M5160 Obyčajné diferenciálne rovnice I

Stabilita systémov diferenciálnych rovníc

Peter Šepitka

zima 2022

Obsah

Obsah

Nech $n \in \mathbb{N}$ je daný index, $t_0 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ daný bod. Uvažujme množiny

$$\mathcal{I} := [t_0, \infty), \qquad D := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < a\}. \tag{1}$$

Počas prednášky budeme pracovať so systémom diferenciálnych rovníc tvaru

$$x' = f(t, x), \tag{2}$$

kde $f : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^{n+1}$ je daná spojitá $(n+1)$-vektorá funkcia. Pod pojmom riešenie systému (2) budeme vždy myslieť ω-úplné riešenie definované na celom nekonečnom intervale $\mathcal{I}$ v (1). Budeme skúmať vlastnosti riešení systému (2) na $\mathcal{I}$ v závislosti na ich začiatočných podmienkach v bode t_0. Obzvlášť nás bude zaujímať stabilita riešení systému (2). Intuitívne je tento pojem založený na myšlienke, že riešenie φ systému (2) je stabilné, ak každé iné riešenie ψ systému (2), ktoré je v bode t_0 dostatočne blízko k riešeniu φ, si túto vlastnosť v istom zmysle zachová na celom intervale $\mathcal{I}$. K najvýnamnejším priekopníkom teórie stability diferenciálnych systémov bol ruský matematik a fyzik A. M. Ljapunov (1857–1918). Jeho prístup k problematike stability diferenciálnych systémov je jeden z najznámejších a dodnes úspešne používaných.

Ljapunovská stabilita

Definícia 1 (Stabilita riešenia)

Hovoríme, že riešenie φ systému (2) je (ljapunovsky) stabilné, ak pre každé $\varepsilon > 0$ a každý bod $\tau \geq t_0$ existuje $\delta > 0$ (závislé na ε a τ) s vlastnosťou

$$\text{ak riešenie } \psi \text{ systému (2) spĺňa } \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| < \delta, \text{ potom riešenie } \psi \\ \text{existuje na celom intervale } [\tau, \infty) \text{ a platí } \|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \text{ pre každé } t \geq \tau. \tag{3}$$

V opačnom prípade sa riešenie φ (2) nazýva nestabilné.

Definícia 2 (Rovnomerná stabilita riešenia)

Hovoríme, že riešenie φ systému (2) je rovnomerne stabilné, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (závislé na ε) také, že pre každé $\tau \geq t_0$ platí podmienka (3).

Poznámka 1

Z Definícií 1 a 2 je zrejmé, že každé riešenie systému (2), ktoré je rovnomerne stabilné, je zároveň aj (ljapunovsky) stabilné.

Definícia 3 (Asymptotická stabilita riešenia)

Riešenie φ systému (2) sa označuje ako asymptoticky stabilné, ak je stabilné v zmysle Definície 1 a pre každý bod $\tau \geq t_0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\text{ak riešenie } \psi \text{ systému (2) spĺňa } \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| < \delta, \text{ potom}$$
$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0 \tag{4}$$

Definícia 4 (Globálna asymptotická stabilita riešenia)

Riešenie φ systému (2) sa označuje ako globálne asymptoticky stabilné, ak pre každé riešenie ψ systému (2) platí $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$.

Definícia 5 (Exponenciálna stabilita riešenia)

Riešenie φ systému (2) sa označuje ako exponenciálne stabilné, ak existujú kladné konštanty K, α a δ také, že pre každé $\tau \geq t_0$ je riešenie ψ systému (2) spĺňajúce $\|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| < \delta$ definované na celom intervale $[\tau, \infty)$ a platí

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq K\|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\|\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \quad \text{pre každé } t \geq \tau. \tag{5}$$

Poznámka 2

Analýzou Definícií 1–5 nie je ťažké dokázať implikácie

$$\text{Globálna asymptotická stabilita} + \text{Stabilita}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Asymptotická stabilita}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Stabilita},$$

resp. implikácie

$$\text{Exponenciálna stabilita}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Asymptotická stabilita}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Stabilita},$$

resp. implikáciu

$$\text{Exponenciálna stabilita}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Rovnomerná stabilita}.$$

Príklad 1

Priamo z definície ukážeme, že každé riešenie rovnice

$$x' = 0$$

je rovnomerne stabilné, ale žiadne nie je asymptoticky stabilné. Riešenia rovnice v zadaní majú zrejme tvar $x \equiv C$ na celom $\mathbb{R}$, kde $C \in \mathbb{R}^n$ je vhodná konštanta. Nech φ a ψ sú dve rôzne riešenia, t.j., $\varphi(t) = C_\varphi$ a $\psi(t) = C_\psi$, $C_\varphi \neq C_\psi$, pre každé $t \in \mathbb{R}$. Keďže platí

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| = \|C_\psi - C_\varphi\| \quad \text{pre každé } t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

v súlade s Definíciou 2 pre každé $\varepsilon > 0$ môžeme vziať ľubovoľné $0 < \delta \leq \varepsilon$ a máme zaručenú vlastnosť (3) pre každé $\tau \in \mathbb{R}$. Skutočne, ak

$$\|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| < \delta, \text{ potom } \|\psi(t) - \varphi(t)\| \overset{(6)}{=} \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| < \delta \leq \varepsilon \text{ pre každé } t \geq \tau.$$

Riešenie φ je teda rovnomerne stabilné. Na druhej strane máme

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| \overset{(6)}{=} \|C_\psi - C_\varphi\| \neq 0,$$

preto vzhľadom na Definíciu 3 riešenie φ nie je asymptoticky stabilné.

