M5160 Obyčajné diferenciálne rovnice I

Systémy nelineárnych diferenciálnych rovníc

Peter Šepitka

zima 2022

Obsah

Obsah

Nech $n \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené číslo. Súbor rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_3' &= f_3(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

kde $f_k(t, x_1, \dots, x_n)$ s $k = 1, \dots, n$ sú reálne funkcie definované na danej množine $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a znak $'$ znamená $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, sa nazýva systém diferenciálnych rovníc prvého rádu. Zavedením označenia

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, x) := \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

môžeme systém (1) prepísať do vektorového tvaru

$$x' = f(t, x). \tag{2}$$

Riešením systému (2) rozumieme každú n-vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na nejakom podintervale $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$, pre ktorú

$$[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \in M \quad \text{a} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{J}.$$

Hlavnou témou prednášky bude začiatočná (Cauchyho) úloha (problém)

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = \eta, \tag{3}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ daný vektor tak, že $[t_0, \eta] \in M$. Hovoríme, že začiatočná úloha (3) je jednoznačná, ak pre každé dve riešenia x a y úlohy (3), ktoré existujú na intervaloch $\mathcal{I}_x$ a $\mathcal{I}_y$, existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$x(t) = y(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}_x \cap \mathcal{I}_y \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \tag{4}$$

Príklad 1

Začiatočná úloha $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$, je príkladom nejednoznačnej úlohy. Má totiž (minimálne) dve riešenia $x(t) \equiv 0$ a $y(t) = t^3$ na $\mathbb{R}$, pre ktoré platí $x(t) \neq y(t)$ pre každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podobne ako pri lineárnych systémoch zásadnú úlohu v skúmaní riešiteľnosti začiatočnej úlohy (3) zohráva nasledujúce tvrdenie.

Lema 1

Nech daná $(n+1)$-vektorová funkcia f je spojitá na množine $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Potom n-vektorová funkcia φ je riešenie začiatočnej úlohy (3) *na nejakom intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ práve vtedy, keď platí*

$$[t, \varphi(t)] \in M \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{5}$$

Poznámka 1

Podľa Lemy 5 teda predpoklad spojitosti funkcie f zaručuje ekvivalenciu medzi začiatočnou úlohou (3) a integrálnou rovnicou (5). V tomto prípade sa preto môžeme obmedziť na vyšetrovanie integrálnej rovnice (5).

Obsah

V tejto sekcii budeme využívať jedno tvrdenie týkajúce sa množiny spojitých (vektorových) funkcií. Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný kompaktný interval a $\mathcal{A}$ daná množina funkcií spojitých na $\mathcal{I}$. Pripomeňme, že funkcie z $\mathcal{A}$ sa označujú ako rovnomerne ohraničené na $\mathcal{I}$, ak existuje konštanta $K > 0$ s vlastnosťou

$$\|f(t)\| \leq K \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I} \text{ a pre každé } f \in \mathcal{A}. \tag{6}$$

Podobne, funkcie z $\mathcal{A}$ sa nazývajú rovnako spojité na intervale $\mathcal{I}$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou, že ak pre body $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ platí

$$|t_2 - t_1| < \delta, \quad \text{potom} \quad \|f(t_2) - f(t_1)\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } f \in \mathcal{A}. \tag{7}$$

Veta 1 (Arzelàova–Ascoliho)

Množina $\mathcal{A}$ funkcií spojitých na kompaktnom intervale $\mathcal{I}$ má vlastnosť

$$\text{každá postupnosť } \{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \text{ obsahuje podpostupnosť}$$
$$\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ rovnomerne konvergentnú na } \mathcal{I} \tag{8}$$

práve vtedy, keď funkcie z množiny $\mathcal{A}$ spĺňaju podmienky (6) *a* (7).

Poznamenajme, že množina $\mathcal{A}$ spĺňajúca vlastnosť (8) sa označuje ako relatívne kompaktná v priestore funkcií spojitých na kompaktnom intervale $\mathcal{I}$.

Existencia a jednoznačnosť riešenia

Veta 2 (Peanova)

Nech a, b *sú dané kladné reálne čísla a nech* $t_0 \in \mathbb{R}$ *je daný bod a* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *daný vektor. Definujme množiny*

$$\mathcal{I} := [t_0, t_0 + a], \quad D := \{y \in \mathbb{R}^n, \ \|y - \eta\| \le b\}. \tag{9}$$

Nech $f : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ *je daná spojitá a identicky nenulová funkcia. Označme*

$$m := \max_{[t,y] \in \mathcal{I} \times D} \|f(t, y)\|. \tag{10}$$

Potom začiatočná úloha (3) *má aspoň jedno riešenie, ktoré existuje na intervale* $\mathcal{J} := [t_0, t_0 + \alpha]$*, kde číslo* $\alpha := \min\{a, \frac{b}{m}\}$.

Dôkaz Vety 2.

Zvoľme pevne ľubovoľné $\delta > 0$ a uvažujme $\varepsilon \in (0, \delta]$. Ukážeme, že predpisom

$$x_\varepsilon(t) := \begin{cases} \eta, & t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x_\varepsilon(s - \varepsilon))\, \mathrm{d}s, & t \in [t_0, t_0 + \alpha], \end{cases} \tag{11}$$

je korektne definovaná spojitá funkcia na intervale $\mathcal{J}_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ so spo-

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

jitou deriváciou na množine $\mathcal{J}_\delta \setminus \{t_0\}$. Najprv ukážeme, že platí

$$x_\varepsilon(t) \in D \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{J}_\delta. \tag{12}$$

Vzhľadom na predpis (11) funkcie x_ε to vykonáme induktívne. Zrejme pre hodnoty $t \in [t_0-\delta, t_0]$ je v súlade s (11) $x_\varepsilon(t) = \eta$, a tak podľa (9) máme $x_\varepsilon(t) \in D$. Nech $q \in \mathbb{N}$ je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou $\alpha \leq q\varepsilon$. Na intervale $[t_0, t_0+\varepsilon]$ je funkcia $x_\varepsilon(s-\varepsilon) = \eta \in D$, nakoľko $s-\varepsilon \in [t_0-\varepsilon, t_0] \subseteq [t_0-\delta, t_0]$. Podľa (11) je preto výraz $x_\varepsilon(t)$ pre $t \in [t_0, t_0+\varepsilon]$ definovaný korektne, pričom

$$\|x_\varepsilon(t) - \eta\| \overset{(11)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon))\|\,\mathrm{d}s$$

$$\overset{(10)}{\leq} \int_{t_0}^{t} m\,\mathrm{d}s = m(t-t_0) \leq m\varepsilon < m\alpha \leq b \quad \text{pre každé } t \in [t_0, t_0+\varepsilon].$$

Z toho podľa (9) máme $x_\varepsilon(t) \in D$ pre každé $t \in [t_0, t_0+\varepsilon]$. Analogickým spôsobom rozšírime platnosť vlastnosti (12) na interval $[t_0+\varepsilon, t_0+2\varepsilon]$. V tomto procese postupujeme ďalej až kým nedosiahneme $[t_0+(q-2)\varepsilon, t_0+(q-1)\varepsilon]$. Následne obdobným spôsobom rozšírime platnosť vlastnosti (12) na doplnkový podinterval $[t_0+(q-1)\varepsilon, t_0+\alpha]$. Funkcia x_ε v (11) je teda skutočne korektne definovaná na celom intervale $\mathcal{J}_\delta$. V podobnom duchu dokážeme jej spojitosť na $\mathcal{J}_\delta$ a spojitú diferencovateľnosť, keďže v súlade s (11) platí

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$x'_\varepsilon(t) := \begin{cases} 0, & t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ f(t, x_\varepsilon(t-\varepsilon)), & t \in (t_0, t_0 + \alpha], \end{cases} \tag{13}$$

Spojitosť funkcie f na $\mathcal{I} \times D$ a funkcie $x_\varepsilon(t-\varepsilon)$ na $[t_0, t_0+\alpha]$ implikuje podľa (13) i spojitosť derivácie x'_ε na $\mathcal{J}_\delta \setminus \{t_0\}$. Uvažujme teraz množinu funkcií tvaru

$$\mathcal{A} := \{x_\varepsilon \text{ definované v (11) pre každé } \varepsilon \in (0, \delta]\}. \tag{14}$$

Dokážeme, že množina $\mathcal{A}$ v (14) je relatívne kompaktná v priestore všetkých (vektorových) funkcií spojitých na intervale $\mathcal{J}_\delta$. Podľa Arzelàovej–Ascoliho Vety 1 musíme overiť, že funkcie z množiny $\mathcal{A}$ spĺňajú podmienky (6) a (7). Platí

$$\|x_\varepsilon(t)\| = \|(x_\varepsilon(t) - \eta) + \eta\| \leq \|x_\varepsilon(t) - \eta\| + \|\eta\| \overset{(12)}{\leq} b + \|\eta\|$$

pre každé $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$ a každé $t \in \mathcal{J}_\delta$, t.j., platí podmienka (6). Na druhej strane, pre každé dva body $t_1, t_2 \in \mathcal{J}_\delta$, $t_1 < t_2$ platí

$$\|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)\| \leq m|t_2 - t_1| \quad \text{pre každú funkciu } x_\varepsilon \in \mathcal{A}. \tag{15}$$

Skutočne, ak $t_1, t_2 \in [t_0 - \delta, t_0]$, potom podľa (11) máme $x_\varepsilon(t_2) = \eta = x_\varepsilon(t_1)$ a $\|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)\| = 0$ pre každé $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Ak $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0]$ a $t_2 \in (t_0, t_0 + \alpha]$, potom v súlade s (11) a (12) máme

