(y)$$

a zároveň víme, že platí

$$V(x,y) = \int 2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}y \begin{vmatrix} t = -x^2 - y^2 \\ dt = -2y\,\mathrm{d}y \end{vmatrix} = -\int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + c(x). \tag{4.3}$$

Kmenovou funkci tedy můžeme získat jako součet těchto výrazů, přičemž členy, které se objevují v obou výrazech, bereme pouze jednou. Získáme tedy

$$V(x,y) = -\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - x + c.$$

△

Příklad 4.8. Proudnice
Proudnice jsou množina křivek, které jsou tečné k vektoru rychlosti proudu. Tyto křivky ukazují směr, ve kterém se pohybují částice proudu, přičemž každým bodem proudící kapaliny prochází právě jedna proudnice (tj. proudnice se neprotínají). Uvažujme rychlostní pole (u,v) dvoudimenzionálního nestlačitelného proudu. Pro nestlačitelný proud jsou změny hustoty zanedbatelné. Nechť je množina křivek proudu zadána $\psi(x,y) = c$. Vektory rychlosti jsou k těmto křivkám tečné, situace pro jednu proudnici je znázorněna na Obrázku 4.1. Podél křivky $\psi(x,y) = c$ tedy platí následující

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{d}\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Z toho plyne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{v}{u},$$

u a v tedy můžeme zapsat jako

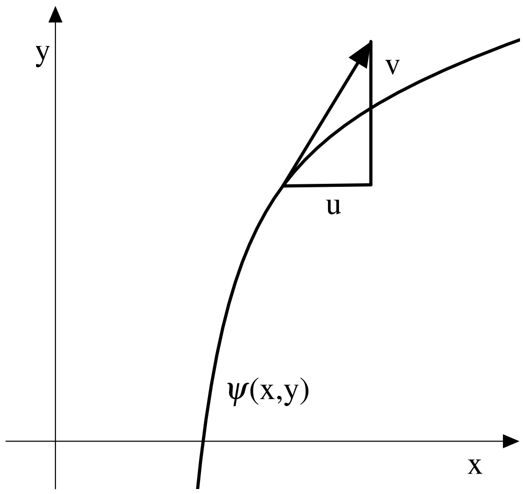
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Protože proud je nestlačitelný, platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}.$$

Tím jsou splněny podmínky pro exaktní diferenciální rovnici a ψ najdeme vyřešením rovnice

$$v\,\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}y = 0. \tag{4.4}$$



Obrázek 4.1: Proudnice

S využitím těchto znalostí najděte proudnice, jestliže víte, že

$$u = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{a} \qquad v = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Nejprve dosadíme hodnoty ze zadání do rovnice (4.4), čímž získáme

$$v\,\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}y = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0.$$

Ověření exaktnosti této rovnice ponecháme na čtenáři. Rovnici dále řešíme jako v předchozích příkladech, tj.

$$\psi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+y^2| + c(y).$$

Funkci $c(y)$ získáme z rovnosti

$$\frac{2y}{2(x^2+y^2)} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2},$$

z čehož plyne

$$c'(y) = 0, \qquad \text{a tedy} \qquad c(y) = c.$$

Řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+y^2| = c,$$

z čehož úpravou získáme

$$x^2+y^2 = \mathrm{e}^{2c} = k.$$

Proudnice jsou v tomto případě kruhy se středem v počátku.

△

Kapitola 5

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Definice 5.1. Diferenciální rovnici ve tvaru

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{5.1}$$

kde a, b jsou reálné konstanty a f je reálná spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu J, nazýváme *lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty*. Pokud je $f(x) \equiv 0$, hovoříme o *homogenní* rovnici (5.1), v opačném případě rovnici (5.1) nazýváme *nehomogenní*. *Řešením* rovnice (5.1) v otevřeném intervalu J rozumíme každou funkci, která má v J spojité derivace do řádu dva a splňuje rovnost (5.1). Úloha najít řešení $y(x)$ rovnice (5.1) splňující počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \tag{5.2}$$

kde $x_0 \in J$, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ se nazývá *počáteční (Cauchyho) úloha* (či *problém*).

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [51].

Věta 5.2 (O existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť je funkce $f : J \to \mathbb{R}$ spojitá a nechť y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in J$. Pak existuje právě jedno řešení $y(x)$ diferenciální rovnice* (5.1) *definované na intervalu J a splňující podmínky* (5.2).

Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Podobně jako v případě homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu nazýváme rovnici

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.3}$$

přidruženou homogenní rovnicí rovnici (5.1). Rovnice (5.3), obdobně jako homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu, má vždy triviální řešení $y \equiv 0$. Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [53].

Věta 5.3 (Princip superpozice)**.** *Nechť y_1, y_2 jsou libovolná řešení rovnice* (5.3) *na intervalu J. Pak je též*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad \textit{kde} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

řešením rovnice (5.3) *na J.*

Definice 5.4. Dvojice řešení y_1, y_2 rovnice (5.3) definovaných na intervalu J se nazývá *fundamentální systém řešení*, když

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in J.$$

Determinant $W[y_1(x), y_2(x)]$ se nazývá *Wronskián* funkcí y_1, y_2.

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [53].

Věta 5.5. *Řešení y_1, y_2 rovnice (5.3) jsou lineárně nezávislá na intervalu J právě tehdy, když je jejich Wronskián různý od nuly v nějakém bodě x_0 intervalu J.*

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [51].

Věta 5.6. *Nechť y_1, y_2 je fundamentální systém řešení rovnice (5.3). Pak je*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

obecné řešení rovnice (5.3).

Stejně jako v případě lineární diferenciální rovnice 1. řádu se nejprve naučíme řešit homogenní rovnici, k čemuž potřebujeme spočítat kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. O různosti výsledků a jejich významu pro řešení homogenní rovnice hovoří následující věta, jejíž důkaz je uveden např. v [51].

Věta 5.7. *Nechť*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{5.4}$$

je charakteristická rovnice pro rovnici (5.3). Kořeny charakteristické rovnice můžeme obecně vyjádřit jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

V závislosti na hodnotě diskriminantu $D = \sqrt{a^2 - 4b}$ pak rozlišujeme 3 případy:

1. *Jestliže $D > 0$, pak má rovnice (5.4) dva různé reálné kořeny*

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

a funkce $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5.3). Její obecné řešení je ve tvaru

$$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

2. *Jestliže $D = 0$, pak má rovnice (5.4) dvojnásobný reálný kořen $\lambda = -\frac{1}{2}a$ a funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$ a $x\mathrm{e}^{\lambda x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5.3). Její obecné řešení je*

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}(c_1 + c_2 x).$$

3. *Jestliže $D < 0$, pak má rovnice (5.4) komplexně sdružené kořeny*
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \qquad \textit{kde} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}a, \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}.$$
Fundamentální systém řešení tvoří funkce $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$. Obecné řešení rovnice (5.3) je v tomto případě
$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\big). \tag{5.5}$$

Poznámka 5.8. Vzorec (5.5) lze upravit na tvar
$$y = c\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x + \omega), \qquad c \in \mathbb{R},\ \omega \in [0, 2\pi),$$
který může být při některých úvahách vhodnější. Tento tvar lze z (5.5) odvodit úpravou, neboť platí
$$c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\beta x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\beta x\right).$$
Tuto rovnost můžeme přepsat jako
$$y = c\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x + \omega),$$
kde $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ a ω je určeno rovnicemi
$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\omega \qquad \text{a} \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \sin\omega,$$
ze kterých plyne
$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{c_2}{c_1}.$$

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Důkaz následujícího tvrzení je uveden např. v [53].

Věta 5.9. *Obecné řešení nehomogenní rovnice (5.1) můžeme zapsat jako*
$$y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$
kde y_p je partikulární řešení rovnice (5.1) a y_h je obecné řešení přidružené homogenní rovnice (5.3).

Obecné řešení nehomogenní rovnice (5.1) lze získat např. metodou variace konstant. Dalším způsobem je metoda neurčitých koeficientů, kterou je možné použít pouze v případě speciální pravé strany. Oba tyto postupy si nyní podrobněji popíšeme a ukážeme na příkladech.

Poznámka 5.10 (Metoda variace konstant). Obdobně jako u lineárních rovnic prvního řádu spočívá myšlenka této metody v tom, že získáme řešení přidružené homogenní rovnice, které poté využijeme pro řešení rovnice nehomogenní. Nejprve tedy najdeme řešení přidružené homogenní rovnice (5.3), jež můžeme obecně zapsat ve tvaru $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Konstanty c_1 a c_2 poté nahradíme neznámými funkcemi $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Partikulární řešení rovnice (5.1) můžeme zapsat ve tvaru $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Derivováním této rovnosti získáme

$$y_p' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Předpokládejme, že neznámé funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ splňují rovnost

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{5.6}$$

S využitím tohoto předpokladu můžeme psát

$$y_p' = c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Derivováním tohoto výrazu dostaneme

$$y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Nyní výrazy pro y_p, y_p' a y_p'' dosadíme do rovnice (5.3), čímž po úpravě získáme

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{5.7}$$

Funkce y_1 a y_2 jsou řešení přidružené homogenní rovnice, a tedy pro ně platí

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = 0 \quad \text{a} \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = 0.$$

Rovnici (5.7) můžeme zapsat ve tvaru

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{5.8}$$

Rovnice (5.8) společně s rovnicí (5.6) tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, ze které již můžeme najít konkrétní hodnoty c_1 a c_2. Jejich dosazením do řešení přidružené homogenní rovnice získáme partikulární řešení rovnice nehomogenní, které bude ve tvaru $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak podle Věty 5.9 součtem partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení rovnice homogenní. Tento postup řešení si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 5.1. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Řešení. Nejprve se zaměříme na přidruženou homogenní rovnici, která je ve tvaru

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Charakteristická rovnice je tedy

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 = (\lambda - 2)^2.$$

Tato rovnice má dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Podle Věty 5.7 tvoří fundamentální systém řešení funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$ a $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$y_h = \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2 x).$$

Nyní s využitím předchozí poznámky sestavíme soustavu rovnic pro c_1' a c_2', tj.

$$\begin{aligned} c_1'\mathrm{e}^{2x} + c_2' x\mathrm{e}^{2x} &= 0 \\ 2c_1'\mathrm{e}^{2x} + c_2'(\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}) &= x\mathrm{e}^{2x}, \end{aligned}$$

ze které např. pomocí eliminace nebo Cramerova pravidla získáme

$$c_2' = x, \qquad \text{z čehož integrováním obdržíme} \qquad c_2 = \frac{x^2}{2}.$$

Dosazením tohoto vztahu do první rovnice pak pro c_1 dostaneme

$$c_1' + x^2 = 0, \qquad \text{z čehož integrováním získáme} \qquad c_1 = -\frac{x^3}{3}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$y_p = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x} = -\frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{2x} + \frac{x^2}{2}x\mathrm{e}^{2x} = \frac{x^3}{6}\mathrm{e}^{2x}.$$

Nyní již můžeme zapsat hledané obecné řešení

$$y(x) = y_p + y_h = \frac{x^3}{6}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2 x) = \left(\frac{x^3}{6} + c_1 + c_2 x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

△

Poznámka 5.11 (Metoda neurčitých koeficientů). Metodu neurčitých koeficientů můžeme použít v případě speciální pravé strany. I v tomto případě ovšem musíme nejprve vyřešit přidruženou homogenní rovnici. Poté hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice, pro které v případě pravé strany $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

kde $Q_m(x)$ je polynom m-tého stupně, platí

$$y_p = x^k \widetilde{Q}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

kde k je násobnost čísla α coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{Q}_m(x)$ je polynom stupně nejvýše m. Jestliže je pravá strana ve tvaru

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x],$$

kde $P_m(x)$ je polynom stupně m a $Q_n(x)$ polynom stupně n, pak pro partikulární řešení nehomogenní rovnice platí

$$y_p = x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\big[\widetilde{P}_r(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_r(x)\sin\beta x\big],$$

kde k je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ coby kořene charakteristického polynomu a $\widetilde{P}_r(x), \widetilde{Q}_r(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše r, kde $r = \max\{m,n\}$. Tento postup můžeme využít i v případě, že je na pravé straně součet více nehomogenit, např. pravá strana je ve tvaru

$$f(x) = Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x].$$

V tomto případě je řešení součtem jednotlivých řešení, které odpovídají příslušným nehomogenitám. Podle Věty 5.9 můžeme řešení zapsat jako součet partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení rovnice homogenní. I tento postup řešení si nyní ukážeme na příkladu.