Príklad 2

Dokážeme, že každé riešenie rovnice

$$x' = -x, \quad \mathcal{I} = [0, \infty),$$

je asymptoticky stabilné. Elementárnym výpočtom zistíme všeobecné riešenie tvaru $x(t) = C\mathrm{e}^{-t}$, $C \in \mathbb{R}^n$, definované na celom $\mathcal{I}$. Nech φ a ψ sú dve riešenia, t.j., $\varphi(t) = C_\varphi \mathrm{e}^{-t}$ a $\psi(t) = C_\psi \mathrm{e}^{-t}$, $C_\varphi \neq C_\psi$. Pre každé $\tau \in \mathcal{I}$ platí

$$\varphi(t) = \varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}, \quad \psi(t) = \psi(\tau)\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{7}$$

Následne dostávame

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| \overset{(7)}{=} \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}, \quad t, \tau \in \mathcal{I}. \tag{8}$$

Keďže pre každé dané $\tau \in \mathcal{I}$ je $\mathrm{e}^{-(t-\tau)} \leq 1$ pre $t \geq \tau$, máme

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\|, \quad t \geq \tau,$$

t.j., podľa Definície 1 je riešenie φ stabilné. Naviac, pre každú voľbu $\tau \in \mathcal{I}$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| \overset{(8)}{=} \|\psi(\tau) - \varphi(\tau)\| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(t-\tau)} = 0,$$

t.j., v zhode s Definíciou 3 je riešenie φ i asymptoticky stabilné. V súlade s Definíciami 4 a 5 sa dokonca jedná o globálnu asymptotickú stabilitu i exponenciálnu stabilitu, nakoľko rovnosť (8) korešponduje s nerovnosťou (5).

Príklad 3

Vyšetrime stabilitu nulového riešenia $\varphi \equiv 0$ systému

$$x' = ax, \quad \mathcal{I} = [0, \infty),$$

v závislosti na reálnej konštante a. Všeobecné riešenie tohto systému má zrejme tvar $x(t) = C\mathrm{e}^{at}$, $C \in \mathbb{R}^n$, pre každé $t \in \mathcal{I}$. Keďže platí

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{at} = \begin{cases} \infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases}$$

dostávame, že nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ je pre každé $a \leq 0$ rovnomerne stabilné, pre každé $a < 0$ naviac i (globálne) asymptoticky a exponenciálne stabilné a pre každé $a > 0$ nestabilné.

Príklad 4

Nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ na intervale $\mathcal{I} = [0, \infty)$ diferenciálnej rovnice

$$y^{(4)} - y^{(3)} + y'' - y' = 0$$

je nestabilné, nakoľko jedna skupina jej riešení je $y(t) = C\mathrm{e}^{t}$, $C \in \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{I}$.

Príklad 5

Ukážme, že nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ rovnice

$$x' = -x^3, \quad \mathcal{I} = [0, \infty),$$

je rovnomerne stabilné i (globálne) asymptoticky stabilné, ale nie je exponenciálne stabilné. Pre každú začiatočnú podmienku $x(\tau) = \eta$, $\tau \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}$, má odpovedajúce jediné ω-úplné riešenie ψ tvar

$$\psi(t) = \frac{\eta}{\sqrt{1 + 2\eta^2(t-\tau)}}, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{9}$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Pre každú voľbu bodu $[\tau, \eta] \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}$ máme

$$|\psi(t)| \overset{(9)}{=} \left| \frac{\eta}{\sqrt{1 + 2\eta^2(t-\tau)}} \right| \leq |\eta| = |\psi(\tau)|, \quad t \geq \tau, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty} |\psi(t)| \overset{(9)}{=} \lim_{t\to\infty} \left| \frac{\eta}{\sqrt{1 + 2\eta^2(t-\tau)}} \right| = 0. \tag{11}$$

Nerovnosť (10) v súlade s Definíciou 2 znamená, že riešenie φ je rovnomerne stabilné, kým podmienka (11) podľa Definícií 3 a 4 zaručuje jeho (globálnu) asymptotickú stabilitu. Predpokladajme, že riešenie φ je i exponenciálne stabilné.

Príklad 5

V súlade s Definíciou 5 existujú kladné konštanty K, α a δ tak, že platí

$$\text{ak } |\psi(\tau)| = |\eta| < \delta, \text{ potom } |\psi(t)| \overset{(9)}{=} \frac{|\eta|}{\sqrt{1+2\eta^2(t-\tau)}} \overset{(5)}{\leq} K|\eta|\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \qquad (12)$$

pre každé $\tau \in \mathcal{I}$ a pre každé $t \geq \tau$. Obvzlášť, z nerovnosti v (12) vyplýva

$$\text{pre každé } 0 < |\eta| < \delta \text{ platí } \frac{\sqrt{1+2\eta^2(t-\tau)}}{\mathrm{e}^{\alpha(t-\tau)}} \geq \frac{1}{K} > 0 \quad \text{pre každé } t \geq \tau. \qquad (13)$$

Avšak nie je ťažké ukázať, že limita

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1+2\eta^2(t-\tau)}}{\mathrm{e}^{\alpha(t-\tau)}} = 0 \quad \text{pre každé } \eta \in \mathbb{R},$$

čo je zjavný spor s nerovnosťou v (13). Preto nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ nemôže byť exponenciálne stabilné.