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$\|x_\varepsilon(t_2)-x_\varepsilon(t_1)\| \overset{(11)}{=} \|x_\varepsilon(t_2)-\eta\| \overset{(11)}{\leq} \int_{t_0}^{t_2} \|f(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon))\|\,\mathrm{d}s \overset{(10)}{\leq} m(t_2-t_1)$$

pre každé $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Napokon ak $t_1, t_2 \in (t_0, t_0+\alpha]$, potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre každé $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$ existuje bod $t_1 < \tau_\varepsilon < t_2$ s vlastnosťou

$$\|x_\varepsilon(t_2)-x_\varepsilon(t_1)\| = \|x'_\varepsilon(\tau_\varepsilon)\|\cdot|t_2-t_1| \overset{(13),(10)}{\leq} m|t_2-t_1|.$$

Overili sme teda nerovnosť (15) pre každú funkciu $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Nie je ťažké si premyslieť, že táto vlastnosť zaručuje platnosť podmienky (7). Uvažujme teraz nejakú klesajúcu číselnú postupnosť $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (0, \frac{\delta}{2}]$ s $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$. Keďže podľa Arzelàovej–Ascoliho Vety 1 množina $\mathcal{A}$ spĺňa vlastnosť (8), funkcionálna postupnosť $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ obsahuje podpostupnosť, ktorá konverguje rovnomerne na intervale $\mathcal{J}_\delta$ k istej spojitej funkcii x. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že túto vlastnosť má samotná postupnosť $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$, t.j.,

$$x_{\varepsilon_k}(t) \rightrightarrows x(t) \quad \text{na intervale } \mathcal{J}_\delta. \tag{16}$$

Funkcie $x_{\varepsilon_k}(t-\varepsilon_k)$ konvergujú rovnomerne k $x(t)$ na $[t_0-\frac{\delta}{2}, t_0+\alpha]$, t.j., platí

$$x_{\varepsilon_k}(t-\varepsilon_k) \rightrightarrows x(t) \quad \text{na intervale } \mathcal{J}_\delta. \tag{17}$$

Relácia (17) vyplýva z (16), z vlastnosti $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ a z nerovnosti

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$\|x_{\varepsilon_k}(t-\varepsilon_k) - x(t)\| \leq \|x_{\varepsilon_k}(t-\varepsilon_k) - x_{\varepsilon_k}(t)\| + \|x_{\varepsilon_k}(t) - x(t)\|$$

$$\overset{(15)}{\leq} m\varepsilon_k + \|x_{\varepsilon_k}(t) - x(t)\|.$$

Následnou kombináciou (17) a (rovnomernej) spojitosti funkcie f na kompaktnej množine $\mathcal{I} \times D$ dostávame, že postupnosť

$$f(t, x_{\varepsilon_k}(t-\varepsilon_k)) \rightrightarrows f(t, x(t)) \quad \text{na intervale } [t_0, t_0+\alpha]. \tag{18}$$

Z (11) vieme, že postupnosť funkcií $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$ spĺňa rovnicu

$$x_{\varepsilon_k}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{\varepsilon_k}(s-\varepsilon_k))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha]. \tag{19}$$

Odvodené podmienky (16), (17) a (18) umožňujú v rovnosti (19) vykonať limitný prechod $k \to \infty$. Pre $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ postupne dostávame

$$\lim_{k\to\infty} x_{\varepsilon_k}(t) = \eta + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_{\varepsilon_k}(s-\varepsilon_k))\,\mathrm{d}s,$$

$$x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} \left[\lim_{k\to\infty} f(s, x_{\varepsilon_k}(s-\varepsilon_k))\right] \mathrm{d}s \quad \longrightarrow \quad x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

Limitná funkcia x je teda riešením rovnice (5). Množina $\mathcal{J} \times D$ je uzavretá, a preto $x(t) \in D$ pre každé $t \in \mathcal{J} = [t_0, t_0 + \alpha]$. V súlade s Lemou 1 je tak funkcia x riešením začiatočnej úlohy (3) a existuje na celom intervale $[t_0, t_0 + \alpha]$. ∎

Definícia 1 (Lipschitzovská a kontraktívna funkcia)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ daná množina. Hovoríme, že funkcia $f : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovská, resp. spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na (vektorovú) premennú $x \in D$, ak existuje $L \geq 0$ s vlastnosťou

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{pre každé } [t,x],[t,y] \in \mathcal{I} \times D. \tag{20}$$

Číslo L sa potom označuje ako Lipschitzova konštanta funkcie f. Obzvlášť, v prípade ak $L < 1$, hovoríme, že funkcia f je kontraktívna.

Veta 3 (Picardova–Lindelöfova)

Nech platia predpoklady a označenie z Vety 2. Nech naviac funkcia f je lipschitzovská vzhľadom na premennú x na množine $\mathcal{I} \times D$. Potom začiatočná úloha (3) *má práve jedno riešenie, ktoré existuje na intervale $[t_0, t_0 + \alpha]$.*

Dôkaz Vety 3.

Existencia riešenia začiatočnej úlohy (3) vyplýva z Peanovej Vety 2. Ak φ a ψ sú dve riešenia úlohy (3) definované na intervale $[t_0, t_0+\alpha]$, potom v súlade s Lemou 1 spĺňajú rovnosť (5), t.j., platí

$$\varphi(t) - \psi(t) \overset{(5)}{=} \int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))]\,\mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in [t_0, t_0+\alpha]. \tag{21}$$

Nech $L \geq 0$ je Lipschitzova konštanta funkcie f na množine $\mathcal{I} \times D$. Potom

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \overset{(21)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))]\,\mathrm{d}s \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \overset{(20)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} L\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}s \right|$$

pre každé $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Posledná nerovnosť v súlade s Gronwallovou lemou implikuje, že funkcie $\varphi(t) = \psi(t)$ na celom intervale $[t_0, t_0+\alpha]$. ∎

Poznámka 2

Z dôkazu Viet 2 a 3 je zrejmé, že vhodnou modifikáciou ich predpokladov možno formulovať tvrdenie o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy (3) i na intervale $[t_0-\alpha, t_0]$, resp. na intervale $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Moderná teória diferenciálnych rovníc využíva pri analýze a dôkazoch existencie riešení (a ich jednoznačnosti) abstraktnejšie metódy a nástroje funkcionálnej analýzy. Tento prístup sa celkovo v matematike ukazuje ako veľmi užitočný a dôležitý, pretože umožňuje prepájať rôzne matematické disciplíny a riešiť ich odpovedajúce problémy čo najjednotnejším spôsobom.

Analýza úloh o existencii a jednoznačnosti riešení diferenciálnych rovníc je spravidla založená na tvrdeniach, ktoré sa súhrnne označujú ako vety o pevných bodoch spojitých zobrazení. Z nich najvýznamnejšie sú Banachova a Schauderova veta o pevnom bode.

Veta 4 (Banachova o pevnom bode)

Nech (X, ρ) je (neprázdny) úplný metrický priestor. Potom každé kontraktívne zobrazenie $T : X \to X$ má práve jeden pevný bod v X.

Veta 5 (Schauderova o pevnom bode)

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathcal{A} \subseteq X$ neprázdna uzavretá konvexná množina a $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ spojité zobrazenie. Ak obraz $T(\mathcal{A})$ je množina relatívne kompaktná v X, potom zobrazenie T má aspoň jeden pevný bod v $\mathcal{A}$.

Predložíme teraz alternatívny dôkaz Peanovej Vety 2, ktorý je založený na použití Schauderovej Vety 5 o pevnom bode.

Alternatívny dôkaz Vety 2.

Nech platia predpoklady a označenie vo Vete 2. Uvažujme X ako lineárny priestor všetkých n-vektorových funkcií spojitých na intervale $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + \alpha]$ s normou

$$\|x\| := \max_{t \in \mathcal{J}} \|x(t)\|, \quad x \in X. \tag{22}$$

Nech $\mathcal{A} \subseteq X$ je podmnožina definovaná reláciou

$$\mathcal{A} := \{x \in X, \ \|x - \eta\| \leq b\}, \tag{23}$$

pričom vektor η teraz chápeme ako konštatnú funkciu $\varphi(t) = \eta$ pre každé $t \in \mathcal{J}$. Množina $\mathcal{A}$ je zrejme uzavretá vzhľadom na normu v (22) a naviac je konvexná. Skutočne, pre každé dve funkcie $x, y \in \mathcal{A}$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - \eta\| &= \|\lambda(x-\eta) + (1-\lambda)(y-\eta)\| \\ &\leq \|\lambda(x-\eta)\| + \|(1-\lambda)(y-\eta)\| = \lambda\|x-\eta\| + (1-\lambda)\|y-\eta\| \\ &\overset{(23)}{\leq} \lambda b + (1-\lambda)b = b, \quad \text{a teda } \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Uvažujme ďalej zobrazenie $T : \mathcal{A} \to X$ definované predpisom

Alternatívny dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$[Tx](t) := \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{J}, \quad x \in \mathcal{A}. \tag{24}$$