Příklad 5.2. Vyřešme diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^x \cos 2x. \tag{5.9}$$

Řešení. Nejprve se zaměříme na přidruženou homogenní rovnici, která je ve tvaru

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Charakteristická rovnice je tedy

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Tato rovnice má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Podle Věty 5.7 tvoří fundamentální systém řešení funkce $y_1 = \mathrm{e}^x \cos 2x$ a $y_2 = \mathrm{e}^x \sin 2x$. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$y_h = \mathrm{e}^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Nyní najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Pravá strana nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x],$$

kde $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $P(x) = 2$, $Q(x) = 0$. Číslo $\lambda = \alpha + i\beta = 1 + 2i$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Partikulární řešení je tedy podle výše uvedené poznámky ve tvaru

$$y_p = x\mathrm{e}^x\left(\widetilde{P}_0 \cos 2x + \widetilde{Q}_0 \sin 2x\right).$$

Derivací tohoto výrazu získáme

$$y_p' = \widetilde{P}_0\mathrm{e}^x\cos 2x + \widetilde{P}_0 x\mathrm{e}^x\cos 2x - 2\widetilde{P}_0 x\mathrm{e}^x\sin 2x + \widetilde{Q}_0\mathrm{e}^x\sin 2x + \widetilde{Q}_0 x\mathrm{e}^x\sin 2x + 2\widetilde{Q}_0 x\mathrm{e}^x\cos 2x,$$

což můžeme upravit na

$$y_p' = \mathrm{e}^x\cos 2x[\widetilde{P}_0 + x(\widetilde{P}_0 + 2\widetilde{Q}_0)] + \mathrm{e}^x\sin 2x[\widetilde{Q}_0 + x(\widetilde{Q}_0 - 2\widetilde{P}_0)].$$

Druhou derivací a úpravou dostaneme

$$y_p'' = \mathrm{e}^x \cos 2x[\widetilde{P}_0(2-3x) + 4\widetilde{Q}_0(1+x)] + \mathrm{e}^x \sin 2x[-4\widetilde{P}_0(1+x) + \widetilde{Q}_0(2-3x)]$$

Dosazením do rovnice (5.9) a následnou úpravou získáme rovnost

$$4\widetilde{Q}_0 \mathrm{e}^x \cos 2x - 4\widetilde{P}_0 \mathrm{e}^x \sin 2x = 2\mathrm{e}^x \cos 2x,$$

z čehož porovnáním koeficientů už můžeme určit hodnoty

$$\widetilde{Q}_0 = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \widetilde{P}_0 = 0.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y_p = \frac{1}{2} x \mathrm{e}^x \sin 2x$$

a obecné řešení můžeme psát ve tvaru

$$y(x) = y_h + y_p = \mathrm{e}^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{2} x \mathrm{e}^x \sin 2x.$$

△

Typickou aplikací vedoucí na rovnice druhého řádu je kmitání, o kterém se čtenář dočte více např. v [10], [15], [16] či [52]. V následujících příkladech budeme uvažovat zavěšenou pružinu, na jejíž konec upevníme závaží o určité hmotnosti m, ilustrace takovéto pružiny je na Obrázku 5.1. Toto závaží způsobí natažení pružiny o délku s. Podle Hookova zákona je deformace tělesa rovna síle, která na toto těleso působí. V našem případě si deformaci (tj. změnu původní délky pružiny) můžeme zapsat jako součin $k \cdot s$, kde k je konstanta tuhosti. Tato konstanta udává odolnost pružiny vůči natažení či stlačení, její jednotka je $N \cdot m^{-1}$. Na tuto pružinu působí zároveň gravitační síla mg. Pro pružinu se závažím, která je v klidu (tj. rovnovážné poloze), tedy musí platit rovnost

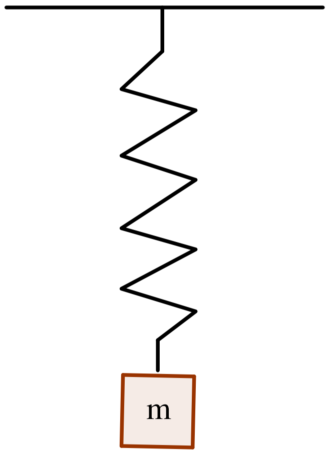
$$ks = mg.$$

Předpokládejme nyní, že pružinu se závažím natáhneme o nějaké y_0 dolů a poté ji pustíme. Označme $y = y(t)$ vzdálenost závaží od rovnovážné polohy (ve které $y = 0$), přičemž uvažujeme y kladné ve směru svisle dolů. Síly působící na závaží jsou tedy: gravitační síla $F_g = mg$ s kladným znaménkem, neboť tato síla působí směrem svisle dolů (a my v tomto směru uvažujeme y kladné). Dále na těleso působí tlumící síly (včetně vnitřního odporu pružiny), které jsou úměrné rychlosti y', tedy $F_o = -c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cy'$. Poslední síla, která na těleso působí, je rovna deformaci, můžeme tedy psát $F_d = -k(s+y)$. Výslednou sílu F můžeme zapsat jako $F = F_g - F_o - F_d$. Podle Newtonova druhého zákona platí rovnost $F = ma$, kde $a = y''$ je zrychlení. Z těchto informací můžeme sestavit diferenciální rovnici

$$my'' = mg - ks - ky - cy'.$$

Zároveň víme, že $ks = mg$, rovnici tedy můžeme upravit na

$$my'' + cy' + ky = 0.$$



Obrázek 5.1: Pružina

Počáteční podmínky tohoto problému můžeme zapsat jako $y(0) = y_0$ a $y'(0) = v_0$, přičemž druhá podmínka říká, že jsme nataženou pružinu pustili s počáteční rychlostí v_0. Nyní si na konkrétních příkladech ukážeme různé možnosti toho, jak bude pružina kmitat. Začneme nejjednodušší možností, a to příkladem, ve kterém zanedbáme tlumící síly (tj. $c = 0$).

Příklad 5.3. Harmonické kmitání
Pružina se závažím o hmotnosti 0,1 kg má v klidu délku 0,5 metru. Abychom tuto pružinu natáhli na 0,7 metru, musíme vynaložit sílu 2 N. Najděte pozici závaží jako funkci času t v případě, že pružinu takto natáhneme a poté ji pustíme s nulovou počáteční rychlostí. Uvažujte tlumící sílu rovnu nule.

Řešení. S využitím vztahů uvedených výše sestavíme rovnici

$$my'' + ky = 0,$$

kde v našem případě $m = 0,1$ a $k = 10$, neboť platí rovnost $k \cdot 0,2 = 2$. Máme tedy homogenní rovnici

$$0,1y'' + 10y = 0 \qquad \text{neboli} \qquad y'' + 100y = 0.$$

Charakteristický polynom $\lambda^2 + 100 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 10i$. Řešení rovnice je ve tvaru

$$y(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t.$$

Dosazením podmínek $y(0) = 0,2$ a $y'(0) = 0$ získáme hodnoty konstant c_1 a c_2 z rovností

$$0,2 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c_1 = 0,2$$

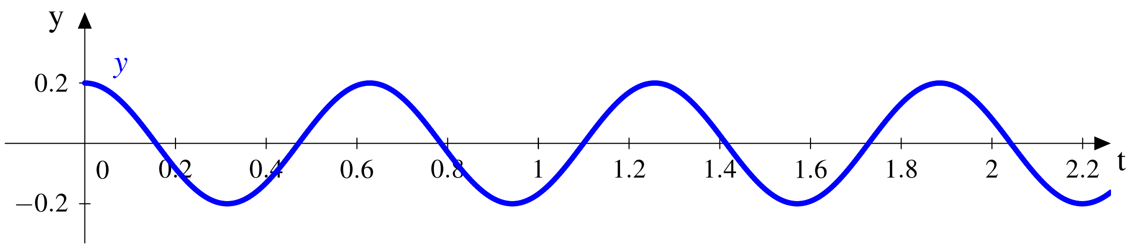
a

$$y'(t) = -7c_1 \sin 10t + 7c_2 \cos 10t, \qquad \text{z čehož dosazením } y'(0) = 0 \text{ máme} \qquad c_2 = 0.$$

Vzdálenost od rovnovážné polohy v čase t tedy můžeme zapsat jako $y(t) = 0,2\cos 10t$. Průběh této funkce je pro ilustraci znázorněn na Obrázku 5.2.

$\triangle$

Funkce $y(t) = 0,2\cos 10t$ či např. $g(t) = 0,2\cos 5t$ popisují tzv. *harmonické kmitání*. Obecně můžeme řešení rovnice $y'' + q^2 y = 0$, kde $q^2 = \frac{k}{m}$, s podmínkou $y'(0) = 0$, zapsat ve tvaru $y = y_0 \cos qt$, kde $y(0) = y_0$. Úhlová frekvence kmitů je poté dána konstantou q, periodu kmitů můžeme zapsat jako $T = \frac{2\pi}{q}$.



Obrázek 5.2: Harmonické kmitání

V dalších případech uvážíme reálnější situaci, ve které již vystupují tlumící síly. Rovnice je tedy ve tvaru

$$my'' + cy' + ky = 0$$

a její charakteristický polynom můžeme zapsat jako $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$. Kořeny tohoto polynomu jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Nyní vezměme v úvahu všechny situace, které mohou nastat.

1. Pro $\sqrt{c^2 - 4mk} > 0$ bude mít charakteristický polynom dva různé reálné kořeny, řešení rovnice tedy bude ve tvaru

   $$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

   Vzhledem k tomu, že m, k a c jsou kladná čísla, bude $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$ a oba kořeny rovnice budou záporné. V tomto případě tedy nedojde ke kmitání. Tento případ silně tlumeného neharmonického pohybu (tj. $c^2 > 4mk$) ukážeme v Příkladu 5.4.

2. Pro $\sqrt{c^2 - 4mk} = 0$ bude mít charakteristický polynom dvojnásobný reálný kořen, řešení rovnice tedy bude ve tvaru

   $$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

   Ani v tomto případě, který nazýváme tzv. *kritický útlum* (tj. $c^2 = 4mk$), nedojde ke kmitání, což ukážeme v Příkladu 5.5.