Príklad 6

Konštantné riešenie $\varphi \equiv 1$ rovnice $x' = x(1-x)$ na intervale $\mathcal{I} = [0,\infty)$ je síce exponenciálne stabilné, ale nie je globálne asymptoticky stabilné, pretože pre nulové riešenie $\psi \equiv 0$ na $\mathcal{I}$ platí $\lim_{t\to\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = \lim_{t\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

Pri vyšetrovaní stability nejakého daného riešenia φ systému (2) je štandarné a výhodné vykonať transformáciu

$$y := x - \varphi, \tag{14}$$

pomocou ktorej získame nový systém diferenciálnych rovníc tvaru

$$y' = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi). \tag{15}$$

Výhodou transformácie (14) je pozorovanie, že pôvodnému riešeniu φ systému (2) odpovedá triviálne (identicky) nulové riešenie $y \equiv 0$ na $\mathcal{I}$ transformovaného systému (15). Obzvlášť, vzhľadom na Definície 1–5 majú riešenia φ a $y \equiv 0$ rovnaké vlastnosti stability. Obmedzíme sa preto – bez ujmy na všeobecnosti – na systémy, ktoré majú konštantné identicky nulové riešenie a budeme vyšetrovať jeho stabilitu. Každý takýto systém sa dá vyjadriť v tvare

$$x' = A(t)x + b(t, x), \tag{16}$$

kde $A : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ je $n \times n$ spojitá maticová funkcia a $b : \mathcal{I} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá n-vektorá funkcia s vlastnosťou $b(t, 0) = 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Doplňme, že uvažujeme množiny $\mathcal{I}$ a D sú definované v (1). Výhody práce so systémom (2) v tvare (16) sa v teórii stability ukážu v nasledujúcich sekciách.

Obsah

Stabilita homogénneho lineárneho systému

Spolu so systémom (16) budeme uvažovať jeho homogénny lineárny systém

$$x' = A(t)x. \tag{17}$$

Lema 1

Nech X je $n \times n$ maticová funkcia spojitá na intervale $\mathcal{I}$. Predpokladajme, že existuje nezáporná funkcia $\varepsilon : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ a kladné číslo δ s vlastnosťou

$$\|X(t)\,\eta\| \le \varepsilon(t) \quad \textit{pre každé } \eta \in \mathbb{R}^n \textit{ s } \|\eta\| \le \delta \textit{ a pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{18}$$

Potom existuje kladná konštanta K s vlastnosťou

$$\|X(t)\| \le K\varepsilon(t) \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{19}$$

Dôkaz Lemy 1.

Ak $\xi \in \mathbb{R}^n$ je vektor s $\|\xi\| \le 1$, potom $\|\delta\xi\| \le \delta$, a tak v súlade s (18) máme

$$\|X(t)(\delta\xi)\| \le \varepsilon(t), \quad \text{t.j.,} \quad \|X(t)\,\xi\| \le \delta^{-1}\varepsilon(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{20}$$

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme súčtovú vektorovú normu. Potom každý vektor e_j, $j = 1, \ldots, n$, kanonickej bázy priestoru $\mathbb{R}^n$ zrejme spĺňa $\|e_j\| = 1$, a nakoľko $X(t)\,e_j = (x_{1j}(t), \ldots, x_{nj}(t))^T$ pre $j = 1, \ldots, n$, pomocou (20) máme

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{ij}(t)| = \|(x_{1j}(t), \dots, x_{nj}(t))^T\| \overset{(20)}{\leq} \delta^{-1}\varepsilon(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{21}$$

pre každé $j = 1, \dots, n$. Následne dostávame

$$\|X(t)\| = \sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}(t)| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{ij}(t)| \right) \overset{(21)}{\leq} n\delta^{-1}\varepsilon(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

t.j., platí nerovnosť (19) pre $K := n\delta^{-1}$. Dôkaz je hotový. ∎

Veta 1

Nech X je nejaká daná fundamentálna matica homogénneho systému (17). Potom nulové riešenie systému (17) je (ljapunovsky) stabilné práve vtedy, keď existuje kladná konštanta L s vlastnosťou $\|X(t)\| \leq L$ pre každé $t \in \mathcal{I}$.

Dôkaz Vety 1.

Pripomeňme, že každé riešenie ψ lineárneho systému (17), ktoré v bode $\tau \geq t_0$ má danú hodnotu $\psi(\tau) = \eta$, je možné pomocou matice X reprezentovať v tvare

$$\psi(t) = X(t)\, X^{-1}(\tau)\, \eta, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{22}$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Nech nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je stabilné a zvoľme dané $\varepsilon > 0$. V súlade s vlastnosťou (3) v Definíciou 1 existuje $\delta > 0$ také, že ak ψ je riešenie systému (17) a $\psi(t_0) = \eta$ spĺňajúce $\|\eta\| < \delta$, potom platí nerovnosť

$$\|\psi(t)\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{23}$$

Podľa formuly (22) pre $\tau := t_0$ následne máme

$$\|X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\eta\| \overset{(22)}{=} \|\psi(t)\| \overset{(23)}{<} \varepsilon, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{24}$$

Z Lemy 1 potom vieme, že existuje kladná konštanta K s vlastnosťou

$$\|X(t)\,X^{-1}(t_0)\| \overset{(24),(19)}{\leq} K\varepsilon, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{25}$$

Napokon vďaka submultiplikatívnosti danej maticovej normy dostávame

$$\|X(t)\| = \|X(t)\,X^{-1}(t_0)\,X(t_0)\| \leq \|X(t)\,X^{-1}(t_0)\| \cdot \|X(t_0)\| \overset{(25)}{\leq} K\varepsilon\|X(t_0)\|$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Fundamentálna matica X teda spĺňa nerovnosť v tvrdení vzhľadom na konštantu $L := K\varepsilon\|X(t_0)\| > 0$. Naopak, nech fundamentálna matica X systému (17) je ohraničená na intervale $\mathcal{I}$, t.j. existuje $L > 0$ také, že

$$\|X(t)\| \leq L \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{26}$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Zvoľme $\varepsilon > 0$ a bod $\tau \geq t_0$ a položme

$$\delta := \frac{\varepsilon}{L\|X^{-1}(\tau)\|} > 0. \tag{27}$$

Nech ψ je riešenie systému (17) s $\psi(\tau) = \eta$, pričom $\|\eta\| < \delta$. Kombináciou (22) a (27) postupne dostávame

$$\|\psi(t)\| \overset{(22)}{=} \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\eta\| \leq \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(\tau)\| \cdot \|\eta\|$$

$$\overset{(26)}{<} L\delta\|X^{-1}(\tau)\| \overset{(27)}{=} \varepsilon \quad \text{pre každé } t \geq \tau.$$

Podľa Definície 1 je teda nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) stabilné. ∎

Dôsledok 1

Nech matica A systému (17) je konštantná na intervale $\mathcal{I}$. Potom nulové riešenie systému (17) je stabilné práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má nekladnú reálnu časť a vlastné čísla s nulovou reálnou časťou sú jednoduché.