Zobrazenie T v (24) zobrazuje množinu $\mathcal{A}$ do seba, nakoľko platí

$$\|[Tx](t) - \eta\| \overset{(24)}{=} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\ \mathrm{d}s \overset{(10)}{\le} m(t - t_0) \le m\alpha \le b$$

pre každé $t \in \mathcal{J}$. V súlade s (22) je potom norma $\|Tx - \eta\| \le b$, t.j., $Tx \in \mathcal{A}$ pre každú funkciu $x \in \mathcal{A}$. Ďalej zobrazenie T je spojité vhľadom na normu v (22). Stačí si premyslieť, že konvergencia v norme v (22) znamená rovnomernú konvergenciu každej zložky vektorových funkcií z priestoru X na intervale $\mathcal{J}$. Keďže funkcia f je (rovnomerne) spojitá na kompaktnej množine $\mathcal{J} \times D$, podľa analogických úvah ako v pôvodnom dôkaze Vety 2 platí, že ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje rovnomerne k funkcii $x \in X$ na $\mathcal{J}$, potom postupnosť

$$\{[Tx_k](t)\}_{k=1}^{\infty} \overset{(24)}{=} \left\{ \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\}_{k=1}^{\infty} \rightrightarrows \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \overset{(24)}{=} [Tx](t)$$

pre $k \to \infty$ na $\mathcal{J}$, t.j., postupnosť $\{Tx_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k funkcii Tx na $\mathcal{J}$. Napokon ukážeme, že množina $T(\mathcal{A})$ je relatívne kompaktná v priestore X vzhľadom na normu v (22). Funkcie z množiny $T(\mathcal{A})$ sú rovnomerne ohraničené na intervale $\mathcal{J}$, nakoľko pre každé $x \in \mathcal{A}$ a pre každé $t \in \mathcal{J}$ platí

Alternatívny dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$\|[Tx](t)\| \overset{(24)}{=} \left\|\eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s\right\| \leq \|\eta\| + \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s\right\| \leq \|\eta\| + b,$$

ako sme ukázali vyššie. Na druhej strane, funkcie z množiny A sú rovnako spojité na intervale $\mathcal{J}$, pretože pre každé $x \in \mathcal{A}$ a pre každé $t_1, t_2 \in \mathcal{J}$ máme nerovnosť

$$\|[Tx](t_2) - [Tx](t_1)\| \overset{(24)}{=} \left\|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s\right\| \leq m|t_2 - t_1|.$$

Množina $T(\mathcal{A})$ teda spĺňa podmienky (6) a (7). Podľa Arzelàovej–Ascoliho Vety 1 je preto skutočne relatívne kompaktná v priestore X vzhľadom na normu v (22). Podľa Schauderovej Vety 5 má potom zobrazenie T v (24) aspoň jeden pevný bod, t.j., existuje funkcia $x \in \mathcal{A}$ s vlastnosťou

$$Tx = x \quad \overset{(24)}{\longrightarrow} \quad x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{J}.$$

Inými slovami, v súlade s Lemou 1 má začiatočná úloha (3) aspoň jedno riešenie x, ktoré existuje na celom intervale $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + \alpha]$. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 3 (Picardove aproximácie)

Analogicky je možné podať alternatívny dôkaz Picardovej–Lindelöfovej Vety 3 využitím Banachovej Vety 4 o pevnom bode. Tento dôkaz zároveň poskytuje i metódu, pomocou ktorej dané jediné riešenie x začiatočnej úlohy (3) zostrojíme. Podobne ako v prípade lineárneho systému sa jedná o tzv. Picardovu postupnosť postupných aproximácií $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá je definovaná induktívne predpisom

$$x_{k+1}(t) = [Tx_k](t) \overset{(24)}{=} \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{J}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

pričom x_1 je ľubovoľná n-vektorová funkcia spojitá na intervale $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + \alpha]$, ktorá spĺňa podmienku $\|x_1 - \eta\| \leq b$ vzhľadom na normu v (22). Hľadaná funkcia x je potom rovnomerná limita postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ na intervale $\mathcal{J}$.

Poznámka 4 (Lipschitzova podmienka)

Poznamenajme, že v prípade, ak funkcia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ má ohraničené parciálne derivácie podľa premennej x na konvexnej oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, potom je f lipschitzovská na množine Ω vzhľadom na premennú x, t.j., spĺňa podmienku (20). Obzvlášť, ak sú tieto parciálne derivácie spojité na $\overline{\Omega}$ a Ω je ohraničená konvexná oblasť, potom f spĺňa Lipschitzovu podmienku (20) na $\overline{\Omega}$ vzhľadom na x.

Príklad 2

Vyšetrime existenciu a jednoznačnosť riešenia začiatočnej úlohy

$$x_1' = 3\cos x_1^2 - 2tx_2^2 + 1, \quad x_2' = 2\sin x_1 + x_1^2 x_2 + t^2, \quad x_1(2) = -1, \quad x_2(2) = 1.$$

Odpovedajúca vektorová funkcia

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} 3\cos x_1^2 - 2tx_2^2 + 1 \\ 2\sin x_1 + x_1^2 x_2 + t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

je spojitá na celom $\mathbb{R}^3$ a jej Jacobiho matica

$$f'(t,x) := \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1}(t,x) & (f_1)'_{x_2}(t,x) \\ (f_2)'_{x_1}(t,x) & (f_2)'_{x_2}(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_1 \sin x_1^2 & -4tx_2 \\ 2\cos x_1 + 2x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

vzhľadom na premennú x je spojitá na $\mathbb{R}^3$. Podľa Poznámky 4 je funkcia f lipschitzovská na uzávere každej ohraničenej konvexnej oblasti v $\mathbb{R}^3$. V súlade s Vetou 3 a Poznámkou 2 má teda začiatočná úloha v zadaní príkladu práve jedno vektorové riešenie, ktoré existuje na intervale $[2-\alpha, 2+\alpha]$ pre vhodné dostatočné malé kladné číslo α.

Globálna jednoznačnosť riešenia

Vo Vetách 2 a 3 pojednávame o lokálnej existencii a jednoznačnosti riešení začiatočnej úlohy (3), pričom neskúmame ich možné predĺženia na maximálne intervaly existencie. V nasledujúcom tvrdení uvedieme postačujúce podmienky existencie jediného úplného riešenia začiatočnej úlohy (3).

Definícia 2 (Lokálne lipschitzovská funkcia)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná otvorená množina. Hovoríme, že $(n+1)$-vektorová funkcia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je lokálne lipschitzovská na Ω vzhľadom na premennú x, ak pre každý bod $[t_0, \eta] \in \Omega$ existuje okolie $\mathcal{O}(t_0, \eta) \subseteq \Omega$ a nezáporné reálne číslo $L(t_0, \eta)$ s vlastnosťou

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L(t_0, \eta)\|u - v\| \quad \text{pre každé } [t,u],[t,v] \in \mathcal{O}(t_0, \eta). \tag{26}$$

Číslo $L(t_0, \eta)$ sa označuje ako lokálna Lipschitzova konštanta funkcie f na Ω.

Veta 6 (Globálna jednoznačnosť úplného riešenia)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná konvexná oblasť a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a lokálne lipschitzovská funkcia na Ω vzhľadom na premennú x. Potom každé úplné riešenie rovnice (2) je určené jednoznačne. Presnejšie, každým bodom $[t_0, \eta] \in \Omega$ prechádza práve jedna integrálna krivka rovnice (2).

Dôkaz Vety 6.

Zvoľme pevne bod $[t_0, \eta] \in \Omega$ a nech φ a ψ sú dve riešenia začiatočnej úlohy (3). Ich existenciu a vzájomnú rovnosť na nejakom malom okolí bodu t_0 máme zaručenú podľa Vety 3. Nech $\mathcal{I}$ je ľubovoľný interval, na ktorom existujú obidve riešenia φ a ψ. Sporom predpokladajme, že existuje bod $\tau \in \mathcal{I}$ s vlastnosťou $\varphi(\tau) \neq \psi(\tau)$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\tau > t_0$. Vďaka spojitosti a lokálnej jednoznačnosti funkcií φ a ψ existuje bod $\tau_0 \in (t_0, \tau)$ taký, že $\eta_0 := \varphi(\tau_0) = \psi(\tau_0)$ a $\varphi(t) \neq \psi(t)$ pre každé $t \in (\tau_0, \tau]$. Nech $L := L(\tau_0, \eta_0)$ je lokálna Lipschitzova konštanta funkcie f, ktorá odpovedá bodu $[\tau_0, \eta_0] \in \Omega$. V súlade s (26) potom existuje dostatočne malé $\delta > 0$ také, že platí

$$\|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\| \quad \text{pre každé } t \in (\tau_0, \tau_0 + \delta) \subseteq \mathcal{I}. \tag{27}$$

Podľa Lemy 1 pre funkcie φ a ψ máme

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \overset{(5)}{=} \left\| \int_{\tau_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))]\, \mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\tau_0}^{t} \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|\, \mathrm{d}s$$

$$\overset{(27)}{\leq} L \int_{\tau_0}^{t} \|\varphi(s) - \psi(s)\|\, \mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in (\tau_0, \tau_0 + \delta). \tag{28}$$

Následne, v súlade s Gronwallovou lemou z nerovnosti (28) vyplýva, že funkcie $\varphi(t) = \psi(t)$ pre každé $t \in (\tau_0, \tau_0 + \delta)$. Tento výsledok je však v rozpore s definíciou bodu τ_0. Preto musí platiť $\varphi(t) = \psi(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$ napravo od bodu t_0. Rovnaký záver odvodíme i pre každé $t \in \mathcal{I}$ naľavo od bodu t_0. ∎

Obsah

Úplné riešenie

V tejto sekcii sa budeme zaoberať otázkou, či je možné dané riešenie systému (2), ktoré existuje na nejakom danom intervale, predĺžiť ako riešenie rovnice (2) na väčší interval. Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná oblasť a vektorová funkcia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pripomeňme, že ak φ a ψ sú dve riešenia systému (2), ktoré sú definované na reálnych intervaloch $\mathcal{I}_\varphi$ a $\mathcal{I}_\psi$, potom hovoríme, že riešenie ψ je predĺženie riešenia φ (resp. riešenie φ je zúženie riešenia ψ), ak platí

$$\text{ostrá inklúzia} \quad \overline{\mathcal{I}_\varphi} \subsetneq \mathcal{I}_\psi \quad \text{a rovnosť} \quad \psi(t) = \varphi(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}_\varphi. \qquad (29)$$

Definícia 3 (Úplné riešenie)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná oblasť a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkcia. Riešenie φ systému (2) sa označuje ako úplné, ak nie je zúžením žiadneho iného riešenia rovnice (2). Presnejšie, riešenie φ je ω-úplné, ak je nepredĺžiteľné napravo, kým riešenie φ je α-úplné, ak nie je predĺžiteľné naľavo.