3. Pro $\sqrt{c^2 - 4mk} < 0$ bude mít charakteristický polynom dvojici komplexních kořenů. Řešení rovnice tedy bude ve tvaru

   $$y = \mathrm{e}^{(-c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t),$$

kde $\omega = \frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$. Tento případ tzv. *tlumených kmitů* je nejčastější a nejzajímavější z těchto variant. Tlumené kmitání ukážeme v Příkladu 5.6.

Příklad 5.4. Silně tlumený neharmonický pohyb
Uvažme stejnou pružinu jako v předchozím příkladu se závažím o hmotnosti 0,1 kg, kterou opět s vynaložením síly 2 N natáhneme o 0,2 metru. Na pružinu ale zároveň působí tlumící síla taková, že konstanta $c = 2,5$. Najděte pozici závaží v čase, jestliže víte, že pružina je vypuštěna s počáteční rychlostí 0,5 metru za sekundu.

Řešení. Ze zadání sestavíme diferenciální rovnici ve tvaru

$$0,1y'' + 2,5y' + 10y = 0 \qquad \text{neboli} \qquad y'' + 25y' + 100y = 0,$$

kde k je opět rovno 10. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 25\lambda + 100 = 0$ má dva různé reálné kořeny, neboť $D = 25^2 - 4 \cdot 100 = 225 > 0$. Tyto kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{-25 \pm 15}{2}$. Řešení tedy můžeme zapsat jako

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-20t}.$$

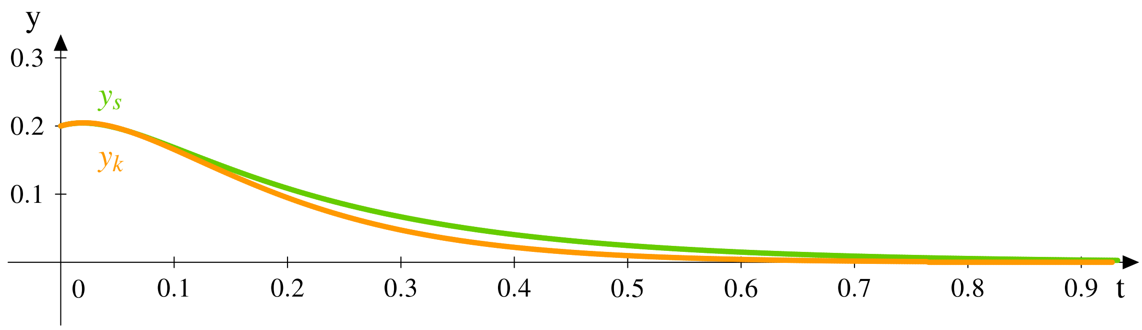
Hodnoty konstant c_1 a c_2 získáme s využitím podmínek $y(0) = 0,2$ a $y'(0) = 0,5$. Řešením soustavy

$$0,2 = c_1 + c_2 \qquad \text{a} \qquad 0,5 = -5c_1\mathrm{e}^0 - 20c_2\mathrm{e}^0$$

dostaneme $c_1 = 0,3$ a $c_2 = -0,1$. Řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y = 0,3\,\mathrm{e}^{-5t} - 0,1\,\mathrm{e}^{-20t}.$$

Průběh této funkce (označené jako y_s) je znázorněn na Obrázku 5.3. △



Obrázek 5.3: Silně tlumený neharmonický pohyb a kritický útlum

Příklad 5.5. Kritický útlum
Uvažme opět pružinu se závažím z Příkladu 5.3. Konstanta tlumící síly je v tomto případě $c = 2$. Najděte pozici závaží v čase, jestliže víte, že pružina je vypuštěna s počáteční rychlostí 0,5 metru za sekundu.

Řešení. Při řešení tohoto příkladu postupujeme obdobně jako v Příkladu 5.4, přičemž rovnice je ve tvaru

$$y'' + 20y' + 100y = 0.$$

Charakteristický polynom

$$\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$$

má dvojnásobný kořen $\lambda = -10$, neboť $D = 20^2 - 400 = 0$. Řešení rovnice tedy můžeme zapsat jako

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-10t} + c_2 t \mathrm{e}^{-10t}.$$

Hodnoty konstant c_1 a c_2 dopočítáme z podmínek $y(0) = 0,2$ a $y'(0) = 0,5$, čímž získáme

$$c_1 = 0,2 \qquad \text{a} \qquad c_2 = 2,5.$$

Hledané řešení tedy je

$$y(t) = 0,2\mathrm{e}^{-10t} + 2,5t\mathrm{e}^{-10t}.$$

Graf řešení je v tomto případě velmi podobný grafu řešení předchozího příkladu, funkce označená y_k je znázorněna na Obrázku 5.3. Ani v tomto případě nebude pružina kmitat, pouze se vrátí do své původní polohy.

$\triangle$

Příklad 5.6. Tlumené kmitání

Uvažme nyní pružinu se závažím o hmotnosti 1 kg, kterou z původní délky 0,5 metru natáhneme na 1 metr s využitím síly 13 N. Jestliže víte, že $c = 2$, najděte rovnici pro polohu závaží v čase. Porovnejte situaci, ve které je pružina vypuštěna s počáteční rychlostí 0,5 metru za sekundu, s případem, ve které je vypuštěna s nulovou rychlostí.

Řešení. Obdobně jako v předchozích příkladech označme $y(t)$ polohu závaží v čase t měřeném v sekundách. Ze zadání pak sestavíme rovnici, která je nyní ve tvaru

$$y'' + 2y' + 26y = 0,$$

neboť z rovnosti $ks = 13$ a $s = 0,5$ plyne $k = 26$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů, protože $D = 4 - 4 \cdot 26 = -100 < 0$. Tyto kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -1 \pm 5i$ a řešení rovnice tedy můžeme zapsat jako

$$y = \mathrm{e}^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t).$$

Hodnoty konstant c_1 a c_2 najdeme nejprve pro případ, kdy $y(0) = 0,5$ a $y'(0) = 0,5$. Řešením soustavy získáme

$$c_1 = 0,5 \qquad \text{a} \qquad c_2 = 0,2,$$

hledané obecné řešení tedy můžeme zapsat jako

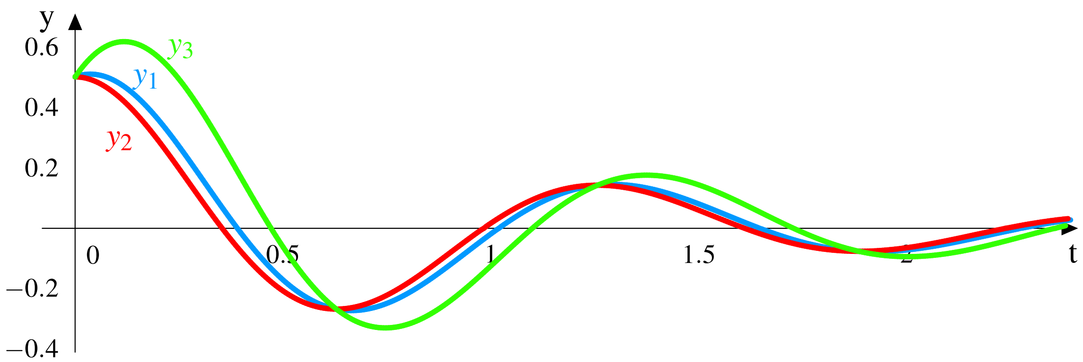
$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}(0,5 \cos 5t + 0,2 \sin 5t).$$

Vypustíme–li pružinu s nulovou počáteční rychlostí, tj. $y'(0) = 0$, dostaneme hodnoty konstant $c_1 = 0,5$ a $c_2 = 0,1$, řešení bude tedy ve tvaru

$$y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}(0,5 \cos 5t + 0,1 \sin 5t).$$

Oba tyto případy jsou ilustrovány na Obrázku 5.4. V grafu je zároveň pro zajímavost znázorněna funkce $y_3(t) = \mathrm{e}^{-t}(0,5 \cos 5t + 0,5 \sin 5t)$, která odpovídá výše uvedené pružině v případě, že $y'(0) = 2$.

$\triangle$



Obrázek 5.4: Tlumené kmity

Posledním případem kmitů, který zde bude uvažován, jsou tzv. *vynucené* či *nucené kmity*. Situaci, ve které na pružinu zároveň působí nějaká vnější síla $F(t)$, můžeme pomocí Newtonova druhého zákona zapsat jako

$$my'' + cy' + ky = F(t).$$

Tato síla je obvykle modelována pomocí funkce $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$, kde $\omega_0 \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$, což si blíže objasníme v následujícím příkladu a komentáři.

Příklad 5.7. Vynucené kmity
Vyřešte obecně rovnici nucených kmitů v případě, že $c = 0$ a $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$.

Řešení. Rovnice, kterou chceme vyřešit, je ve tvaru

$$my'' + ky = F_0 \cos \omega_0 t. \tag{5.10}$$

Řešení přidružené homogenní části je, obdobně jako v Příkladu 5.3, ve tvaru

$$y_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, neboť kořeny odpovídající charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Nyní metodou neurčitých koeficientů najdeme partikulární řešení rovnice nehomogenní. Toto řešení bude ve tvaru

$$y_p = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t.$$

Derivováním pak získáme

$$y_p' = \omega_0 A \cos \omega_0 t - \omega_0 B \sin \omega_0 t \quad \text{a} \quad y_p'' = -\omega_0^2 A \sin \omega_0 t - \omega_0^2 B \cos \omega_0 t.$$

Dosazením do rovnice (5.10) dostaneme rovnici

$$A(k - m\omega_0^2) \sin \omega_0 t + B(k - m\omega_0^2) \cos \omega_0 t = F_0 \cos \omega_0 t,$$

ze které plyne

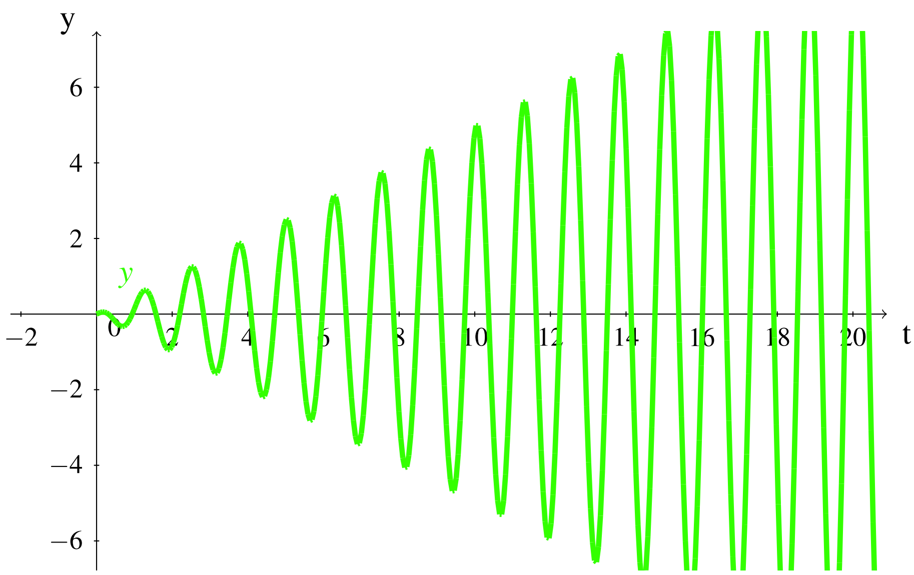
$$A = 0 \quad \text{a} \quad B = \frac{F_0}{k - m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \omega_0^2)} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Řešení rovnice tedy můžeme zapsat jako

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t.$$

$\triangle$

V případě, že se frekvence vnější síly rovná přirozené frekvenci systému, tj. $\omega = \omega_0$, jsou výsledkem vibrace o velké amplitudě. Tento jev se nazývá *rezonance*. Rezonance pro funkci $y(t) = 0,5t \cos 5t$ je pro ilustraci znázorněna na Obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Rezonance

Zajímavostí je, že rezonance může být příčinou pádu mostu, jako tomu bylo např. v Brougtonu (ve Velké Británii) v roce 1831 či v Ostravě v roce 1886, viz [45]. Při přecházení pěší jednotky vojáků se oba mosty rozhýbaly a spadly. Pád mostu v Ostravě vedl v Rakousku–Uhersku k vydání nařízení, že vojákům přecházejícím most musí být vydán rozkaz zrušit krok.