Dôkaz Dôsledku 1.

Tvrdenie priamo vyplýva z Vety 1 a z vlastností systému (17). ∎

Veta 2

Nech X je nejaká daná fundamentálna matica homogénneho systému (17). Potom nulové riešenie systému (17) je rovnomerne stabilné práve vtedy, keď existuje kladná konštanta L s vlastnosťou

$$\|X(t)\,X^{-1}(\tau)\| \leq L \quad \text{pre každé } t, \tau \in \mathcal{I} \text{ spĺňajúce } t \geq \tau. \tag{28}$$

Dôkaz Vety 2.

Tvrdenie sa dokáže analogicky ako Veta 1. Dôležitým faktom je, že číslo δ v Definícii 2 nezávisí na voľbe bodu $\tau \geq t_0$. To znamená, že nerovnosť (25) platí nielen pre body t_0 a $t \geq t_0$, ale pre každé body τ a $t \geq \tau$. Okrem toho, v dôkaze Lemy 1 vidíme, že daná konštanta $K = n\delta^{-1}$, t.j., nezávisí na výbere bodu τ. V druhej časti dôkazu Vety 1 teraz v (27) volíme $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. ■

Dôsledok 2

Nech matica A systému (17) je konštantná na intervale $\mathcal{I}$. Potom nulové riešenie systému (17) je rovnomerne stabilné práve vtedy, keď je stabilné. Podľa Dôsledku 1 je to práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má nekladnú reálnu časť a vlastné čísla s nulovou reálnou časťou sú jednoduché.

Dôkaz Dôsledku 2.

Tvrdenie priamo vyplýva z Vety 2 a z vlastností systému (17). Je nutné si uvedomiť, že ak X je ľubovoľná daná fundamentálna matica systému (17), potom pre každé $\tau \in \mathcal{I}$ je i $\Phi(t,\tau) := X(t)\,X^{-1}(\tau)$ fundamentálna matica systému (17) s vlastnosťou $\Phi(\tau,\tau) = I_n$, t.j., platí $\Phi(t,\tau) = \mathrm{e}^{A(t-\tau)}$ pre každé $t, \tau \in \mathcal{I}$. ∎

Veta 3

Nech X je nejaká daná fundamentálna matica homogénneho systému (17). *Potom nulové riešenie systému* (17) *je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď platí*

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0. \tag{29}$$

Dôkaz Vety 3.

Nech nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je asymptoticky stabilné. Zvoľme bod $\tau \geq t_0$ a nech $\delta > 0$ je k nemu odpovedajúce číslo z Definície 3. Nech ψ je riešenie systému (17) s $\psi(\tau) = \eta$, kde vektor $\|\eta\| \leq \delta$. V súlade s podmienkou (4) potom platí $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0$. Kombináciou s (22) máme

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\eta\| \overset{(22)}{=} \lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0. \tag{30}$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že nutne

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\| = 0. \tag{31}$$

Skutočne, ak uvažujeme vektory $\eta_j := \delta e_j$, $j = 1, \ldots, n$, potom $\|\eta_j\| = \delta$ pre každé $j = 1, \ldots, n$ a následne využitím (30) dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\| &= \delta^{-1} \lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\, (\delta I_n)\| \\
&= \delta^{-1} \lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\, \eta_j\| \\
&= \delta^{-1} \sum_{j=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\, \eta_j\| \overset{(30)}{=} 0,
\end{aligned}$$

t.j., platí (31). Využitím submultiplikatívnosti maticovej normy dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\, X(\tau)\| \leq \lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\| \cdot \|X(\tau)\| \overset{(31)}{=} 0,$$

čo dokazuje rovnosť (29). Naopak, ak fundamentálna matica X spĺňa podmienku (29), potom vzhľadom na reprezentáciu v (22) pre každú danú voľbu bodu $\tau \geq t_0$ a pre každé vektorové riešenie ψ systému (17) platí

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| \overset{(22)}{=} \lim_{t\to\infty} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\, \eta\| \leq \lim_{t\to\infty} \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(\tau)\, \eta\| \overset{(29)}{=} 0.$$

Podmienka (4) v Definícií 3 je teda splnené. Ukážeme ešte stabilitu nulového riešenie systému (17). Z rovnosti (29) vyplýva, že fundamentálna matica X je ohraničená na intervale $\mathcal{I}$, t.j., pre vhodné $L > 0$ spĺňa nerovnosť $\|X(t)\| \leq L$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Podľa Vety 1 je teda zaručená stabilita riešenia $\varphi \equiv 0$ systému (29), a tak v súlade s Definíciou 3 i jeho asymptotická stabilita. ∎

Dôsledok 3

Nulové riešenie systému (17) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď je globálne asymptoticky stabilné, t.j.,

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0 \quad \textit{pre každé riešenie } \psi \textit{ systému } (17).$$

Dôkaz Dôsledku 3.

Tvrdenia vyplýva z Definície 4, z Vety 3 a z vlastností množiny všetkých vektorových riešení homogénneho lineárneho systému (17). ∎

Dôsledok 4

Nech matica A systému (17) je konštantná na intervale $\mathcal{I}$. Potom nulové riešenie systému (17) je (globálne) asymptoticky stabilné práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má zápornú reálnu časť.

Dôkaz Dôsledku 4.