Keďže definičným oborom funkcie f je oblasť Ω, každé úplné riešenie systému (2) je definované na maximálnom otvorenom intervale. V opačnom prípade by ho v súlade s Peanovou Vetou 2 bolo možné predĺžiť napravo, resp. naľavo.

Lema 2

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *je daná oblasť a* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá vektorová funkcia. Nech pre daný bod* $[t_0, \eta] \in \Omega$ *je* φ *nejaké riešenie začiatočnej úlohy* (3)*, ktoré existuje na ohraničenom intervale* $[t_0, T)$. *Potom riešenie* φ *je predĺžiteľné napravo od bodu* T *práve vtedy, keď jeho*

$$\textit{graf (integrálna krivka) } G_\varphi := \{[t, \varphi(t)],\ t \in [t_0, T)\} \subseteq \Omega \tag{30}$$

je ohraničený v $\mathbb{R}^{n+1}$ *a má kladnú vzdialenosť od hranice* $h(\Omega)$ *oblasti* Ω.

Dôkaz Lemy 2.

Pripomeňme, že vzdialenosť množín G_φ a $h(\Omega)$ definujeme ako číslo

$$d(G_\varphi, h(\Omega)) := \inf\{\|[t, \varphi(t)] - y\|,\ t \in [t_0, T),\ y \in h(\Omega)\}, \tag{31}$$

kde $\|\cdot\|$ je nejaká daná norma v $\mathbb{R}^{n+1}$. Predpokladajme, že riešenie φ sa dá predĺžiť napravo od bodu T, t.j., existuje riešenie $\tilde{\varphi}$ začiatočnej úlohy (3) definované na intervale $[t_0, \tilde{T})$ s $T < \tilde{T}$, pre ktoré platí $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ pre každé $t \in [t_0, T)$. Funkcia φ má teda v bode T limitu zľava, nakoľko

$$\lim_{t \to T^-} \varphi(t) = \lim_{t \to T^-} \tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(T). \tag{32}$$

Môžeme preto definovať $\varphi(T) := \tilde{\varphi}(T)$. To znamená, že vektorová funkcia φ sa dá spojito rozšíriť na kompaktný interval $[t_0, T]$. Následne, podľa Weierstrassovej

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

vety jej graf $G_\varphi \cup [T, \varphi(T)] \subseteq \Omega$ je množina kompaktná v $\mathbb{R}^{n+1}$, t.j., ohraničená a uzavretá množina. Preto nutne i množina $G_\varphi \subseteq \Omega$ je ohraničená v $\mathbb{R}^{n+1}$. Naviac, vzdialenosť $d(G_\varphi, h(\Omega))$ je kladná, pretože v súlade s (31) platí

$$d(G_\varphi, h(\Omega)) \overset{(31)}{\geq} d(G_\varphi \cup [T, \varphi(T)], h(\Omega)) > 0.$$

Naopak, predpokladajme, že graf G_φ riešenia φ v (30) je ohraničená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$ a vzdialenosť $d(G_\varphi, h(\Omega)) > 0$. Z topologických vlastností lineárneho priestoru $\mathbb{R}^{n+1}$ vyplýva, že existuje kompaktná množina K s vlastnosťou

$$G_\varphi \subseteq K^o \subsetneq K \subseteq \Omega, \tag{33}$$

kde symbol K^o označuje vnútro množiny K. Keďže funkcia f je spojitá na K, opäť podľa Weierstrassovej vety máme, že f je ohraničená na množine K, t.j., existuje $m > 0$ také, že $\|f(t, x)\| \leq m$ pre každý bod $[t, x] \in K$. V súlade s rovnosťou (5) v Leme 1 potom pre každú dvojicu bodov $t, s \in [t_0, T)$ máme

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \overset{(5)}{=} \left\| \int_s^t f(\tau, \varphi(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right\| \leq \left| \int_s^t \|f(\tau, \varphi(\tau))\|\, \mathrm{d}\tau \right| \leq m|t - s|. \tag{34}$$

Nech $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ je ľubovoľne zvolená postupnosť s $\lim_{k\to\infty} t_k = T$. Potom odpovedajúca postupnosť $\{\varphi(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je podľa nerovnosti (34) cauchyovská a vďaka úplnosti priestoru $\mathbb{R}^n$ (vzhľadom na akúkoľvek vektorovú normu) i kon-

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

vergentná. Naviac, odpovedajúca limita nezávisí na výbere vyššie uvedenej postupnosti $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$. Skutočne, ak $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\tilde{t}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ sú dve postupnosti spĺňajúce $\lim_{k\to\infty} t_k = T = \lim_{k\to\infty} \tilde{t}_k$, potom platí

$$\|\varphi(t_k) - \varphi(\tilde{t}_k)\| \overset{(34)}{\leq} m|t_k - \tilde{t}_k|, \quad \text{z čoho vyplýva} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(\tilde{t}_k).$$

Funkcia φ teda má v bode T limitu zľava. Položiac $\varphi(T) := \lim_{t\to T^-} \varphi(t)$ môžeme tak funkciu φ spojito rozšíriť na kompaktný interval $[t_0, T]$, pričom bod $[T, \varphi(T)] \subseteq K \subseteq \Omega$ vďaka kompaktnosti množiny K a inklúziám v (33). Naviac ukážeme, že funkcia φ má v bode T i deriváciu zľava s hodnotou $f(T, \varphi(T))$. Keďže zložená funkcia $f(t, \varphi(t))$ je spojitá na kompaktnom intervale $[t_0, T]$, pre každé dané $\varepsilon > 0$ existuje dostatočne malé $\delta > 0$ tak, že platí

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(T, \varphi(T))\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } t \in (T - \delta, T). \tag{35}$$

Následne využitím identity (5) v Leme 1 dostávame

$$\left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(T)}{t - T} - f(T, \varphi(T)) \right\| \overset{(5)}{=} \left\| \frac{1}{t - T} \int_T^t [f(\tau, \varphi(\tau)) - f(T, \varphi(T))] \,\mathrm{d}\tau \right\|$$

$$\leq \frac{1}{t - T} \int_T^t \|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(T, \varphi(T))\| \,\mathrm{d}\tau \overset{(35)}{<} \varepsilon$$

pre každé $t \in (T - \delta, T)$. Takže skutočne derivácia zľava $\varphi'_-(T)$ existuje, pričom

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

platí $\varphi'_-(T) = f(T, \varphi(T))$. Ako sme ukázali vyššie, bod $[T, \varphi(T)] \in \Omega$. Preto podľa Peanovej Vety 2 má začiatočná úloha (3) s $t_0 := T$ a $\eta := \varphi(T)$ riešenie $\tilde{\varphi}$, ktoré je definované na intervale $[T, \tilde{T})$ pre vhodné $\tilde{T} > T$. A keďže máme

$$\tilde{\varphi}(T) = \varphi(T) \quad \text{a} \quad \tilde{\varphi}'_+(T) = f(T, \tilde{\varphi}(T)) = f(T, \varphi(T)) = \varphi'_-(T),$$

riešenie $\tilde{\varphi}$ systému (2) je podľa (29) predĺžením riešenia φ napravo od bodu T, t.j., riešenie φ systému (2) je predĺžiteľné napravo od T. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 5

Doplňme, že tvrdenie Lemy 2 platí v analogickom znení i pre riešenia začiatočnej úlohy (3), ktoré existujú na ohraničenom intervale typu $(S, t_0]$. Konkrétne, vzhľadom na rovnaké predpoklady ako v Leme 2 riešenie φ začiatočnej úlohy (3), ktoré existuje na ohraničenom intervale $(S, t_0]$ je predĺžiteľné naľavo od bodu S práve vtedy, keď jeho graf (integrálna krivka)

$$G_\varphi := \{[t, \varphi(t)],\ t \in (S, t_0]\} \subseteq \Omega$$

je ohraničený v $\mathbb{R}^{n+1}$ a má kladnú vzdialenosť od hranice $h(\Omega)$ oblasti Ω.

Nasledujúca tvrdenie ukazuje, že spojitosť funkcie f na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ zaručuju existenciu úplného riešenia systému (2).

Veta 7 (Existencia úplného riešenia)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblasť a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkcia. Potom každé riešenie rovnice (2) je buď úplné alebo sa dá predĺžiť na úplné riešenie.

Dôkaz Vety 7.