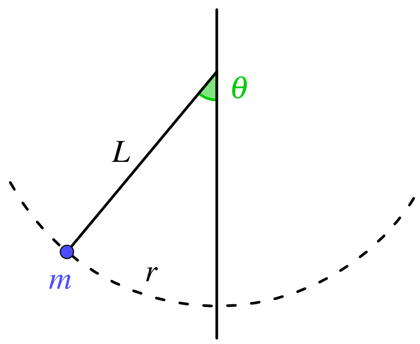
V následujících příkladech se podíváme na další fyzikální aplikace, jako je např. matematické kyvadlo, volný pád s odporem vzduchu či RLC obvod. Tyto příklady jsou inspirovány příklady z [33] a [67]. Dalšími zdroji příkladů v této kapitole jsou [1], [25] a [69].

Příklad 5.8. Matematické kyvadlo

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na tenkém vlákně, jehož hmotnost je zanedbatelná. Označme $\theta = \theta(t)$ úhel, který popisuje polohu kyvadla v čase t. Matematické kyvadlo je znázorněno na Obrázku 5.6. Na hmotný bod působí tíhová síla a tahová síla vlákna. Sílu působící na těleso můžeme zapsat jako $F = -mg \sin \theta$, kde m je hmotnost, g je gravitační zrychlení. Podle Newtonova druhého zákona platí $F = ma$, a tedy $a = -g \sin \theta$. Označme L délku vlákna. Okamžité zrychlení a souvisí se změnou úhlu θ podle vzorce obloukové délky. Označme r délku oblouku, pak $r = L\theta$. Rychlost můžeme zapsat jako $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, a zrychlení je $a = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$. Z těchto informací sestavíme pohybovou rovnici kyvadla

$$L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta, \qquad \text{neboli} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Označme $\omega := \sqrt{\frac{g}{L}}$, tato konstanta se nazývá frekvence kyvadla. Pro malé θ můžeme použít aproximaci $\sin\theta \approx \theta$. S využitím této aproximace je pohybová rovnice lineární. Vyřešte pohybovou rovnici nejprve obecně a poté pro hodnoty $L = 1$ metr, $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$ a $v(0) = \frac{\pi}{4}$ za sekundu. Jaká je maximální hodnota θ? Za jak dlouho bude poprvé $\theta = 0$? Jak dlouho trvá jeden kmit kyvadla?



Obrázek 5.6: Matematické kyvadlo

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, obecné řešení je tedy

$$\theta(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t.$$

Ze soustavy rovnic

$$\frac{\pi}{8} = \theta(0) = c_1\cos 0 + c_2\sin 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\pi}{4} = \theta'(0) = -c_1\omega\sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t,$$

získáme hodnoty konstant $c_1 = \frac{\pi}{8}$ a $c_2 = \frac{\pi}{4\omega}$. Pohybová rovnice pro matematické kyvadlo ze zadání je

$$\theta(t) = \frac{\pi}{8}\cos\omega t + \frac{\pi}{4\omega}\sin\omega t.$$

Maximální hodnotu θ najdeme jako nulový bod θ'. Z výpočtu hodnot konstant již víme, že derivace θ je

$$\theta' = -\frac{\pi}{8}\omega\sin\omega t + \frac{\pi}{4}\cos\omega t = 0.$$

Řešení této rovnice je

$$\frac{2}{\omega} = \operatorname{tg}\omega t, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad \omega t = \operatorname{arctg}\frac{2}{\omega} + n\pi \doteq 0{,}5685 + n\pi.$$

Označme t_0 čas, který odpovídá této rovnosti pro $n = 0$, tj. $t_0 \doteq 0{,}1816$. Ověření toho, že jde o maximum, získáme druhou derivací, tj.

$$\theta''(t_0) = -\omega^2\frac{\pi}{8}\cos\omega t_0 - \omega\frac{\pi}{4}\sin\omega t_0 < 0.$$

Maximální úhel θ_{max} je tedy

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{8}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}\sin\operatorname{arctg}\frac{2}{\omega} \doteq 0{,}466\ \text{rad} \doteq 26{,}7^\circ.$$

Čas, ve kterém bude θ poprvé 0 (tj. kyvadlo se poprvé dostane do svislé polohy), získáme vyřešením rovnice

$$0 = \frac{\pi}{8}\cos\omega t + \frac{\pi}{4\omega}\sin\omega t.$$

Obdobně jako v předchozí části úlohy můžeme rovnici upravit na

$$-\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}\omega t, \qquad \text{z čehož úpravou} \qquad \omega t = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega}{2}\right) + n\pi.$$

Pro $n = 1$ je tento čas roven $t_1 \doteq 0{,}68337$ sekund. Kyvadlo se poprvé dostane do svislé polohy v tomto čase. Délku trvání jednoho kmitu můžeme získat např. následující úvahou. Jestliže víme, že kyvadlo bude poprvé ve svislé poloze v čase $t_1 = \frac{\operatorname{arctg}(-\frac{\omega}{2})+\pi}{\omega}$ a podruhé v čase $t_2 = \frac{\operatorname{arctg}(-\frac{\omega}{2})+2\pi}{\omega}$, můžeme délku trvání půl kmitu (označme $\frac{T}{2}$) získat jako rozdíl těchto časů, tj.

$$\frac{T}{2} = \frac{\operatorname{arctg}(-\frac{\omega}{2}) + 2\pi}{\omega} - \frac{\operatorname{arctg}(-\frac{\omega}{2}) + \pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

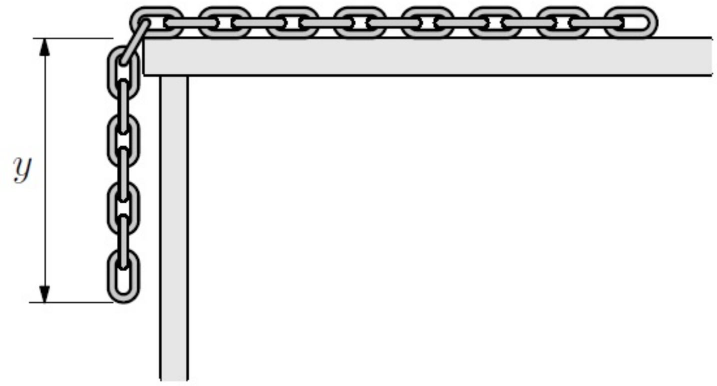
Doba kmitu kyvadla T je tedy v našem případě

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8}} \doteq 2{,}0071\ \text{sekundy}.$$

△

Příklad 5.9. Padající řetěz

Řetěz o délce $l = 5$ metrů klouže z hladké (horizontálního) střechy. Těsně před tím, než došlo k pohybu řetězu ze střechy, visel dolů konec řetězu o délce $a = 0{,}5$ m. Za jak dlouho sklouzne dolů celý řetěz? Řetěz je pro ilustraci znázorněn na Obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: Padající řetěz, zdroj: [25]

Řešení. Označme $y = y(t)$ část řetězu, která visí ze střechy v čase t měřeném v sekundách, m hmotnost řetězu. Na tento řetěz působí tíhová síla, ve vodorovné části řetězu působí proti tíhové síle reakce podložky, takže tíhová síla působící na tuto část řetězu nemá pohybové účinky. Zajímá nás tedy tíhová síla, která působí na svislou část řetězu a způsobuje pohyb. Tu můžeme zapsat jako $F = \frac{m}{l}yg$, kde g je gravitační zrychlení. Podle Newtonova druhého zákona platí pro sílu F rovnost $F = my''$, z těchto dvou vztahů dostaneme rovnici

$$my'' = \frac{m}{l}yg \quad \text{neboli} \quad y'' - \frac{g}{l}y = 0.$$

Charakteristická rovnice ve tvaru

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$. Obecné řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y = c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Dosazením podmínek $y(0) = a = 0,5$ a $y'(0) = 0$ dostaneme hodnoty konstant c_1 a c_2 vyřešením soustavy rovnic

$$0,5 = c_1 + c_2 \quad \text{a} \quad 0 = \sqrt{\frac{g}{l}}c_1 + \left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\right)c_2.$$

Získáme tedy $c_1 = c_2 = 0,25$. Řešení nyní můžeme zapsat jako

$$y(t) = 0,25\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right). \tag{5.11}$$

Z této rovnice vyjádříme čas úpravou a vynásobením výrazem $4\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$, máme tedy

$$4y\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)^2 - 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice pro $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ má dvě řešení

$$\mathrm{e}_{1,2}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = \frac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 4}}{2} = 2y \pm \sqrt{4y^2 - 1}.$$

Pro náš výpočet je důležitý čas, pro který platí $t > 0$. Připusťme, že platí rovnost

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} = 2y - \sqrt{4y^2 - 1},$$

pak můžeme s využitím identity (5.11) psát, že

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} = 2y + \sqrt{4y^2 - 1}.$$

V tomto případě je tedy

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} < \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} \quad \text{neboli} \quad \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} < 1,$$

což je spor, neboť tato nerovnost je splněna pouze pro $t < 0$. Řešení, ve kterém je $t > 0$, je tedy

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} = 2y + \sqrt{4y^2 - 1}.$$

Tuto rovnici můžeme upravit na

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ln(2y + \sqrt{4y^2 - 1}).$$

Z tohoto obecného řešení již můžeme najít čas t_0, ve kterém celý řetěz spadne, což je v případě řetězu dlouhého 5 metrů

$$t_0 = \sqrt{\frac{5}{9{,}8}}\ln(2 \cdot 5 + \sqrt{4 \cdot 5^2 - 1}) \doteq 2{,}14 \text{ sekundy}.$$

△

Příklad 5.10. Parašutistka

Parašutistka, která má i s padákem hmotnost 80 kg, padá dostatečně dlouho se zavřeným padákem tak, že dosáhne své první mezní rychlosti (označme v_1), ve které je odporová síla rovna síle vztlakové. Předpokládejme, že odpor vzduchu má velikost $k_i v_i$ pro $i = 1, 2$, přičemž stejně jako v Příkladu 2.3 uvažujme $k_1 = 15$ a $k_2 = 100$ (tyto konstanty jsou uvažovány v kilogramech na sekundu). Za těchto předpokladů určete, v jaké minimální výšce musí parašutistka otevřít padák, aby při dopadu byla její rychlost maximálně 101 % její nové mezní rychlosti (označme v_2).