Tvrdenie priamo vyplýva z Vety 3, Dôsledku 3 a z vlastností systému (17). ■

Nech p je polynóm stupňa $n \geq 1$ s reálnymi koeficientami tvaru

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad a_n > 0. \tag{32}$$

Matica $H(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definovaná predpisom

$$H(p) := \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

sa nazýva Hurwitzova matica polynómu p. Nasledujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu, poskytuje isté kritérium umožňujúce pomocou vlastností matice $H(p)$ v (33) rozhodnúť o znamienkach reálnych častí koreňov polynómu p v (32).

Veta 4 (Routhovo–Hurwitzovo kritérium)

Každý koreň polynómu p v (32) má zápornú reálnu časť práve vtedy, keď Hurwitzova matica $H(p)$ v (33) má všetky vedúce hlavné minory kladné.

Poznámka 3

Konštrukcia Hurwitzovej matice $H(p)$ polynómu p v (32) je naznačená v (33). V prípade, ak potrebujeme do danej matice umiestniť koeficient polynómu p s indexom väčším ako n, resp. menším ako 0, doplníme nulu. Tiež poznamenajme, že polynóm p stupňa $n \geq 1$ s reálnymi koeficientami sa označuje prívlastkom stabilný, ak všetky jeho korene majú záporné reálne časti.

Veta 5

Nech X je nejaká daná fundamentálna matica homogénneho systému (17). Potom nulové riešenie systému (17) je exponenciálne stabilné práve vtedy, keď existujú kladné konštanty L a α s vlastnosťou

$$\|X(t)\, X^{-1}(\tau)\| \leq L\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \quad \text{pre každé } t, \tau \in \mathcal{I} \text{ spĺňajúce } t \geq \tau. \tag{34}$$

Dôkaz Vety 5.

Postupujeme analogicky ako pri dôkazoch Viet 1 a 2. Nech nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je exponenciálne stabilné. Nech K, α a δ sú odpovedajúce kladné konštanty v Definíciou 5. Uvažujme daný bod $\tau \geq t_0$ a nech ψ je riešenie systému (17) s $\psi(\tau) = \eta$, pričom $\|\eta\| < \delta$. Potom v súlade s (5) platí nerovnosť

$$\|\psi(t)\| \leq K\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} = K\|\eta\|\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} < K\delta\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \tag{35}$$

Pomocou reprezentácie v (22) následne máme

$$\|X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\eta\| \overset{(22)}{=} \|\psi(t)\| \leq K\delta\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \quad \text{ak } \|\eta\| \leq \delta. \tag{36}$$

Podľa Lemy 1 z relácií v (36) vyplýva, že existuje kladná konštanta L s vlastnosťou $\|X(t)\,X^{-1}(\tau)\| \leq L\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}$ pre každé $t \geq \tau$, t.j., platí nerovnosť (34). Naopak, predpokladajme, že fundamentálna matica X spĺňa nerovnosť (34). Ak ψ je riešenie systému (17), potom ψ je definované na celom intervale $\mathcal{I}$, pričom pre každý bod $\tau \geq t_0$ využitím (22) platí

$$\|\psi(t)\| \overset{(22)}{=} \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\eta\| \leq \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\| \cdot \|\eta\| \overset{(34)}{\leq} L\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}$$

pre každé $t \geq \tau$ nezávisle na norme hodnoty $\psi(\tau) = \eta$. Podmienka (5) v Definícii 5 je teda splnená pre každú voľbu $\delta > 0$. Obzvlášť, nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je exponenciálne stabilné. Dôkaz je kompletný. ∎

Dôsledok 5

Nech matica A systému (17) je konštantná na intervale $\mathcal{I}$. Potom nulové riešenie systému (17) je exponenciálne stabilné práve vtedy, keď je asymptoticky stabilné, t.j., práve vtedy, keď každé vlastné číslo matice A má zápornú reálnu časť.

Dôkaz Dôsledku 5.

V súlade s Poznámkou 2 platí, že exponenciálna stabilita (každého) riešenia systému (17) implikuje jeho asymptotickú stabilitu. Predpokladajme, že nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) s konštantnou maticou A je asymptoticky stabilné. Z teórie systémov lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami vieme, že každá fundamentálna matica X sytému (17) má tvar $X(t) = \mathrm{e}^{At}C$, $t \in \mathcal{I}$, pre nejakú konštantnú regulárnu maticu $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Následne platí

$$X(t)\,X^{-1}(\tau) = \mathrm{e}^{A(t-\tau)} \quad \text{pre každé } t,\tau \in \mathcal{I} \text{ spĺňajúce } t \geq \tau. \tag{37}$$

Podľa Dôsledku 4 majú všetky vlastné čísla matice A, a teda i každej matice $A(t-\tau)$ v (37) pre $t > \tau$, záporné reálne časti. Zo štruktúry matice $\mathrm{e}^{A(t-\tau)}$ následne vyplýva, že existujú kladné čísla L a α s vlastnosťou

$$\|X(t)\,X^{-1}(\tau)\| \overset{(37)}{=} \|\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\| \leq L\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \quad \text{pre každé } t,\tau \in \mathcal{I} \text{ spĺňajúce } t \geq \tau.$$

V súlade s Definíciou 5 to potom znamená, že nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je exponenciálne stabilné a dôkaz je hotový. ■

Príklad 7

Preskúmajme stabilitu nulového riešenia rovnice

$$x' = (\sin \ln t + \cos \ln t - a)x, \quad \mathcal{I} = [1, \infty), \quad 1 < a \leq 5/4.$$

Štandardným spôsobom stanovíme nejaké fundamentálne riešenie, napríklad

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_1^t (\sin \ln s + \cos \ln s - a)\,\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{t \sin \ln t - a(t-1)}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{38}$$

Nie je ťažké odvodiť, že limita

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| \overset{(38)}{=} \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{t \sin \ln t - a(t-1)} = 0. \tag{39}$$

Skutočne, vďaka predpokladu $a > 1$ platí

$$\lim_{t\to\infty} (t \sin \ln t - a(t-1)) = \lim_{t\to\infty} t \left[\sin \ln t - a\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right] = -\infty.$$