Uvažujme postupnosť $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množín tvaru

$$\Omega_j := \left\{ [t,x] \in \Omega,\ \|[t,x]\| \leq j,\ d([t,x], h(\Omega)) \geq \frac{1}{j} \right\}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Zrejme platí $\Omega_j \subseteq \Omega_{j+1}^{o}$ pre každé $j \in \mathbb{N}$ a od istého indexu sú všetky množiny neprázdne a kompaktné (uzavreté a ohraničené). Okrem toho máme

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j. \tag{37}$$

Nech φ je riešenie systému (2), ktoré existuje na ohraničenom intervale $[t_0, T)$. Predpokladajme, že φ nie je úplné riešenie. Presnejšie, nech φ sa dá predĺžiť napravo od bodu T. V súlade s prvou časťou dôkazu Lemy 2 sa funkcia φ dá spojito rozšíriť na uzavretý interval $[t_0, T]$, pričom ohraničená množina

$\{[t, \varphi(t)],\ [t_0, T]\} \subseteq \Omega$ má kladnú vzdialenosť od hranice $h(\Omega)$ množiny Ω.

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

Podľa druhej časti dôkazu Lemy 2 je táto rozšírená vektorová funkcia zároveň i riešením systému (2) na celom intervale $[t_0, T]$, t.j., platí $\varphi'_-(T) = f(T, \varphi(T))$. V zhode s (37) a (36) ďalej existuje index $j \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že graf $\{[t, \varphi(t)],\ t \in [t_0, T]\} \in \Omega_j^o$. Ukážeme, že riešenie φ je možné predĺžiť na uzavretý interval $[t_0, T_j]$ tak, že bod $[T_j, \varphi(T_j)] \in \Omega_{j+1}^o \setminus \Omega_j$. Vďaka kompaktnosti množiny Ω_{j+1} a spojitosti funkcie f na Ω môžeme definovať

$$m := \max_{[t,x] \in \Omega_{j+1}} \|f(t,x)\| > 0. \tag{38}$$

Keďže bod $[T, \varphi(T)]$ je vnútorným bodom množiny Ω_j, a následne i množiny Ω_{j+1}, existuje dostatočne malé kladné číslo a s vlastnosťou

$$\{[t,x] \in \Omega,\ |t-\tau| \le a,\ \|x-y\| \le a\} \subseteq \Omega_{j+1} \quad \text{pre každý bod } [\tau, y] \in \Omega_j. \tag{39}$$

Platnosť podmienky (39) je zaručená definíciou množín Ω_j a Ω_{j+1} v (36) a kompaktnosťou množiny Ω_j. Podľa Peanovej Vety 2 potom každým bodom $[\tau, y] \in \Omega_j$ prechádza aspoň jedna integrálna krivka rovnice (2), ktorá je definované na uzavretom intervale $[\tau, \tau+\alpha]$, kde $\alpha := \min\{a, \frac{a}{m}\}$ s m definovaným v (38). Je dôležité si uvedomiť, že hodnota α je jednotná pre všetky body $[\tau, y]$ v množine Ω_j. Toto pozorovanie nám potom umožňuje postupne predlžovať skúmané riešenie φ systému (2) na intervaly

$$[T, T+\alpha], \quad [T+\alpha, T+2\alpha], \quad \cdots, \quad [T+(q-1)\alpha, T+q\alpha],$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

až kým bod $[T + q\alpha, \varphi(T + q\alpha)] \in \Omega^o_{j+1} \setminus \Omega_j$. Vďaka ohraničenosti množiny Ω_j k takejto situácii zrejme dospejeme po konečne veľa krokoch. Ak označíme $T_j := T + q\alpha$, potom riešenie φ je predĺžené na interval $[t_0, T_j]$, pričom bod $[T_j, \varphi(T_j)] \in \Omega^o_{j+1} \setminus \Omega_j$. Zrejme graf získaného predĺženia je obsiahnutý vo vnútri množiny Ω_{j+1}. V súlade s (36) je preto ohraničený a má kladnú vzdialenosť od hranice $h(\Omega)$ oblasti Ω. Podľa Lemy 2 je teda možné riešenie φ ďalej predlžovať napravo od bodu T_j. Analogickými úvahami ako vyššie je možné induktívne zostrojiť rastúcu postupnosť $\{T_k\}_{k=j}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ s vlastnosťou, že pre každé $k \geq j$

$$\text{riešenie } \varphi \text{ je predĺžiteľné na interval } [t_0, T_k], \text{ pričom}$$

$$\text{graf } \{[t, \varphi(t)],\ t \in [t_0, T_k]\} \subseteq \Omega^o_{k+1} \text{ a bod } [T_k, \varphi(T_k)] \in \Omega^o_{k+1} \setminus \Omega_k \overset{(37)}{\subseteq} \Omega \setminus \Omega_k.$$

Vďaka monotónnosti postupnosť $\{T_k\}_{k=j}^{\infty}$ má limitu $T^* := \lim_{k\to\infty} T_k$. Ak $T^* = \infty$, celkové získané predĺženie riešenia φ je podľa Definície 3 ω-úplné riešenie systému (2). Ak bod $T^* \in \mathbb{R}$, potom celkové predĺženie riešenia φ je definované na intervale $[t_0, T^*)$. V tomto prípade môžu nastať dve možnosti. Existuje postupnosť $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T^*)$ s vlastnosťou

$$\lim_{m\to\infty} t_m = T^* \quad \text{a} \quad \lim_{m\to\infty} \|\varphi(t_m)\| = \infty.$$

Zrejme dané predĺženie je opäť ω-úplné riešenie systému (2). Posledná možnosť je existencia postupnosti $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T^*)$ s vlastnosťou

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\lim_{m\to\infty} t_m = T^* \quad \text{a} \quad \lim_{m\to\infty} \varphi(t_m) = \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

V súlade s (36), (37) a vlastnosťou postupnosti $\{T_k\}_{k=j}^{\infty}$ potom bod $[T^*, \eta]$ nutne leží na hranici množiny Ω. Podľa Lemy 2 sa celkové získané predĺženie riešenia φ ďalej už nedá predlžovať napravo, a preto sa podľa Definície 3 i v tomto prípade jedná o ω-úplné riešenie systému (2). Napokon dodajme, že analogickým spôsobom sa tvrdenie lemy dokáže i pre α-úplné riešenia systému (2). ∎

Poznámka 6

Z dôkazu Vety 7 vyplýva, že riešenie φ systému (2) existujúce na intervale $[t_0, T)$ je ω-úplné práve vtedy, keď nastáva aspoň jedna z nasledujúcich možností.

(i) Bod $T = \infty$.

(ii) Existuje postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ s $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, ktorá spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi(t_k)\| = \infty. \tag{40}$$

(iii) Existuje postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [t_0, T)$ s $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, ktorá spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} d\left([t_k, \varphi(t_k)], h(\Omega)\right) = 0. \tag{41}$$

Poznámka 7

Analogické výsledky ako v Poznámke 6 platia i pre α-úplné riešenia systému (2).

Definícia 4 (Limitný bod riešenia)

Nech vektorová funkcia φ je úplné riešenie systému (2), ktoré existuje na intervale (S,T) s $-\infty \le S < T \le \infty$. Hovoríme, že bod $[S,\eta]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, je ľavým limitným bodom riešenia φ, ak $S > -\infty$ a existuje postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (S,T)$ taká, že

$$\lim_{k\to\infty} t_k = S^+ \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \eta. \tag{42}$$

Podobne, bod $[T,\eta]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, sa označuje ako pravý limitný bod riešenia φ, ak $T < \infty$ a existuje postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (S,T)$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} t_k = T^- \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \eta. \tag{43}$$

Limitným bodom riešenia φ označujeme jeho pravý, resp. ľavý limitný bod.

Veta 8 (Limitný bod úplného riešenia)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblasť a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia. Potom každý limitný bod ľubovoľného úplného riešenia rovnice (2) leží na hranici oblasti Ω.

Dôkaz Vety 8.

Nech φ je úplné riešenie systému (2) definované na intervale (S, T), pričom platí $-\infty \le S < T \le \infty$. Predpokladajme, že $[T, \eta]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, je pravý limitný bod riešenia φ. Podľa (43) v Definícii 4 máme $T \in \mathbb{R}$ a existuje postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (S, T)$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} t_k = T^- \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \eta. \tag{44}$$

Z relácií v (44) je zrejmé, že limitný bod $[T, \eta] \in \overline{\Omega}$. Sporom predpokladajme, že $[T, \eta] \in \Omega$. Potom existuje kompaktná množina $K \subseteq \Omega$, pre ktorú $[T, \eta] \in K^o$. Naviac, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že celá postupnosť $\{[t_k, \varphi(t_k)]\}_{k=1}^{\infty} \in K^o$. Ak by existoval index $k \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že graf $G_k := \{[t, \varphi(t)],\ t \in [t_k, T)\}$ by ležal v K^o, potom G_k by bola ohraničená množina s kladnou vzdialenosťou od hranice $h(\Omega)$ oblasti Ω. Vyplýva to z toho, že $K \subseteq \Omega$ ako kompaktná množina má kladnú vdialenosť od hranice $h(\Omega)$, a tak

$$d(G_k, h(\Omega)) \ge d(K, h(\Omega)) > 0.$$

Následne, podľa Lemy 2 by bolo riešenie φ predĺžiteľné napravo od bodu T, čo je spor s úplnosťou riešenia φ. Preto nutne existuje vybraná podpostupnosť $\{t_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ a postupnosť $\{s_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq (S, T)$, ktoré spĺňajú

$$t_{k_j} < s_j < t_{k_{j+1}}, \quad [t, \varphi(t)] \in K, \quad t \in [t_{k_j}, s_j], \quad [s_j, \varphi(s_j)] \in h(K) \tag{45}$$

pre každý index $j \in \mathbb{N}$. Označme $m := \max_{[t,x]\in K} \|f(t,x)\|$. Potom platí