Řešení. Označme $y = y(t)$ vertikální vzdálenost měřenou od bodu, kdy parašutistka otevře padák (tento moment označme $t = 0$). Uvažujme čas v sekundách. Newtonův druhý zákon říká, že $F = ma$. Stejně jako v Příkladu 2.3 můžeme tedy psát

$$mg - kv = ma, \quad \text{přičemž} \quad v = \frac{\mathrm{d}y}{dt} \quad \text{a} \quad a = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2},$$

odporovou konstantu budeme nejprve obecně značit k. Diferenciální rovnice 2. řádu je tedy

$$mg - ky' = my'' \quad \text{neboli} \quad y'' + \frac{k}{m}y' = g.$$

Vyřešme nejprve přidruženou homogenní rovnici $y'' + \frac{k}{m} y' = 0$. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$. Řešení přidružené homogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$y_h(t) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice můžeme najít pomocí metody neurčitých koeficientů, neboť na pravé straně rovnice je polynom nultého stupně. Nula je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení tedy bude ve tvaru $y_p = at$. Derivováním postupně dostaneme $y_p' = a$ a $y_p'' = 0$. Dosazením do nehomogenní rovnice získáme

$$0 + \frac{k}{m}a = g, \qquad \text{a tedy} \qquad a = \frac{mg}{k}.$$

Partikulární řešení je $y_p = \frac{mg}{k}t$. Nyní již můžeme zapsat obecné řešení nehomogenní rovnice jako

$$y(t) = y_h + y_p = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t.$$

S využitím počátečních podmínek $y(0) = 0$ a $y'(0) = v_1$ získáme soustavu rovnic

$$0 = y(0) = c_1 + c_2 \qquad \text{a} \qquad v_1 = y'(0) = c_2\left(-\frac{k}{m}\right) + \frac{mg}{k}.$$

Jejím řešením získáme hodnoty konstant $c_1 = \frac{m}{k}\left(v_1 - \frac{mg}{k}\right)$ a $c_2 = -\frac{m}{k}\left(v_1 - \frac{mg}{k}\right)$. Řešení počátečního problému tedy můžeme zapsat jako

$$y(t) = \frac{mg}{k}\left[t + \left(\frac{v_1}{g} - \frac{m}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)\right] \tag{5.12}$$

a pro rychlost $v = y'$ parašutistky t vteřin po otevření padáku máme vztah

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left[1 + \left(\frac{v_1 k}{mg} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right]. \tag{5.13}$$

Minimální výšku, ve které musí parašutistka otevřít padák, dostaneme dosazením hodnoty $v = 1{,}01 v_2$ do rovnice (5.13), čímž získáme

$$1{,}01 v_2 = \frac{mg}{k}\left[1 + \left(\frac{v_1 k}{mg} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right].$$

Z této rovnice si nyní vyjádříme čas, tj.

$$\frac{1{,}01 v_2 k}{mg} - 1 = \left(\frac{v_1 k}{mg} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

z čehož plyne

$$t = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{\frac{1{,}01 v_2 k}{mg} - 1}{\frac{v_1 k}{mg} - 1}\right) = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{\frac{v_1 k}{mg} - 1}{\frac{1{,}01 v_2 k}{mg} - 1}\right).$$

Pro mezní rychlost platí, že vztlaková síla je rovna síle odporové, můžeme tedy psát, že $v_2 k = mg$. Dosazením této rovnosti do výrazu pro čas dostaneme

$$t = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{\frac{v_1 k}{mg} - 1}{0,01}\right).$$

Tento čas nyní dosadíme do rovnice (5.12), čímž obdržíme požadovanou minimální výšku, ve které musí parašutistka padák otevřít, což je

$$y = \frac{mg}{k}\left[\frac{m}{k} \ln\left(\frac{\frac{v_1 k}{mg} - 1}{0,01}\right) + \left(\frac{v_1}{g} - \frac{m}{k}\right)\left(1 - \frac{0,01}{\frac{v_1 k}{mg} - 1}\right)\right].$$

Pro konkrétní hodnoty $m = 80$, $k = k_2 = 100$ a $g = 9,8$ vypočteme nejprve mezní rychlosti volného pádu

$$v_1 = \frac{mg}{k_1} = \frac{80 \cdot 9,8}{15} \doteq 52,27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{a} \qquad v_2 = \frac{mg}{k_2} = \frac{196}{25} = 7,84\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Dosazením těchto údajů a úpravou získáme minimální výšku y_{min}, pro kterou platí

$$y_{min} = \frac{196}{25}\left[\frac{80}{100} \ln\left(\frac{\frac{100}{15} - 1}{0,01}\right) + \left(\frac{80}{15} - \frac{80}{100}\right)\left(1 - \frac{0,01}{\frac{100}{15} - 1}\right)\right] \doteq 75,24 \text{ metru.}$$

△

Příklad 5.11. Radioaktivní odpad
Jeden ze způsobů uchování radioaktivního odpadu je jeho uskladnění v zapečetěných barelech, které jsou následně vhozeny do moře. Jeden z problémů tohoto způsobu je, že barel, který narazí na mořské dno, by mohl prasknout. Bylo experimentálně zjištěno, že barel může prasknout, pokud narazí na dno rychlostí větší než 12 metrů za sekundu. Najděte maximální hloubku vody, do které je možné barel vypustit tak, že se nerozbije. Uvažujte konkrétní příklad barelu, jehož objem je 0,208 m^3, hmotnost je 239 kg. Barel je vypuštěn s nulovou počáteční rychlostí z úrovně mořské hladiny. Uvažujte dále hustotu mořské vody $\rho = 1021$ kg/m^3, odporová konstanta $k = 1,18$.

Řešení. Obdobně jako v předchozím příkladu nejprve sestavíme diferenciální rovnici. Označme $y = y(t)$ vzdálenost barelu od hladiny v čase t měřeném v sekundách. Na barel, který se potápí, působí ve vodě tři síly, a to síla gravitační $F_g = mg$, síla odporová $F_o = ky'$ a síla vztlaková $F_{vz} = V\rho g$, kde V značí objem tělesa, ρ hustotu kapaliny a g gravitační zrychlení. Ze znalosti Newtonova druhého zákona pak můžeme psát

$$ma = my'' = mg - ky' - V\rho g,$$

přičemž uvažujeme y kladné ve směru dolů. Rovnici tedy můžeme zapsat jako

$$y'' + \frac{k}{m} y' = g - \frac{V\rho g}{m}. \tag{5.14}$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu, kterou vyřešíme nám již známým způsobem. Nejprve najdeme řešení přidružené homogenní rovnice $y'' + \frac{k}{m}y' = 0$. Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

jsou $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ a $\lambda_2 = 0$. Řešení přidružené homogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$y_h = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} + c_2.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou neurčitých koeficientů. Pravá strana je v tomto případě polynom nultého stupně a nula je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice. Partikulární řešení tedy bude ve tvaru $y_p = at$. Pro toto řešení platí $y_p' = a$ a $y_p'' = 0$. Dosazením do rovnice (5.14) dostaneme

$$\frac{k}{m}a = g - \frac{V\rho g}{m}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad a = \frac{mg - V\rho g}{k}.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = \frac{tg(m - V\rho)}{k}.$$

Obecné řešení rovnice (5.14) můžeme zapsat jako

$$y(t) = y_h + y_p = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} + c_2 + \frac{tg(m - V\rho)}{k}.$$

Hodnoty konstant c_1 a c_2 získáme s využitím počátečních podmínek $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$. Vyřešením soustavy rovnic

$$0 = c_1 + c_2 \qquad \text{a} \qquad 0 = -\frac{k}{m}c_1 + \frac{g(m - V\rho)}{k}$$

dostaneme hodnoty $c_1 = \frac{mg}{k^2}(m - V\rho)$, $c_2 = -\frac{mg}{k^2}(m - V\rho)$, hledané řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y(t) = \frac{mg}{k^2}(m - V\rho)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k^2}(m - V\rho) + \frac{tg(m - V\rho)}{k} = \frac{g(m - V\rho)}{k}\left(\frac{m}{k}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k} + t\right).$$

Nyní najdeme čas t_1, ve kterém je rychlost $y' = v = 12$, což je maximální čas, po který může barel padat a nerozbít se o dno. Hledáme tedy t_1, které vyhovuje rovnici

$$y'(t) = 12 = \frac{g(m - V\rho)}{k}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{kt_1}{m}} + 1\right),$$

což je

$$t_1 = -\frac{m}{k}\ln\left[\frac{12k}{g(m - V\rho)}\right] = -\frac{239}{1,18}\ln\left[1 - \frac{12 \cdot 1,18}{9,8(239 - 0,208 \cdot 1021)}\right] \doteq 11,298 \text{ sekundy}.$$

Za čas t_1 překoná barel vzdálenost

$$y(t_1) \doteq \frac{9,8(239 - 0,208 \cdot 1021)}{1,18}\left(\frac{239}{1,18}\mathrm{e}^{-\frac{1,18 \cdot 11,298}{239}} - \frac{239}{1,18} + 11,298\right) \doteq 68,4175 \text{ metru}.$$

Tato vzdálenost odpovídá maximální hloubce moře, do které můžeme popsaný barel z hladiny vypustit tak, aby při dopadu na dno dosáhl maximálně rychlosti 12 metrů za sekundu a nerozbil se.

△

Příklad 5.12. Ochlazování
Teplota tělesa $y = y(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Najděte $y(t)$, jestliže víte, že $y(0) = 50$ a $y(8\ln 4) = 25$. Za kolik minut se míra ochlazování zmenší pod 1 °C za minutu? Kolik stupňů má v tomto čase těleso?

Řešení. Uvažujme čas v minutách. Diferenciální rovnice

$$4y'' + y' = 0$$

má charakteristickou rovnici $4\lambda^2 + \lambda = 0$. Kořeny této rovnice jsou $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ a $\lambda_2 = 0$. Řešení rovnice je tedy ve tvaru $y = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + c_2$. S využitím počátečních podmínek získáme hodnoty konstant c_1 a c_2 ze soustavy rovnic

$$50 = c_1 + c_2 \qquad \text{a} \qquad 25 = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}8\ln 4} + c_2.$$

Řešením této soustavy jsou $c_1 = \frac{80}{3}$ a $c_2 = \frac{70}{3}$. Teplotu $y(t)$ tedy můžeme zapsat jako

$$y(t) = \frac{80}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + \frac{70}{3}.$$

Změna teploty je rovna derivaci $y(t)$, tj.

$$y' = \frac{80}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{20}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

Míra ochlazování bude rovna 1 °C za minutu (tj. $y' = -1$) v čase t_0, který vyhovuje rovnici

$$-1 = -\frac{20}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t_0}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad t_0 = -4\ln\frac{3}{20} \doteq 7{,}5885.$$

Pro $t > t_0$ bude míra ochlazování menší než 1 °C za minutu. V čase t_0 má těleso teplotu

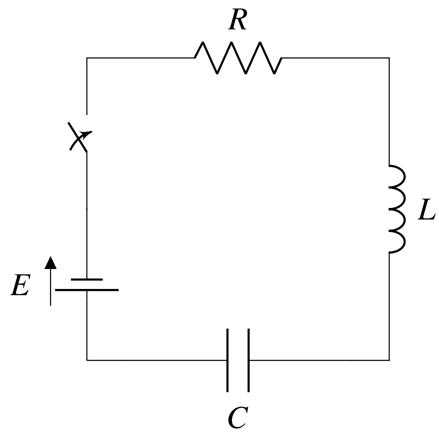
$$y(t_0) = \frac{80}{3}\mathrm{e}^{\ln\frac{3}{20}} + \frac{70}{3} = \frac{82}{3}\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

△

V předchozích dvou příkladech bychom se ke stejným výsledkům dostali i jiným postupem, a to zavedením substituce $z = y'$, kterým bychom rovnice převedli na autonomní rovnice 1. řádu. Např. v Příkladu 5.12 bychom dostali rovnice ve tvaru $4z' + z = 0$, kterou bychom vyřešili integrováním. Výsledné y bychom poté získali integrací z. Ověření toho, že tento alternativní postup vede ke stejným výsledkům, ponecháme na čtenáři.