Vzhľadom na podmienku (39) je podľa Vety 3 nulové riešenie rovnice v zadaní príkladu asymptoticky stabilné. Nulové riešenie však nie je rovnomerne stabilné. Konkrétne, ukážeme, že v súlade s Vetou 6 neexistuje univerzálna konštanta $L > 0$, t.j., nezávislá na $t, \tau \in \mathcal{I}$, s vlastnosťou (28). Pomocou (38) máme

$$|x(t)\, x^{-1}(\tau)| \overset{(38)}{=} \mathrm{e}^{t \sin \ln t - \tau \sin \ln \tau - a(t-\tau)} \quad \text{pre každé } t, \tau \in \mathcal{I} \text{ spĺňajúce } t \geq \tau. \tag{40}$$

Príklad 7

Uvažujme dve postupnosti $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}, \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}$ tvaru

$$t_k := \mathrm{e}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, \quad \tau_k := \mathrm{e}^{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Vďaka monotónnosti a asymptotickým vlastnostiam exponenciálnej funkcie platí

$$\tau_k \overset{(41)}{<} t_k \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k \overset{(41)}{=} \infty \overset{(41)}{=} \lim_{k\to\infty} t_k. \tag{42}$$

Pre fundamentálne riešenia $x(t_k)\,x^{-1}(\tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$, následne dostávame

$$\begin{aligned} |x(t_k)\,x^{-1}(\tau_k)| &\overset{(40)}{=} \mathrm{e}^{t_k \sin\ln t_k - \tau_k \sin\ln \tau_k - a(t_k-\tau_k)} \\ &\overset{(41)}{=} \mathrm{e}^{t_k \sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}) - \tau_k \sin 2k\pi - a(t_k-\tau_k)} = \mathrm{e}^{a\tau_k-(a-1)t_k}. \end{aligned} \tag{43}$$

Z (43) v kombinácii s (42) a $a\tau_k - (a-1)t_k > \tau_k/50$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ vyplýva

$$\lim_{k\to\infty} |x(t_k)\,x^{-1}(\tau_k)| \overset{(43)}{=} \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{a\tau_k-(a-1)t_k} \geq \lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{\tau_k/50} \overset{(42)}{=} \infty.$$

Posledná limitná vlastnosť dokazuje, že podmienka (28) nie je splnená pre žiadnu jedinú konštantnu $L > 0$. Nulové riešenie rovnice v zadaní príkladu teda skutočne nie je rovnomerne stabilné. Naviac, podľa poslednej implikácie v Poznámke 2 toto riešenie nemôže byť ani exponenciálne stabilné.

Príklad 8

Rozhodnime o stabilite lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 7y^{(3)} + 4y'' + 10y' + 3y = 0, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}.$$

Jedná sa o lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštatnými koeficientami. Odpovedajúci charakteristický polynóm rovnice má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3. \tag{44}$$

Využitím Routhovho–Hurwitzovho kritéria vo Vete 4 ukážeme, že polynóm p v (44) je stabilný, t.j., v súlade s Poznámkou 3 každý jeho koreň má zápornú reálnu časť. V zhode so zápisom (32) má polynóm p koeficienty

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 10, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1. \tag{45}$$

Následne pre príslušnú Hurwitzovu maticu $H(p)$ v (33) pomocou (45) platí

$$H(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Všetky vedúce hlavné minory matice $H(p)$ v (46) sú kladné. Polynóm p je preto stabilný a podľa Dôsledku 4 je rovnica v zadaní príkladu asymptoticky stabilná.

Stabilita nelineárneho systému

Veta 6

Nech nulové riešenie homogénneho systému (17) je rovnomerne stabilné a nech funkcia b v (16) má vlastnosť

$$\|b(t,x)\| \leq \gamma(t)\,\|x\| \quad \textit{pre každé } [t,x] \in \mathcal{I} \times D, \tag{47}$$

kde $\gamma : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkcia spĺňajúca podmienku

$$\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)\,\mathrm{d}s < \infty. \tag{48}$$

Potom nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) je rovnomerne stabilné.

Dôkaz Vety 6.

Zvoľme bod $\tau \in \mathcal{I}$ a nech ψ je nejaké dané riešenie systému (16), ktoré existuje na vhodnom pravom okolí bodu τ. Analogickým spôsobom ako pri lineárnych systémoch (metódou variácie konštánt) odvodíme integrálne vyjadrenie

$$\psi(t) = X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau) + \int_{\tau}^{t} X(t)\,X^{-1}(s)\,b(s,\psi(s))\,\mathrm{d}s, \tag{49}$$

kde X je ľubovoľná pevne zvolená fundamentálna matica systému (17) a $t \geq \tau$

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

je každý bod, v ktorom je riešenie ψ definované. V súlade s predpokladmi matica X spĺňa podľa Vety 2 nerovnosť (28) pre vhodnú konštantu $L > 0$. V kombináciou s (49) a podmienkou (47) dostávame

$$\|\psi(t)\| \overset{(49)}{\leq} \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\|\,\|\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \|X(t)\,X^{-1}(s)\|\,\|b(s,\psi(s))\|\,\mathrm{d}s$$

$$\overset{(28)}{\leq} L\,\|\psi(\tau)\| + L\int_\tau^t \|b(s,\psi(s))\|\,\mathrm{d}s \overset{(47)}{\leq} L\,\|\psi(\tau)\| + L\int_\tau^t \gamma(s)\,\|\psi(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Z odvodenej nerovnosti pomocou Gronwallovej lemy vyplýva, že platí

$$\|\psi(t)\| \leq L\,\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{L\int_\tau^t \gamma(t)\,\mathrm{d}s} \overset{(48)}{\leq} \underbrace{L\mathrm{e}^{L\int_{t_0}^\infty \gamma(s)\mathrm{d}s}}_{=:K}\|\psi(\tau)\| = K\,\|\psi(\tau)\| \tag{50}$$

pre každé $t \geq \tau$, pre ktoré riešenie ψ existuje. Nech $\varepsilon \in (0,a)$ s a definovaným v (1) je dané a položme $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$. Potom pre každé riešenie ψ systému (16) spĺňajúce $\|\psi(\tau)\| < \delta$ podľa (50) platí $\|\psi(t)\| < K\delta = \varepsilon < a$ pre každé prípustné $t \geq \tau$. Z vlastností úplných riešení následne vyplýva, že riešenie ψ je definované pre každé $t \geq \tau$ a $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ na $[\tau,\infty)$. Nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) teda spĺňa vlastnosť (3) s hodnotou $\delta > 0$ nezávislou na výbere bodu $\tau \in \mathcal{I}$. V súlade s Definíciou 2 je preto riešenie φ rovnomerne stabilné. ■