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

$$\|\varphi(s_j)-\varphi(t_{k_j})\| \overset{(5)}{=} \left\| \int_{t_{k_j}}^{s_j} f(\tau,\varphi(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\| \le \int_{t_{k_j}}^{s_j} \|f(\tau,\varphi(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau \le m|s_j-t_{k_j}|,$$

$$d\left([s_j,\varphi(s_j)],[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]\right) = \|[s_j,\varphi(s_j)]-[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]\|$$
$$= |s_j-t_{k_j}| + \|\varphi(s_j)-\varphi(t_{k_j})\| \le (m+1)|s_j-t_{k_j}|.$$

Využitím poslednej nerovnosti dostaneme

$$\|[s_j,\varphi(s_j)]-[T,\eta]\| \le \|[s_j,\varphi(s_j)]-[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]\| + \|[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]-[T,\eta]\|$$
$$\le (m+1)|s_j-t_{k_j}| + \|[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]-[T,\eta]\|. \tag{46}$$

Podľa prvej podmienky v (45) a (44) máme $\lim_{j\to\infty}|s_j-t_{k_j}|=0$, a tak

$$\lim_{j\to\infty}\|[s_j,\varphi(s_j)]-[T,\eta]\| \overset{(46)}{\le} (m+1)\lim_{j\to\infty}|s_j-t_{k_j}| + \lim_{j\to\infty}\|[t_{k_j},\varphi(t_{k_j})]-[T,\eta]\|$$
$$\overset{(44)}{=} 0, \quad \text{t.j.,} \quad \lim_{j\to\infty}\|[s_j,\varphi(s_j)]-[T,\eta]\| = 0. \tag{47}$$

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

Keďže hranica $h(K) = \overline{K} \cap \overline{\mathbb{R}^{n+1} \setminus K}$ je uzavretá množina, rovnosť v (47) a posledná podmienka v (45) implikujú, že limitný bod $[T, \eta]$ leží na hranici množiny K. To je však spor s predpokladom, že bod $[T, \eta] \in K^o$. Preto platí $[T, \eta] \in h(\Omega)$. Analogicky sa vyšetrí prípad ľavého limitného bodu. ∎

Dôsledok 1

Nech $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *a* $t_0 \in \mathbb{R}$ *sú dané a uvažujme množiny*

$$\mathcal{I} := [t_0, \infty), \quad D := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < a\}. \tag{48}$$

Nech $f : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^+$ *sú spojité funkcie, pričom platí nerovnosť* $g(t) < a$ *pre všetky body* $t \in \mathcal{I}$. *Potom každé* ω*-úplné riešenie* φ *systému (2), ktoré vychádza z bodu* $[t_0, \eta]$, $\|\eta\| < a$, *a spĺňa nerovnosť* $\|\varphi(t)\| \leq g(t)$ *pre každý bod* $t \in \mathcal{I}$, *v ktorom je definované, existuje na celom intervale* $\mathcal{I}$.

Dôkaz Dôsledku 1.

Nech φ je ω-úplné riešenie systému (2), ktoré existuje na intervale $[t_0, T)$. Podľa predpokladov je φ ohraničené na $[t_0, T)$ a jeho graf má kladnú vzdialenosť od hranice $\|x\| = a$ oblasti D v (48). V súlade s Poznámkou 6 preto $T = \infty$. ∎

Dôsledok 2

Nech $t_0 \in \mathbb{R}$ *je daný bod a* $\mathcal{I} := [t_0, \infty)$ *interval. Nech* $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je vektorová funkcia, ktorá je spojitá a ohraničená na celom svojom definičnom obore. Potom každé* ω*-úplné riešenie* φ *systému* (2)*, ktoré vychádza z bodu* $[t_0, \eta]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, *existuje na celom intervale* $\mathcal{I}$.

Dôkaz Dôsledku 2.

Nech φ je ω-úplné riešenie systému (2), ktoré existuje na intervale $[t_0, T)$. Podľa Lemy 1 funkcia φ spĺňa na $[t_0, T)$ integrálnu rovnicu (5), t.j., platí

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in [t_0, T). \tag{49}$$

Z rovnosti (49) následne dostávame

$$\|\varphi(t)\| \overset{(49)}{\leq} \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\|\, \mathrm{d}s \leq \|\varphi(t_0)\| + m|t - t_0|, \quad t \in [t_0, T), \tag{50}$$

kde $m := \sup_{[t,x] \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n} \|f(t,x)\|$. Dokazované tvrdenie potom priamo vyplýva z Dôsledku 1, v ktorom položíme $a := \infty$ a $g(t) := \|\varphi(t_0)\| + m|t - t_0|$, $t \in \mathcal{I}$, a tak podľa (50) platí $\|\varphi(t)\| \leq g(t)$ pre každé $t \in [t_0, T)$. Dôkaz je hotový. ∎

Obsah

Parametre systému a začiatočné podmienky

Každý diferenciálny systém (2) obsahuje okrem nezávislej premennej t a závislej premennej x i nejaký súbor parametrov. Jedná sa zväčša nejakú množinu konštánt, ktoré explicitne vystupujú v zápise vektorovej funkcie f. Prirodzene sa ponúka otázka, ako zmeny týchto parametrov spolu so zmenami začiatočných podmienok v (3) vplývajú na správanie sa/zmeny riešení začiatočnej úlohy (3). Skúmanie tejto otázky je dôležité obzvlášť v technickej praxi a v aplikovaných vedách, kde systémy diferenciálnych rovníc reprezentujú nejakú zákonitosť, v ktorej sa vyskytujú isté parametre. Hodnoty týchto parametrov sú často určené empiricky, t.j., nie je možné stanoviť ich presne. V tejto situácii je preto žiadúce vedieť, do akej miery získané riešenie vystihuje realitu. O skúmanom diferenciálnom systém (2) je teda prirodzené predpokladať, že

- každá začiatočná úloha (3) má jediné riešenie;
- malé zmeny parametrov v systéme (2) a v začiatočnej podmienke v (3) vyvolajú iba malé zmeny v riešení začiatočnej úlohy (3).

Posledná podmienka kladená na systém (2) znamená, že riešenia úlohy (3) závisia spojito na parametroch systému a na začiatočných podmienkach v (3). Spojitá závislosť riešení systému (2) na parametroch a na začiatočných podmienkach má preto význam nielen z teoretického, ale i z praktického hľadiska.

Veta 9

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je oblasť a nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií spojitých na Ω. Nech ďalej $\{[t_k, \eta_k]\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ je daná postupnosť bodov. Predpokladajme, že

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ konverguje skoro rovnomerne } k\ f \text{ na } \Omega \text{ a } [t_k, \eta_k] \to [t_0, \eta] \subseteq \Omega \qquad (51)$$

pre $k \to \infty$, t.j., $f_k \rightrightarrows f$ pre $k \to \infty$ na každej kompaktnej podmnožine $K \subseteq \Omega$. Nech $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť úplných riešení systému začiatočných úloh

$$x' = f_k(t, x), \quad x(t_k) = \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (52)$$

Potom existuje vybraná podpostupnosť $\{\varphi_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá rovnomerne konverguje k istému riešeniu začiatočnej úlohy (3), t.j.,

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = \eta, \qquad (53)$$

na nejakom okolí bodu t_0. Ak naviac úloha (53) má jediné úplné riešenie φ definované na intervale $\mathcal{I}$, potom celá postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k funkcii φ na ľubovoľnom kompaktnom podintervale $[a, b] \subseteq \mathcal{I}$ s $t_0 \in (a, b)$.

Poznámka 8

Vďaka spojitosti funkcií f_k, $k \in \mathbb{N}$, na oblasti Ω je podľa Peanovej Vety 2 pre každé $k \in \mathbb{N}$ zaručená existencia aspoň jedného riešenia úlohy (52). Podmienka (51) implikuje spojitosť funkcie f na Ω, a teda i riešiteľnosť úlohy (53).

Dôkaz Vety 9.

Nech $K \subseteq \Omega$ je kompaktná množina, ktorá v súlade s (51) obsahuje vo svojom vnútri bod $[t_0, \eta]$. Keďže podľa Poznámky 8 je funkcia f spojitá na oblasti Ω, je na množine K ohraničená, t.j., existuje $m > 0$ s vlastnosťou $\|f(t,x)\| < m$ pre každé $[t,x] \in K$. Naviac, vďaka podmienke (51) existuje index $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\|f_k(t,x)\| < m \quad \text{pre každé } [t,x] \in K \text{ a každé } k \geq \tilde{k}. \tag{54}$$

Uvažujme $\delta > 0$ s vlastnosťou, že množina

$$M := \{[t,x] \in \mathbb{R}^{n+1},\ |t - t_0| \leq \delta,\ \|x - \eta\| \leq 3m\delta\} \subseteq K. \tag{55}$$

Podľa druhej časti predpokladu (51) máme $\lim_{k\to\infty}[t_k, \eta_k] = [t, \eta]$, a tak existuje index $\bar{k} > \tilde{k}$ taký, že platí

$$|t_k - t_0| < \delta, \quad \|\eta_k - \eta\| < m\delta \quad \text{pre každé } k > \bar{k}. \tag{56}$$

Ukážeme teraz, že pre každý index $k > \bar{k}$ graf riešenia φ_k úlohy (52) leží pre $t \in [t_0 - \delta, t + \delta]$ v množine M, t.j., v súlade s (55) platí

$$\|\varphi_k(t) - \eta\| < 3m\delta \quad \text{pre každé } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \text{ a pre každé } k > \bar{k}. \tag{57}$$