Příklad 5.13. Elektrický obvod II (RLC obvod)

V Příkladu 2.7 jsme uvažovali elektrický obvod s rezistorem R a cívkou L a zdrojem napětí E (např. baterií nebo generátorem). Nyní uvažme obvod, jehož schéma je na obrázku. Oproti Příkladu 2.7 je v něm navíc sériově zapojený kondenzátor C, jehož náboj v čase t označíme $Q = Q(t)$. Proud poté můžeme zapsat jako $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Stejně jako v Příkladu 2.7 je pokles napětí způsobený zapojením rezistoru roven RI, zatímco úbytek napětí, který vznikne zapojením cívky, je $L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$. Zapojení kondenzátoru způsobí pokles napětí Q/C.



Podle Kirchhofova zákona je úbytek napětí roven napětí zdroje. S využitím těchto znalostí sestavte rovnice 2. řádu pro náboj a proud a najděte Q a I pro obvod, ve kterém je $R = 20\Omega$, $L = 1\mathrm{H}$, $C = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{F}$ a $E = E(t) = 100\cos 10t$, jestliže víte, že jak počáteční náboj, tak počáteční proud jsou rovny nule.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 2.7 můžeme sestavit rovnici

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{5.15}$$

Zároveň víme, že $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, rovnici tedy můžeme přepsat na

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = E(t),$$

což je diferenciální rovnice 2. řádu. Rovnici 2. řádu pro proud získáme derivací rovnice (5.15) podle času, tj.

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = E'(t).$$

Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici pro náboj Q. Pro hodnoty ze zadání máme rovnici

$$Q'' + 20Q' + 200Q = 100\cos 10t, \tag{5.16}$$

takže charakteristická rovnice pro přidruženou homogenní rovnici je

$$\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0.$$

Tato rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm 20i}{2} = -10 \pm 10i.$$

Řešení přidružené homogenní rovnice je ve tvaru

$$Q_h = \mathrm{e}^{-10t}\left(c_1\cos 10t + c_2\sin 10t\right).$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou neurčitých koeficientů. Sestavme nejprve rovnici

$$Q_p = A\cos 10t + B\sin 10t\,.$$

První a druhou derivací potom postupně získáme

$$Q'_p = -10A\sin 10t + 10B\cos 10t \quad \text{a} \quad Q''_p = -100A\cos 10t - 100B\sin 10t\,.$$

Dosazením těchto výrazů do rovnice (5.16) a následnou úpravou dostaneme rovnici

$$100A\cos 10t + 100B\sin 10t - 200A\sin 10t + 200B\cos 10t = 100\cos 10t\,,$$

ze které získáme soustavu rovnic pro koeficienty, po úpravě tedy máme

$$A + 2B = 1 \qquad \text{a} \qquad B - 2A = 0.$$

Řešení této soustavy jsou $A = \frac{1}{5}$ a $B = \frac{2}{5}$, partikulární řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$Q_p = \frac{1}{5}\left(\cos 10t + 2\sin 10t\right).$$

Obecné řešení rovnice (5.16) je tedy

$$Q(t) = Q_h + Q_p = \mathrm{e}^{-10t}\left(c_1\cos 10t + c_2\sin 10t\right) + \frac{1}{5}\left(\cos 10t + 2\sin 10t\right). \tag{5.17}$$

S využitím podmínky $Q(0) = 0$ dostaneme

$$0 = c_1 + \frac{1}{5}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c_1 = -\frac{1}{5}.$$

Hodnotu konstanty c_2 získáme s využitím znalosti $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ a podmínky $I(0) = 0$. Derivací rovnosti (5.17) podle času a úpravou dostaneme výraz

$$I = \mathrm{e}^{-10t}[(-10c_1 + 10c_2)\cos 10t + (-10c_1 - 10c_2)\sin 10t] - 2\sin 10t + 4\cos 10t.$$

Pro konstantu c_2 platí rovnost

$$0 = \left[-10\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) + 10c_2\right] + 4, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad c_2 = -\frac{3}{5}.$$

Náboj v čase t je tedy

$$Q(t) = \mathrm{e}^{-10t}\left(-0{,}2\cos 10t - 0{,}6\sin 10t\right) + \frac{1}{5}\left(\cos 10t + 2\sin 10t\right),$$

z čehož derivováním dostaneme proud

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathrm{e}^{-10t}\left(-4\cos 10t + 8\sin 10t\right) - 2\sin 10t + 4\cos 10t = \\ &= 4\cos 10t(1 - \mathrm{e}^{-10t}) + 2\sin 10t(4\mathrm{e}^{-10t} - 1). \end{aligned}$$

△

Předchozí slovní úlohy vycházely z aplikací z přírodních věd, a to převážně z fyziky. V následujících třech příkladech se podíváme na další možné použití rovnic druhého řádu, a to z oblastí ekonomie (Příklad 5.14), modelování populační dynamiky (Příklad 5.15) a lékařství (Příklad 5.16). Zdroje následujících příkladů jsou [7], [39], [47], [60] a [69].

Příklad 5.14. Cenová politika
Vezměme nyní v úvahu společnost, která volí cenu svého výrobku v závislosti na svých zásobách. V době, kdy je o produkt velký zájem a úroveň zásob se zmenšuje, společnost zvýší cenu svého výrobku, v době, kdy je malá poptávka, cenu naopak sníží. Uvažme společnost, jejíž optimální úroveň zásob je Z_0 kusů zboží. Společnost, která chce své zásoby udržovat co nejblíže této úrovni, tedy praktikuje výše popsanou cenovou politiku, kterou můžeme matematicky popsat rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -k\big[Z(t) - Z_0\big], \tag{5.18}$$

kde $Z = Z(t)$ je úroveň zásob v čase t, P je cena a $k > 0$ je konstanta úměrnosti. K předpovědi prodejů $S = S(t)$ používá vedení společnosti rovnici

$$S = 600 - 62P - 12\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

Úroveň produkce $Q = Q(t)$ určuje vedení společnosti podle

$$Q = 250 - 12P.$$

Tato strategie společnosti zajistí, že úroveň zásob se bude pohybovat kolem Z_0. Dalším cílem společnosti je udržet cenu dlouhodobě stabilní, neboť časté výrazné přeceňování by mohlo odradit zákazníky. Změnu zásob můžeme zapsat jako $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = Q(t) - S(t)$. S využitím výše uvedených informací sestavte rovnici druhého řádu pro P, kterou dále vyřešte. Kolem jaké hodnoty bude cena v dlouhém období oscilovat?

Řešení. Nejprve sestavíme hledanou rovnici druhého řádu pro proměnnou P. Tu získáme derivováním rovnice (5.18) podle t, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = -k\big[Q(t) - S(t)\big] = -k\left(-350 + 50P + 12\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right).$$

Rovnici tedy můžeme zapsat jako

$$P'' + 12kP' + 50kP = 350k$$

a můžeme si všimnout, že její partikulární řešení je $P = 7$. Řešení homogenní rovnice získáme pomocí charakteristické rovnice, která je ve tvaru

$$\lambda^2 + 12k\lambda + 50k = 0.$$

Kořeny této rovnice můžeme zapsat jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12k \pm \sqrt{144k^2 - 200k}}{2} = -6k \pm \sqrt{36k^2 - 50k},$$

z čehož vidíme, že mohou nastat tři případy. Pro $k > \frac{25}{18}$ má charakteristická rovnice dva různé reálné záporné kořeny. Řešení homogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$P_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

obecné řešení nehomogenní rovnice je pak

$$P(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + 7.$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda_{1,2}$ jsou záporné, řešení homogenní rovnice půjde s rostoucím časem k nule a cena se bude pohybovat v blízkosti hodnoty 7, což odpovídá požadavkům vedení společnosti na stabilitu ceny.

Pro $k = \frac{25}{18}$ má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda = -6k = -\frac{25}{3}$, řešení homogenní rovnice je

$$P_H(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice můžeme zapsat jako

$$P(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} + 7 = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{25}{3} t} + 7.$$

I v tomto případě jde výraz $e^{-\frac{25}{3} t}$ s rostoucím časem do nuly, výraz $c_2 t$ jde ovšem do nekonečna. Tuto limitu můžeme vyřešit pomocí l'Hospitalova pravidla, tj.

$$\lim_{t\to\infty} c_2 t e^{-\frac{25}{3} t} = \lim_{t\to\infty} \frac{c_2 t}{e^{\frac{25}{3} t}} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{c_2}{\frac{25}{3} e^{\frac{25}{3} t}} = 0.$$

Cena je v dlouhém období tedy opět v blízkosti hodnoty 7.

Pro $k < \frac{25}{18}$ má charakteristická rovnice dvojici komplexně sdružených kořenů. Řešení homogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$P_H(t) = e^{-6kt} (c_1 \cos t\sqrt{50k - 36k^2} + c_2 \sin t\sqrt{50k - 36k^2}),$$

obecné řešení nehomogenní rovnice můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-6kt} (c_1 \cos t\sqrt{50k - 36k^2} + c_2 \sin t\sqrt{50k - 36k^2}) + 7 = \\ &= c e^{-6kt} \sin(t\sqrt{50k - 36k^2} + \omega) + 7, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost vychází ze znalosti Poznámky 5.8. I v tomto případě bude cena oscilovat kolem hodnoty 7. Ve všech případech se v dlouhém období bude cena pohybovat kolem hodnoty 7, velikost výchylek však záleží na konkrétních hodnotách parametrů. Každopádně se společnost nemusí obávat nestability své cenové politiky.

△

Příklad 5.15. Populační model s migrací

Uvažujme dvě země, které označíme A a B. Tyto země mají stejnou přirozenou míru růstu populace $r\,\%$ za rok. Emigrace z A do B je $a\,\%$ ročně, emigrace z B do A je $b\,\%$ ročně.

Označme počáteční populace v zemích A a B jako N_A a N_B. Pro populaci v zemi A, kterou označíme $x = x(t)$, můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{rx - ax + by}{100}. \tag{5.19}$$

Pro populaci v zemi B, kterou označíme $y = y(t)$, můžeme analogicky psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{ry - by + ax}{100}. \tag{5.20}$$

Převeďte tento systém na rovnici druhého řádu pro $x = x(t)$ a vyřešte ji. Výsledek, který získáte, využijte k určení $y = y(t)$.