Veta 7

Nech fundamentálna matica X systému (17) spĺňa pre isté $K > 0$ vlastnosť

$$\int_{t_0}^{t} \|X(t)\, X^{-1}(s)\| \, \mathrm{d}s \le K \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}, \tag{51}$$

a nech pre funkciu b v (16) existuje kladná konštanta $\gamma < K^{-1}$ taká, že

$$\|b(t,x)\| \le \gamma \|x\| \quad \text{pre každé } [t,x] \in \mathcal{I} \times D. \tag{52}$$

Potom nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) je asymptoticky stabilné.

Dôkaz Vety 7.

Najprv ukážeme, že podmienka (51) implikuje vlastnosť (29), t.j., $\|X(t)\| \to 0$ pre $t \to \infty$. Definujme skalárnu funkciu

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|^{-1} \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{53}$$

Zrejme $c'(t) = \|X(t)\|^{-1} > 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$ a následne máme

$$\frac{c(t)}{c'(t)} \overset{(53)}{=} \|X(t)\| \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|^{-1} \, \mathrm{d}s = \left\| \int_{t_0}^{t} X(t)\, \|X(s)\|^{-1} \, \mathrm{d}s \right\|$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} X(t)\, X^{-1}(s)\, X(s)\, \|X(s)\|^{-1} \mathrm{d}s \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|X(t)\, X^{-1}(s)\|\, \|X(s)\|\, \|X(s)\|^{-1} \mathrm{d}s$$

$$= \int_{t_0}^{t} \|X(t)\, X^{-1}(s)\|\, \mathrm{d}s \overset{(51)}{\leq} K \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{54}$$

Funkcia c teda podľa (54) spĺňa nerovnosť $c'(t) \geq K^{-1} c(t)$ na intervale $\mathcal{I}$, z čoho po jednoduchej úprave dostávame $[c(t)\, \mathrm{e}^{-K^{-1}(t-t_0)}]' \geq 0$ na $\mathcal{I}$. Výraz $c(t)\, \mathrm{e}^{-K^{-1}(t-t_0)}$ je teda neklesajúca na $\mathcal{I}$, t.j., platí

$$c(t)\, \mathrm{e}^{-K^{-1}(t-t_0)} \geq c(\tau)\, \mathrm{e}^{-K^{-1}(\tau-t_0)} \quad \longrightarrow \quad c(t) \geq c(\tau)\, \mathrm{e}^{K^{-1}(t-\tau)} \tag{55}$$

pre každé $t, \tau \in \mathcal{I}$ s $t \geq \tau$. To znamená, že

$$\lim_{t\to\infty} c(t) \overset{(55)}{=} \infty, \quad \text{a tak} \quad \lim_{t\to\infty} \|X(t)\| \overset{(53)}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{c'(t)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{K}{c(t)} = 0.$$

Obvzlášť, nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (17) je podľa Vety 3 asymptoticky stabilné. Naviac, norma $\|X\|$ je ohraničená na intervale $\mathcal{I}$, t.j., existuje $L > 0$ také, že $\|X(t)\| \leq L$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Analogicky ako v dôkaze Vety 6 pre každé dané $\tau \in \mathcal{I}$ a každé dané riešenie ψ systému (16) platí formula (49) pre každé $t \geq \tau$, v ktorom je riešenie ψ definované. Zvoľme pevne bod $\tau \in \mathcal{I}$. Potom

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\|\psi(t)\| \overset{(49)}{\leq} \|X(t)\| \, \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \|X(t)\,X^{-1}(s)\| \, \|b(s,\psi(s))\| \, \mathrm{d}s$$

$$\overset{(52)}{\leq} L\,\|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \gamma \int_\tau^t \|X(t)\,X^{-1}(s)\| \, \|\psi(s)\| \, \mathrm{d}s, \quad t \geq \tau. \tag{56}$$

Ak zavedieme funkciu

$$S(t) := \sup_{s\in[\tau,t]} \|\psi(s)\| \quad \text{pre každé } t \geq \tau, \text{ v ktorom } \psi \text{ existuje}, \tag{57}$$

potom pomocou (56) získame odhad

$$\|\psi(t)\| \overset{(56),(57),(51)}{\leq} L\,\|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \gamma K S(t), \quad t \geq \tau. \tag{58}$$

Z relácie (57) je zrejmé, že funkcia S je nezáporná a neklesajúca. Preto pomocou (58) pre $t \geq \tau$ máme ďalej odhad

$$S(t) \overset{(57)}{=} \sup_{s\in[\tau,t]} \|\psi(s)\| \overset{(58)}{\leq} \sup_{s\in[\tau,t]} \left(L\,\|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \gamma K S(s)\right)$$

$$= L\,\|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \gamma K \sup_{s\in[\tau,t]} S(s) = L\,\|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \gamma K S(t), \tag{59}$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

z čoho pre funkciu S napokon dostávame

$$S(t) \overset{(59)}{\leq} \frac{L}{1-\gamma K} \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\|, \qquad t \geq \tau. \tag{60}$$