Doplňme, že nakoľko každé z riešení φ_k, $k > \bar{k}$, je úplné a množina $M \subseteq K \subseteq \Omega$ je ohraničená, podľa Poznámok 6 a 7 a Vety 8 je každá z funkcií φ_k, $k > \bar{k}$, (ako riešenie (52)) definovaná na celom $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. A keďže v súlade s (56) máme $t_k \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ pre každé $k > \bar{k}$, využijúc formulu (5) v Leme 1 platí

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$\varphi_k(t) \overset{(5)}{=} \eta_k + \int_{t_k}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad k > \bar{k}. \tag{58}$$

Následne dostávame

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k(t) - \eta\| &\overset{(58)}{=} \left\| \eta_k - \eta + \int_{t_k}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \|\eta_k - \eta\| + \left\| \int_{t_k}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\le \|\eta_k - \eta\| + \left\| \int_{t_k}^{t_0} f_k(s, \varphi_k(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\le \|\eta_k - \eta\| + \left| \int_{t_k}^{t_0} \|f_k(s, \varphi_k(s))\|\,\mathrm{d}s \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f_k(s, \varphi_k(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \\
&\overset{(54)}{\le} \|\eta_k - \eta\| + m|t_0 - t_k| + m|t - t_0| \overset{(56)}{<} 3m\delta
\end{aligned} \tag{59}$$

pre každé $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, t.j., skutočne platia relácie v (57). Obzvlášť, funkcie φ_k, $k > \bar{k}$, sú rovnomerne ohraničené na intervale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Naviac, jedná sa o funkcie rovnako spojité na intervale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, pretože

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_k(\tilde{t})\| \overset{(58)}{\leq} \left| \int_{\tilde{t}}^{t} \|f_k(s, \varphi_k(s))\| \, \mathrm{d}s \right| \overset{(54)}{\leq} m|t - \tilde{t}| \tag{60}$$

pre každú dvojicu bodov $t, \tilde{t} \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ a každý index $k > \bar{k}$. Podľa Arzelàovej–Ascoliho Vety 1 sa teda z postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=\bar{k}+1}^{\infty}$ dá vybrať podpostupnosť $\{\varphi_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, ktorá konverguje rovnomerne na intervale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ k spojitej funkcii φ. Dokážeme, že vektorová funkcia φ je riešením začiatočnej úlohy (53). Motivovaní výpočtom v (59) podľa rovnosti (58) máme

$$\varphi_{k_j}(t) \overset{(58)}{=} \eta_{k_j} + \int_{t_{k_j}}^{t_0} f_{k_j}(s, \varphi_{k_j}(s)) \, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} f_{k_j}(s, \varphi_{k_j}(s)) \, \mathrm{d}s \tag{61}$$

pre $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ a pre $j \in \mathbb{N}$. Z vyššie uvedených výsledkov vyplýva

$$\left| \int_{t_{k_j}}^{t_0} \|f_{k_j}(s, \varphi_{k_j}(s))\| \, \mathrm{d}s \right| \overset{(60)}{\leq} m|t_0 - t_{k_j}| \xrightarrow{(51)} 0 \quad \text{pre } j \to \infty,$$

$$\int_{t_0}^{t} f_{k_j}(s, \varphi_{k_j}(s)) \, \mathrm{d}s \xrightarrow{(51)} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \, \mathrm{d}s \quad \text{pre } j \to \infty,$$

$$\eta_{k_j} \xrightarrow{(51)} \eta, \quad \varphi_{k_j}(t) \longrightarrow \varphi(t) \quad \text{pre } j \to \infty$$

pre $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, z čoho limitovaním rovnosti (61) pre $j \to \infty$ dostaneme

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

V súlade s Lemou 1 je teda funkcia φ naozaj riešením začiatočnej úlohy (53). Dokázali sme prvú časť tvrdenia. V tomto momente je dôležité si uvedomiť, že vyššie uvedené limitné procesy fungujú s rovnakým výsledkom pre akúkoľvek rovnomerne konvergentnú vybranú podpostupnosť $\{\varphi_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$. Presnejšie, platí

ak $\{\varphi_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na nejakom okolí bodu t_0 k funkcii ψ,
potom funkcia ψ je riešením začiatočnej úlohy (53) na danom okolí bodu t_0.

Nech začiatočná úloha (53) má jediné úplné riešenie φ, ktoré existuje na otvorenom intervale $\mathcal{I}$. Kombináciou prvej časti tvrdenia, uvedeného pozorovania a Arzelàovej–Ascoliho Vety 1 potom dostávame, že celá postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k (jedinému) riešeniu φ na intervale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq \mathcal{I}$. Nech $[a, b] \subseteq \mathcal{I}$ je daný kompaktný interval s vlastnosťou $t_0 \in (a, b)$. Označme

$$T := \sup\{s \in (t_0, b),\ \varphi_k \rightrightarrows \varphi \text{ na } [t_0, s]\}, \tag{62}$$

$$S := \inf\{s \in (a, t_0),\ \varphi_k \rightrightarrows \varphi \text{ na } [s, t_0]\}. \tag{63}$$

Ukážeme, že platí $T = b$ a $S = a$. Nech kompaktná množinu $K \subseteq \Omega$ uvažovaná v prvej časti dôkazu má (bez ujmy na všeobecnosti) naviac vlastnosť, že vo svojom vnútri obsahuje graf funkcie φ na celom intervale $[a, b]$. Sporom predpokladajme,

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

že $T < b$. Iste existuje dostatočne malé $\varepsilon > 0$ tak, aby $t_0 < T - \varepsilon$ a množina

$$R := \{[t, x] \in \mathbb{R}^{n+1},\ |t - T| \leq 2\varepsilon,\ \|x - \varphi(T)\| \leq 4m\varepsilon\} \subseteq K. \tag{64}$$

Zo spojitosti funkcie φ v bode T zľava vyplýva, že existuje bod $\tau \in (T - \varepsilon, T)$ s vlastnosťou $|\varphi(\tau) - \varphi(T)| < m\varepsilon$. Následne množina M_ε definovaná

$$M_\varepsilon := \{[t, x] \in \mathbb{R}^{n+1},\ |t - \tau| \leq \varepsilon,\ \|x - \varphi(\tau)\| \leq 3m\varepsilon\} \tag{65}$$

je zrejme obsiahnutá v množine R z (64), a teda i v kompaktnej množine K. Uvažujme teraz systém začiatočných úloh tvaru

$$x' = f_k(t, x), \quad x(\tau) = \tilde{\eta}_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

kde vektory $\tilde{\eta}_k := \varphi_k(\tau)$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a začiatočnú úlohu

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \tilde{\eta}, \quad \text{kde vektor } \tilde{\eta} := \varphi(T).$$

Keďže platí $\lim_{k\to\infty} \tilde{\eta}_k = \tilde{\eta}$, jedná sa zrejme o analógiu predpokladov v prvej časti dokazovaného tvrdenia s $t_k := \tau$, $\eta_k := \tilde{\eta}_k$, $k \in \mathbb{N}$, a $t_0 := \tau$, $\eta := \tilde{\eta}$. Sledujúc dôkaz prvej časti tvrdenia s $\delta := \varepsilon$ a $M := M_\varepsilon$ v (65), dostaneme

- pre všetky dostatočne veľké indexy sú funkcie φ_k definované na $[\tau, \tau + \varepsilon]$,
- platí $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ na intervale $[\tau, \tau + \varepsilon]$ pre $k \to \infty$.

Máme teda, že funkcie $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ na $[t_0, \tau + \varepsilon]$, pričom $\tau + \varepsilon > T$. Tento záver je však v rozpore s definíciou čísla T v (62). Preto nutne musí platiť $T = b$. Rov-

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

nosť $S = a$ pre S definované v (63) sa dokáže použitím analogických úvah. ∎

Veta 10 (Závislosť riešení na začiatočných podmienkach a parametroch)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n+1}$ je oblasť a nech $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkcia s vlastnosťou, že pre každý bod $[\tau, \eta, \lambda] \in \mathbb{R}^{m+n+1}$, kde $\tau \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}^m$, má začiatočná úloha

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(\tau) = \eta \tag{66}$$

práve jedno úplné riešenie $\varphi(\cdot, \tau, \eta, \lambda)$. Potom $\varphi(t, \tau, \eta, \lambda)$ je spojitou funkciou premenných t, τ, η, λ na množine

$$D := \{[t, \tau, \eta, \lambda] \in \mathbb{R}^{m+n+2},\ [\tau, \eta, \lambda] \in \Omega,\ t \in \mathcal{I}(\tau, \eta, \lambda)\}, \tag{67}$$

kde $\mathcal{I}(\tau, \eta, \lambda)$ je interval, na ktorom riešenie $\varphi(\cdot, \tau, \eta, \lambda)$ existuje.

Dôkaz Vety 10.