Řešení. Rovnici (5.19) upravíme a zderivujeme podle času, čímž získáme

$$x'' = \frac{r-a}{100}x' + \frac{b}{100}y'.$$

Dosazením výrazu pro y' pak dostaneme

$$x'' = \frac{r-a}{100}x' + \frac{b}{100}\left(\frac{ry - by + ax}{100}\right) = \frac{r-a}{100}x' + \frac{abx}{100^2} + \frac{b(r-b)y}{100^2}. \tag{5.21}$$

Z rovnice (5.19) poté můžeme $\frac{b}{100}y$ vyjádřit jako $\frac{b}{100}y = x' - \frac{r-a}{100}x$. Dosazením tohoto výrazu do rovnice (5.21) získáme

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{r-a}{100}x' + \frac{abx}{100^2} + \frac{r-b}{100}\left(x' - \frac{r-a}{100}x\right) = \\ &= \frac{2r-a-b}{100}x' + \frac{ab-(r-b)(r-a)}{100^2}x, \end{aligned} \tag{5.22}$$

což je hledaná rovnice druhého řádu, ve které x závisí pouze na čase. Označíme–li

$$k_1 = \frac{2r-a-b}{100} \quad \text{a} \quad k_2 = \frac{r(a+b-r)}{100^2},$$

rovnici (5.22) můžeme psát jako

$$x'' - k_1x' - k_2x = 0. \tag{5.23}$$

Charakteristická rovnice, která odpovídá této rovnici, je $\lambda^2 - k_1\lambda - k_2 = 0$. Její řešení můžeme obecně zapsat jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4k_2}}{2}.$$

Diskriminant této rovnice je v původních proměnných roven

$$D = k_1^2 + 4k_2 = \frac{(2r-a-b)^2 - 4(ar+br-r^2)}{100^2} = \left(\frac{a+b}{100}\right)^2,$$

řešení charakteristické rovnice jsou tedy ve tvaru

$$\lambda_1 = \frac{r}{100} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{r-a-b}{100}.$$

Obecné řešení rovnice (5.23) je tedy

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\frac{r}{100}t} + c_2 \mathrm{e}^{\frac{r-a-b}{100}t}$$

Populaci B ($y(t)$) poté můžeme s využitím rovnosti $\frac{b}{100}y = x' - \frac{r-a}{100}x$ popsat rovnicí

$$\frac{b}{100}y = \frac{c_1 r}{100}\mathrm{e}^{\frac{r}{100}t} + \frac{c_2(r-a-b)}{100}\mathrm{e}^{\frac{r-a-b}{100}t} - \frac{r-a}{100}\left(c_1 \mathrm{e}^{\frac{r}{100}t} + c_2 \mathrm{e}^{\frac{r-a-b}{100}t}\right),$$

ze které plyne

$$y(t) = \frac{a}{b}\mathrm{e}^{\frac{r}{100}t} - c_2 \mathrm{e}^{\frac{r-a-b}{100}t}.$$

Interpretace obou těchto výsledků je bez bližší znalosti konkrétních hodnot parametrů poněkud nesnadná, neboť pro různé hodnoty může dojít jak k růstu, tak k poklesu populací. △

Příklad 5.16. Cukrovka

Běžný způsob používaný při diagnostice cukrovky je tzv. glukózový toleranční test (GTT). Výsledky tohoto testu ovšem nejsou jednoduché na interpretaci a dva lékaři mohou ze stejných výsledků určit různé diagnózy. V 60. letech proto skupina vědců sestavila model, který popisuje glukózový regulační systém tak, aby bylo podle výsledků jednoduché odlišit zdravého člověka od cukrovkáře. Tento jednoduchý model vyžaduje pouze výsledky krevních testů provedených v různých časových okamžicích GTT. Důležité jsou pro něj dvě koncentrace, a to koncentrace glukózy v krvi $G = G(t)$ a čistá koncentrace hormonů $H = H(t)$. Mezi tyto hormony patří např. inzulín či kortizol. Model může být popsán soustavou rovnic

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = F_1(G,H) + J(t) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = F_2(G,H),$$

kde $F_1(G,H)$ a $F_2(G,H)$ mají spojité parciální derivace 1. řádu a $J(t)$ je externí míra, kterou se zvyšuje koncentrace glukózy v krvi. Hodnoty u pacienta, který přichází na GTT po minimálně 8 hodinách bez jídla, označíme G_0 a H_0. Toto implikuje, že $F_1(G_0,H_0) = 0$ a $F_2(G_0,H_0) = 0$. Protože nás zajímají odchylky od těchto původních hodnot, označme $g = G - G_0$ a $h = H - H_0$. Rovnice pak můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = F_1(G_0+g, H_0+h) + J(t) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = F_2(G_0+g, H_0+h). \tag{5.24}$$

Zároveň můžeme $F_1(G_0+g, H_0+h)$ zapsat jako

$$F_1(G_0+g, H_0+h) = F_1(G_0,H_0) + \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h + e_1,$$

pro $F_2(G_0+g, H_0+h)$ pak analogicky platí

$$F_2(G_0+g, H_0+h) = F_2(G_0,H_0) + \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h + e_2.$$

Hodnoty e_1 a e_2 jsou řádově menší než g a h, a tak je za předpokladu, že se G a H odchýlí od G_0 a H_0 pouze o málo, můžeme zanedbat. Rovnici (5.24) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h + J(t), \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h. \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Hodnoty výrazů

$$\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G},\ \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H},\ \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G},\ \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}$$

nejsme schopni určit, můžeme však určit jejich znaménka. Podrobnější odvození toho, že všechny tyto výrazy, až na $\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}$, jsou záporné, a další podrobnosti o modelu najde čtenář např. v [7], [39] nebo v [60]. Označme pro přehlednost

$$m_1 := \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G},\ m_2 := \frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H},\ m_3 := \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G},\ m_4 := \frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}.$$

Pro kladné konstanty m_1, m_2, m_3, m_4 pak můžeme soustavu (5.25) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -m_1 g - m_2 h + J(t), \tag{5.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = m_3 g - m_4 h. \tag{5.27}$$

V průběhu GTT jsou měřeny pouze hodnoty G, tuto soustavu tedy převedeme na rovnici 2. řádu pro proměnnou g. Derivací rovnice (5.26) podle t dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - m_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}.$$

Dosazením za $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ z rovnice (5.27) získáme

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - m_2 m_3 g + m_2 m_4 h + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}.$$

Zároveň víme, že $m_2 h = -\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - m_1 g + J(t)$ (a to z rovnice (5.26)). Rovnice v proměnné g je tedy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} &= -m_1\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - m_2 m_3 g + m_4\left[-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - m_1 g + J(t)\right] + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \\ &= -\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(m_1+m_4) - g(m_2 m_3 + m_1 m_4) + m_4 J(t) + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Označme $\alpha := \frac{m_1+m_3}{2}$, $\omega_0^2 := m_2 m_3 + m_1 m_4$ a $S(t) := m_4 J(t) + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$. V rovnici

$$g'' + 2\alpha g' + \omega_0^2 g = S(t)$$

je pravá strana nenulová pouze pro krátký časový okamžik, ve kterém není glukóza ještě vstřebána. Označíme–li $t = 0$ jako čas, ve kterém je glukóza vstřebána, můžeme model popsat homogenní rovnicí

$$g'' + 2\alpha g' + \omega_0^2 g = 0. \tag{5.28}$$

Za předpokladu $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ tuto rovnici vyřešte a najděte tak výrazy pro $g(t)$ a $G(t)$.

Označme dále tzv. přirozenou periodu $T_0 := \frac{2\pi}{\omega_0}$. Z výzkumů vyplývá, že je–li $T_0 < 4$ hodiny, jedná se o zdravého člověka, pro $T_0 > 4$ jde u pacienta o mírnou formu cukrovky. Tento model je účinný pouze pro určení mírné formy cukrovky, protože při jeho konstrukci předpokládáme malou odchylku G od G_0. S využitím této znalosti rozhodněte, zda je zdravý pacient, jehož koncentrace glukózy v krvi v čase splňuje diferenciální rovnici

$$G'' + \frac{1}{20\ \text{(min)}} G' + \frac{1}{2500\ \text{(min)}^2} G = \frac{1}{2500} \frac{75\ \text{mg glukózy}}{100\ \text{ml krve}} \tag{5.29}$$

a podmínky $G(0) = \frac{150\ \text{mg glukózy}}{100\ \text{ml krve}}$ a $G'(0) = -\alpha G(0)$, kde $\alpha \geq \frac{1}{200} \frac{1-4\mathrm{e}^{18/5}}{1-\mathrm{e}^{18/5}}$. Tuto rovnici také vyřešte.

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici (5.28), jejíž charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Kořeny této rovnice můžeme obecně zapsat jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Za předpokladu, že $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Označme $\omega^2 := \omega_0^2 - \alpha^2$. Řešení rovnice (5.28) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$g(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t) = c\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta).$$

Pro koncentraci glukózy v krvi tedy platí vztah

$$G(t) = G_0 + c\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \delta).$$

V této rovnici je 5 neznámých konstant (G_0, c, α, ω_0 a δ). Jejich hodnoty bychom získali z výsledků krevních testů provedených v průběhu GTT.

Nyní najdeme přirozenou periodu T_0 pro pacienta ze zadání. Tato perioda je dána jako $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, přičemž pro ω_0 platí, že $\omega_0^2 = \frac{1}{2500\ \text{(min)}^2}$, z čehož plyne $\omega_0 = \frac{1}{50\ \text{(min)}}$ neboli $\omega_0 = \frac{6}{5\ \text{(hod)}}$. Pro pacienta je tedy

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{3}\pi \doteq 5,24\ \text{hod}.$$

Výše uvedený model tedy předpovídá, že pacient je cukrovkář.

Zbývá vyřešit diferenciální rovnici (5.29) pro tohoto pacienta. Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je

$$\lambda^2 + \frac{1}{20}\lambda + \frac{1}{2500} = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{20} \pm \frac{3}{100}$, řešení přidružené homogenní rovnice je tedy ve tvaru

$$G_h = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{11}{50}t} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{7}{25}t}.$$

K výpočtu partikulárního řešení můžeme využít metodu neurčitých koeficientů. Partikulární řešení je ve tvaru

$$G_p = t^0 a \mathrm{e}^0 = a,$$

přičemž platí

$$\frac{1}{2500}a = \frac{3}{10000}, \qquad \text{z čehož plyne} \qquad a = \frac{3}{4}.$$

Řešení rovnice (5.29) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$G(t) = G_h + G_p = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{11}{50}t} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{7}{25}t} + \frac{3}{4}.$$

Hodnoty konstant c_1 a c_2 získáme z podmínek ze zadání, tj.

$$G(0) = 1,5 = c_1 + c_2 + 0,75, \qquad \text{a tedy} \qquad c_1 + c_2 = 0,75,$$

$$G'(0) = -1,5\alpha = -\frac{11}{50}c_1 - \frac{7}{25}c_2.$$

Řešením této soustavy dostaneme $c_1 = \frac{7}{2} - 25\alpha$ a $c_2 = -\frac{33}{12} + 25\alpha$. Řešení je tedy

$$G(t) = \left(\frac{7}{2} - 25\alpha\right) \mathrm{e}^{-\frac{11}{50}t} + \left(-\frac{33}{12} + 25\alpha\right) \mathrm{e}^{-\frac{7}{25}t} + \frac{3}{4}.$$

$\triangle$

Závěr

Práce se zabývala obyčejnými diferenciálními rovnicemi prvního a druhého řádu. Byla zde uvedena teorie k vybraným typům rovnic – konkrétně k rovnici se separovanými proměnnými, rovnici homogenní, lineární rovnici prvního i druhého řádu, Bernoulliho a exaktní rovnicí. Tyto typy odpovídají nalezeným a zařazeným aplikacím, jež jsou stěžejní částí práce. Čtenář měl možnost se naučit řešit tyto typy diferenciálních rovnic a dále postupy aplikovat při řešení slovních úloh. Z vybraných aplikací je patrné, že diferenciální rovnice se objevují v různých vědních disciplínách, a to nejen ve vědách přírodních. Závěrem bych chtěla podotknout, že tato práce pokrývá pouze část aplikací obyčejných diferenciálních rovnic, k dalšímu studiu je možné se inspirovat také v seznamu použité literatury.

Seznam použité literatury

[1] J. Banasiak, *Mathematical modelling in one dimension: an introduction via difference and differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[2] V. Barbu, *Differential equations*, New York: Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[3] M. Barenco, M. Hubank, *Modelling cell suicide* [online], 2010, [cit. 2018-05-02]. Dostupné z: https://plus.maths.org/content/os/issue55/features/barhu/index

[4] P. Ch. Biswal, *Ordinary differential equations*, druhé vydání, Phi Learning, 2012.

[5] M. R. Boelkins, J. L. Goldberg, M. C. Potter, *Differential equations with linear algebra*, Oxford University Press, New York, 2009.

[6] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, desáté vydání, Wiley, Hoboken, 2012.

[7] M. Braun, *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*, třetí vydání, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] M. Brzezina, J. Veselý, *Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy* [online], Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2012, [cit. 2018-03-30]. Dostupné z: http://docplayer.cz/37469649-Obycejne-linearni-diferencialni-rovnice-a-jejich-%20~systemy.html

[9] B. Cushman-Roisin, *Environmental Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 2014.

[10] P. Dawkins, *Differential equations* [online], 2007, [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx

[11] J. Diblík, O. Přibyl, *Matematika II* [online], Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2007, [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BA02-Matematika%20II/M03-Obycejne%20diferencialni%20rovnice%20I.pdf

[12] V. A. Dobrushkin, *Applied differential equations: the primary course*, CRC Press, Taylor & Francis, Boca Raton, 2015.

[13] V. A. Dobrushkin, *Homework, Set 1* [online], studijní materiál k předmětu APMA 0330 (Applied Mathematics I), Brown University, 2017, [cit. 2018-04-24]. Dostupné z: http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/f17/hwork33.html

[14] Z. Došlá, O. Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, třetí vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2006.

[15] Z. Došlá, P. Liška, *Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách*, Grada Publishing, Praha, 2014.

[16] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Elementary differential equations*, šesté vydání, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2008.

[17] G. N. Felder, K. M. Felder, *Mathematical Methods in Engineering and Physics* [online], [cit. 2018-03-30]. Dostupné částečně z: http://www.felderbooks.com/mathmethods/contents/home.html

[18] J. Fišer, *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2013.

[19] P. Hasil, *Přednášky z matematické analýzy III* [online], Masarykova Univerzita, 2016, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/hasil/Data/CZ/TeachMU.htm

[20] P. Hasil, P. Zemánek, *Sbírka příkladů z matematické analýzy II* [online], Masarykova univerzita, Brno, 2014, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SPzMAII_OPVK.pdf

[21] A. Himonas, A. Howard, *Calculus for Business and Social Science*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[22] M. Huard, *Differential Equations* [online], studijní materiál k předmětu Math 201-203-RE, Integral Calculus, Champlain Regional College, 2009, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: http://web2.slc.qc.ca/mh/Math203/Default.htm

[23] C. C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, druhé vydání, Springer, Berlin, 2006.

[24] P. Chvosta, *Termodynamické potenciály* [online], [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: http://kmf.troja.mff.cuni.cz/chvosta/Problems.pdf

[25] M. Jarešová, B. Vybíral, *Diferenciální rovnice: studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku.* [online], [cit. 2018-03-30]. Dostupné z http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty

[26] D. Joyner, M. Hampton, *Introductory Differential Equations using Sage* [online], 2009, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: https://www.usna.edu/Users/math/wdj/_files/documents/teach/sm212/DiffyQ/des-book-2009-11-24.pdf

[27] T. W. Judson, *The Ordinary Differential Equations Project*, 2018, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: http://faculty.sfasu.edu/judsontw/ode/odeproject-electronic.pdf

[28] V. Jungic, P. Menz, R. Pyke, *A Collection of Problems in Differential Calculus* [online], úlohy z předmětů Math 151 a Math 150, Simon Fraser University, 2011, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: https://is.muni.cz/go/Bp7jGK

[29] J. Kalas, M. Ráb, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vydavatelství Masarykovy univerzity, Brno, 1995.

[30] E. Kamke, *Über die partielle Differentialgleichung, I., $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$*, Mathematische Zeitschrift **41** (1936): 56-66.

[31] E. Kamke, *Über die partielle Differentialgleichung, II., $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$*, Mathematische Zeitschrift **42** (1937): 287-300.

[32] W. G. Kelley, A. C. Peterson, *The theory of differential equations: classical and qualitative*, druhé vydání, Springer, New York, 2010.

[33] B. Krajc, P. Beremlijski, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[34] W. Kutschera, *Radiocarbon dating of the Iceman Ötzi with accelerator mass spectrometry* [online], University of Vienna, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/20d9/b3be6466e3a6d51ddb213f9c982fdf949024.pdf

[35] R. Larson, *Calculus: early transcendental functions*, třetí vydání, Houghton Mifflin Harcourt, 2005.

[36] R. Larson, *Brief Calculus: an applied approach*, deváté vydání, Cengage Learning, Boston, 2011.

[37] R. Larson, R.P. Hostetler, B.H. Edwards, *Calculus: An Applied Approach*, sedmé vydání, Brooks Cole, Boston, 2003.

[38] Ch. Ludwin, *Blood Alcohol Content* [online], Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two: Vol. 3: Iss. 2, Article 1. 2011, [cit. 2018-03-31]. DOI:0.5038/2326-3652.3.2.1. Dostupné z http://scholarcommons.usf.edu/ujmm/vol3/iss2/1

[39] J. M. Mahaffy, *Modeling Diabetes* [online], 2010 [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/diabetes/diabetes.pdf

[40] D. Maňáková, *Diferenciální rovnice 1. řádu v ekonomii I,II* [online], Bakalářská práce, Masarykova univerzita, Brno, 2007, [cit. 2018-03-30].

[41] R. Mařík, *Diferenciální rovnice* [online], skriptum, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/preprints/Marik_Diferencialni_rovnice.pdf

[42] R. C. McKay, Studijní materiály k předmětu Math/Stat 2300 [online], Mount Allison University, Sackville, NB, 2010, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: https://www.mathstat.dal.ca/~wrebecca/math2300.html

[43] D. B. Meade, *ODE Models for the Parachute Problem* [online], Dept. of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: http://people.math.sc.edu/meade/msw2004/Parachute/sr-parachute.pdf

[44] R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of differential equations*, osmé vydání, Pearson Education, Boston, 2012.

[45] B. Navrátil, *Před sto třiceti lety se v centru Ostravy zřítil řetězový most* [online], 2016, [cit. 2018-05-03]. Dostupné z: https://is.muni.cz/go/tpSQiA

[46] O. Novotný, *Potenciálová pole*, Univerzita Karlova, Praha, 1982.

[47] R. Ogunrinde, J. Sunday, *On some models based on second order differential equations* [online], American Journal Of Scientific And Industrial Research. 3 (2012) 288-291. doi:10.5251/ajsir.2012.3.5.288.291, [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: http://www.scihub.org/AJSIR/PDF/2012/5/AJSIR-3-5-288-291.pdf

[48] Z. Pospíšil, Studijní materiál k předmětu M5858 Spojité deterministické modely I [online], 2015, [cit. 2018-04-25]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1431/podzim2015/M5858/um/EMR.pdf

[49] P. Pražák, *Diferenciální rovnice a jejich použití v ekonomii* [online], Disertační práce, Univerzita Karlova, Praha, 2006, [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/42803/

[50] P. Pták, J. Tkadlec, *The Dog-and-Rabbit Chase Revised*, Acta Polytechnica **36** (1996), 5–10.

[51] M. Ráb, *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, třetí přepracované vydání, Masarykova univerzita, Brno, 1998.

[52] K. Rektorys, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, Academia, Praha, 2001.

[53] B. Said-Houari, *Differential equations: methods and applications*, Springer International Pub. Switzerland, New York, 2016.

[54] A. C. Segal, *A Linear Diet Model*, The college Mathematics Journal, 18, no. 1 (1987), 44-45.

[55] G. F. Simmons, *Differential equations, with applications and historical notes*, druhé vydání, McGraw-Hill, New York, 1991.

[56] L. Soukup, *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich užití ve fyzice* [online], Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně, 2010, [cit. 2018-03-31].

[57] J. Stewart, *Calculus*, sedmé vydání, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2012.

[58] J. Studnička, *Gompertzova populační rovnice* [online], Bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2010 [cit. 2018-03-30].

[59] S. T. Tan, *Applied calculus for the managerial, life, and social sciences*, desáté vydání, Cengage Learning, Boston, USA, 2017.

[60] M. Usha Rani, G. Komahan, *Mathematical Model for Diabetes Use Glusose Tolerance Test (GTT)*, International Journal of Science and Research (IJSR). Volume 6 Issue 2, February 2017. Dostupné z: https://www.ijsr.net/archive/v6i2/31011701.pdf

[61] K. Wainwright, *Linear, First-Order Differential Equations* [online], Handout k předmětu ECON 431, Simon Fraser University, [cit. 2018-04-14]. Dostupné z: http://www.sfu.ca/~wainwrig/Econ331/chap15-examples-notes.pdf

[62] L. Warren, *PCL Tales: Joe Sprinz's attempt to catch a baseball from a blimp* [online], 2014, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: https://www.minorleagueball.com/2014/3/11/5491812/pcl-tales

[63] W. Weckesser, *An Example from Economics: The Solow Growth Model*, přednáška z předmětu Math 312, Colgate University, 2005.

[64] D. N. Weil, *Economic Growth*, první vydání, Boston: Pearson Education, 2005.

[65] M. D. Weir, J. Hass, G. B. Thomas, *Thomas' calculus: early transcendentals*, dvanácté vydání, Addison-Wesley, Boston, 2010.

[66] D. G. Zill, *A first course in differential equations with modeling applications*, deváté vydání, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2009.

[67] *Applications of Second-Order Equations* [online], [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: <https://www.cliffsnotes.com/study-guides/differential-equations/applying-differential-equations/applications-of-second-order-equations>

[68] *Zack Hample's baseball catch breaks world record* [online], 2013, [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: http://www.news.com.au/world/zack-hample8217s-baseball-catch-breaks-world-record/news-story/8f5eccba3f4efa2df2c487250e93edf0

[69] *Unit 2: Second Order Differential Equations and Its Applications* [online], [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/maths/en/curr_syll/AS_AppMaths%20Syl_e/Unit_02.pdf

[70] *Advertising Awareness* [online], [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: https://www.math24.net/advertising-awareness/

[71] Otázka *Practical applications of first order exact ODE?* [online], [cit. 2018-04-23]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/262187/practical-applications-of-first-order-exact-ode/685314

[72] Použitá data o počtech obyvatel v ČR a v Japonsku, státním dluhu a rozdělení příjmů v ČR pochází z následujících odkazů:

https://www.czso.cz/csu/czso/obyvatelstvo_hu [online], [cit. 2018-04-23].

https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL?locations=JP [online], [cit. 2018-04-23].

http://apl.czso.cz/pll/rocenka/rocenkavyber.makroek_vydaj [online], [cit. 2018-04-23].

http://www.mfcr.cz/cs/verejny-sektor/rizeni-statniho-dluhu/dluhova-statistika/struktura-a-vyvoj-statniho-dluhu [online], [cit. 2018-04-23].

https://is.muni.cz/go/l_tNNA [online], [cit. 2018-04-23].