Definujme nové vektorové funkcie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+m}$, $g : \mathbb{R}^{m+n+1} \to \mathbb{R}^{m+n}$ a novú vektorovú premennú tvaru $\zeta \in \mathbb{R}^{n+m}$ tvaru

$$y := (x, \lambda), \quad g(t, y) := \big(f(t, x, \lambda), 0_m\big), \quad \zeta := (\eta, \lambda), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{68}$$

a uvažujme novú začiatočnú úlohu

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$y' = g(t, y), \quad y(\tau) = \zeta. \tag{69}$$

Keďže platí $y' = (x', 0_m)$, začiatočná úloha (69) je zrejme ekvivalentná so začiatočnou úlohou (66). Obzvlášť, v súlade s predpokladmi má úloha (69) pre každý bod $[\tau, \zeta] \in \Omega$ práve jedno úplné riešenie ψ, ktoré je samozrejme okrem premennej t závislé i na voľbe hodnôt τ a ζ. Zvoľme pevne bod $[\tau, \zeta] \in \Omega$ a nech $\{[\tau_k, \zeta_k]\}_{k=1}^{\infty} \in \Omega$ je postupnosť s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty}[\tau_k, \zeta_k] = [\tau, \zeta]$ vzhľadom na nejakú danú vektorovú normu. Nech $\mathcal{I}(\tau, \zeta)$ je (otvorený) interval, na ktorom je definované (jediné) úplné riešenie $\psi(\cdot, \tau, \zeta)$ začiatočnej úlohy (69). Uvažujme systém začiatočných úloh tvaru

$$y' = g(t, y), \quad y(\tau_k) = \zeta_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{70}$$

a nech $\{\psi(\cdot, \tau_k, \zeta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je odpovedajúca postupnosť jediných úplných riešení úloh (70). Podľa Vety 9 potom táto postupnosť konverguje rovnomerne k funkcii $\psi(\cdot, \tau, \zeta)$ na každom kompaktnom podintervale $[a, b] \subseteq \mathcal{I}(\tau, \zeta)$ s $\tau \in (a, b)$. To znamená, že ak si zvolíme konkrétny interval $[a, b] \subseteq \mathcal{I}(\tau, \zeta)$ s $\tau \in (a, b)$, potom výraz $\psi(t, \tau^*, \zeta^*)$ s hodnotami $t \in [a, b]$ je ako funkcia premenných τ^* a ζ^* spojitý v bode $[\tau, \zeta]$. Inými slovami, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ také, že ak

$$t \in [a, b] \text{ a } |\tau^* - \tau| + \|\zeta^* - \zeta\| < \delta_1, \quad \text{potom} \quad \|\psi(t, \tau^*, \zeta^*) - \psi(t, \tau, \zeta)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{71}$$

Na druhej strane je funkcia $\psi(t, \tau, \zeta)$ s $\tau \in [a, b]$ ako výraz premennej t iste spojitý na kompaktnom intervale $[a, b]$, a teda i rovnomerne spojitý na $[a, b]$. To

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

znamená, že pre dané zvolené ε existuje $\delta_2 > 0$ s vlastnosťou, že ak

$$t^*, t \in [a,b] \text{ a } |t^* - t| < \delta_2, \quad \text{potom} \quad \|\psi(t^*,\tau,\zeta) - \psi(t,\tau,\zeta)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{72}$$

Definujme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ a zvoľme $t \in (a,b)$. Kombináciou nerovností (71) a (72) dostávame, že pre každý bod $[t^*, \tau^*, \zeta^*] \in \Omega$ s $t^* \in [a,b]$, ktorý spĺňa

$$|t^* - t| + |\tau^* - \tau| + \|\zeta^* - \zeta\| < \delta, \quad \text{potom platí}$$

$$\|\psi(t^*,\tau^*,\zeta^*) - \psi(t,\tau,\zeta)\| \leq \|\psi(t^*,\tau^*,\zeta^*) - \psi(t^*,\tau,\zeta)\| + \|\psi(t^*,\tau,\zeta) - \psi(t,\tau,\zeta)\|$$

$$\overset{(71),(72)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{73}$$

Nie je ťažké si uvedomiť, že pre každý bod $t \in \mathcal{I}(\tau,\zeta)$ existuje kompaktný interval $[a,b] \subseteq \mathcal{I}(\tau,\zeta)$ taký, že $\tau, t \in (a,b)$. Výsledok v (73) teda znamená, že funkcia $\psi(t,\tau,\zeta)$ je spojitá v každom bode $[t,\tau,\zeta]$, pre ktorý $t \in \mathcal{I}(\tau,\zeta)$. Napokon vzhľadom na substitúcie v (68) a ekvivalenciu začiatočných úloh (66) a (69) dostávame, že jediné úplné riešenie $\varphi(t,\tau,\eta,\lambda) = \psi(t,\tau,\zeta)$ je funkcia spojitá celej na množine D definovanej v (67). Naviac, $\varphi(t,\tau,\eta,\lambda)$ je funkcia rovnomerne spojitá vzhľadom na premennú t na každom kompaktnom podintervale intervalu $\mathcal{I}(\tau,\eta,\lambda)$ pre každý bod $[\tau,\eta,\lambda] \in \Omega$. Dôkaz je hotový. ■

Obsah

Nech $n \in \mathbb{N}$ je daný index a $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je daná množina. Budeme uvažovať diferenciálnu rovnicu n-tého rádu tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{74}$$

kde $f : M \to \mathbb{R}$ je skalárna funkcia. Pod pojmom riešenie rovnice (74) na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ rozumieme funkciu φ, ktorá má na $\mathcal{I}$ všetky derivácie až do rádu n vrátane, a ktorá spĺňa relácie

$$[t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)] \in \Omega, \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Podobne v zhode s (29) definujeme úplné riešenie rovnice (74). Pri riešení začiatočnej (Cauchyho) úlohy (problému) hľadáme riešenie rovnice (74), pre ktoré je v danom bode $t_0 \in \mathbb{R}$ predpísaná jeho hodnota ako aj hodnota jeho prvých $n-1$ derivácií, t.j.,

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad y(t_0) = \eta_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}, \tag{75}$$

kde $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ sú dané hodnoty. Podobne ako v prípade lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu je možné i (nelineárnu) diferenciálnu rovnicu (74) previesť na (nelineárny) systém n diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Veta 11 (Prevod na (nelineárny) systém)

Nech $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval a $t_0 \in \mathcal{I}$ daný bod. Nech funkcia ψ je (úplné) riešenie začiatočnej úlohy (75) na intervale $\mathcal{I}$. Položme

$$\varphi_1(t) := \psi(t), \quad \varphi_2(t) = \psi'(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t) := \psi^{(n-1)}(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{76}$$

Potom vektorová funkcia $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ je (úplným) riešením (nelineárneho) diferenciálneho systému (2) na $\mathcal{I}$ tvaru

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \tag{77}$$

ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\varphi(t_0) = \eta := (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^T$. Naopak, pre každé (úplné) riešenie $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ systému (77) na $\mathcal{I}$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\varphi(t_0) = \eta = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^T$, je jeho prvá zložka φ_1 (úplným) riešením začiatočnej úlohy (75) na celom intervale $\mathcal{I}$.

Tvrdenie Vety 11 umožňuje aplikovať všetky výsledky z predchádzajúcich sekcií na systém (77) a následne odvodiť vlastnosti diferenciálnej rovnice (74).

Veta 12 (Peanova)

Nech a, b sú dané kladné reálne čísla, $t_0 \in \mathbb{R}$ je daný bod a $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ dané konštanty. Definujme vektor $\eta := (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})^T$ a množiny

$$\mathcal{I} := [t_0 - a, t_0 + a], \quad D := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x - \eta\| \le b\}. \tag{78}$$

Nech $f : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}$ je daná spojitá funkcia. Potom začiatočná úloha (75) má aspoň jedno riešenie, ktoré je definované na istom intervale $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ s $t_0 \in \mathcal{J}^o$.

Dôkaz Vety 12.

Tvrdenie vyplýva z kombinácie Vety 11 a Peanovej Vety 2. ■

Veta 13 (Picardova–Lindelöfova)

Nech platia predpoklady a označenie z Vety 12. Nech naviac funkcia f spĺňa Lipschitzovu podmienku, t.j., existuje kladná konštanta L s vlastnosťou

$$|f(t, u_1, \dots, u_n) - f(t, v_1, \dots, v_n)| \le L\|u - v\| \tag{79}$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$ a pre každé dva vektory $u = (u_1, \dots, u_n)$ a $v = (v_1, \dots, v_n)$ z množiny D v (78). Potom začiatočná úloha (75) má práve jedno riešenie, ktoré existuje na istom intervale $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ s $t_0 \in \mathcal{J}^o$.

Dôkaz Vety 13.

Tvrdenie vyplýva z kombinácie Vety 11 a Picardovej–Lindelöfovej Vety 3. ∎

Poznámka 9 (Lipschitzova podmienka)

Poznamenajme, že podobne ako v Poznámke 4 platí pozorovanie, že ak funkcia $f(t, z_1, \ldots, z_n)$ definovaná na konvexnej oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ má ohraničené parciálne derivácie podľa premenných $z_1, \ldots, z_n$ na množine Ω, potom spĺňa Lipschitzovu podmienku (79) na Ω vzhľadom na premenné $z_1, \ldots, z_n$.

Príklad 3

Uvažujme diferenciálnu rovnicu tretieho rádu tvaru

$$y''' = yy' + (y'')^2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

Funkcia $f(t, z_1, z_2, z_3) := z_1 z_2 + z_3^2 - t$ je zrejme spojitá a má spojité i parciálne derivácie podľa premenných z_1, z_2, z_3 na celom $\mathbb{R}^4$. Preto je f lokálne lipschiztovská na $\mathbb{R}^4$, viz Definícia 2, vzhľadom na premenné z_1, z_2, z_3. V súlade s Vetou 13 má začiatočná úloha (75) s $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$ jediné úplné riešenie, konkrétne sa jedná o funkciu $\varphi(t) = t$ pre každé $t \in \mathbb{R}$.