Kombináciou (57) a odhadu (60) napokon máme

$$\|\psi(t)\| \overset{(57)}{\leq} S(t) \overset{(60)}{\leq} \frac{L}{1-\gamma K} \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| \tag{61}$$

pre každé $t \geq \tau$, v ktorom riešenie ψ existuje. Následne, pre dané $\varepsilon \in (0, a)$ s konštantou a v (1) položme

$$\delta := \frac{\varepsilon(1-\gamma K)}{L\|X^{-1}(\tau)\|} > 0. \tag{62}$$

Nech ψ je riešenie systému (16), ktoré spĺňa podmienku $\|\psi(\tau)\| < \delta$ pre hodnotu $\delta > 0$ v (62). Potom pre každé $t \geq \tau$, pre ktoré je riešenie ψ definované, platí

$$\|\psi(t)\| \overset{(61)}{\leq} \frac{L}{1-\gamma K} \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| \leq \frac{L}{1-\gamma K} \|X^{-1}(\tau)\|\,\|\psi(\tau)\|$$

$$< \frac{L}{1-\gamma K} \|X^{-1}(\tau)\|\delta \overset{(62)}{=} \varepsilon < a \quad \text{pre každé } t \geq \tau, \text{ v ktorom } \psi \text{ existuje.}$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

Odvodená nerovnosť jednak zaručuje existenciu riešenia ψ na celom intervale $[\tau, \infty)$, a jednak v súlade s Definíciou 1 dokazuje stabilitu nulového riešenia $\varphi \equiv 0$ systému (16). Ukážeme, že naviac platí $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0$. Sporom predpokladajme, že uvedené riešenie ψ takúto vlastnosť nemá, t.j., platí

$$\limsup_{t\to\infty} \|\psi(t)\| =: \mu > 0 \tag{63}$$

Existuje teda postupnosť $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq [\tau, \infty)$ taká, že

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \|\psi(t_k)\| = \mu. \tag{64}$$

Keďže podľa predpokladov $\gamma K < 1$, zvoľme číslo $\beta > 1$ tak, aby $\gamma K \beta < 1$. Potom $\mu < \beta\mu$, a tak vzhľadom na (63) existuje dostatočne veľký index $k_0 \in \mathbb{N}$ taký, že platí nerovnosť $\|\psi(t)\| \leq \beta\mu$ pre každé $t \geq t_{k_0}$. Využitím (56) máme

$$\begin{aligned}
\|\psi(t_k)\| &\overset{(56)}{\leq} \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \int_{\tau}^{t_k} \|X(t_k)\,X^{-1}(s)\| \, \|b(s, \psi(s))\| \, \mathrm{d}s \\
&\leq \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(\tau)\,\psi(\tau)\| + \int_{\tau}^{t_{k_0}} \|X(t_k)\,X^{-1}(s)\| \, \|b(s, \psi(s))\| \, \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_{k_0}}^{t_k} \|X(t_k)\,X^{-1}(s)\| \, \|b(s, \psi(s))\| \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\overset{(52)}{\leq} \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(\tau)\, \psi(\tau)\| + \gamma \int_{\tau}^{t_{k_0}} \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(s)\| \, \|\psi(s)\| \, \mathrm{d}s$$

$$+ \gamma \int_{t_{k_0}}^{t_k} \|X(t_k)\, X^{-1}(s)\| \, \|\psi(s))\| \, \mathrm{d}s$$

$$\leq \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(\tau)\, \psi(\tau)\| + \gamma \|X(t_k)\| \int_{\tau}^{t_{k_0}} \|X^{-1}(s)\| \, \|\psi(s)\| \, \mathrm{d}s$$

$$+ \gamma\beta\mu \int_{t_{k_0}}^{t_k} \|X(t_k)\, X^{-1}(s)\| \, \mathrm{d}s$$

$$\overset{(51)}{\leq} \|X(t_k)\| \, \|X^{-1}(\tau)\, \psi(\tau)\| + \gamma \|X(t_k)\| \int_{\tau}^{t_{k_0}} \|X^{-1}(s)\| \, \|\psi(s)\| \, \mathrm{d}s + \gamma K \beta \mu \quad (65)$$

pre každý index $k > k_0$. Následným limitovaním nerovnosti (65) pre $k \to \infty$ a využitím (64) a $\lim_{k\to\infty} \|X(t_k)\| = 0$ dostaneme nerovnosť $\mu \leq \gamma K \beta \mu$, a tak vzhľadom na (63) nerovnosť $1 \leq \gamma K \beta$. Táto nerovnosť je však v rozpore s vyššie zvolenou voľbou čísla β. Preto nutne $\limsup_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0$, čo je ekvivalentné s $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0$. Podľa Definície 3 je teda nulové riešenie φ systému (16) asymptoticky stabilné, čo završuje dôkaz. ■

Veta 8

Nech fundamentálna matica X systému (17) spĺňa podmienku (34) a nech pre funkciu b v (16) platí

$$\|b(t,x)\| \leq \gamma \|x\| \quad \textit{pre každé } [t,x] \in \mathcal{I} \times D, \tag{66}$$

kde γ je kladná konštanta s $\gamma < \alpha L^{-1}$ pre kladné čísla L a α z (34). Potom nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) je exponenciálne stabilné. Konkrétne, pre každý bod $\tau \geq t_0$ každé riešenie ψ systému (16) s podmienkou $\|\psi(\tau)\| \leq aL^{-1}$ existuje na celom intervale $[\tau, \infty)$ a má vlastnosť

$$\|\psi(t)\| \leq L \|\psi(\tau)\| \, \mathrm{e}^{(\gamma L - \alpha)(t-\tau)} \quad \textit{pre každé } t \geq \tau. \tag{67}$$

Dôkaz Vety 8.

Vedenie dôkazu je podobné ako pri prechádzajúcich dvoch tvrdeniach. Zvoľme pevné $\tau \in \mathcal{I}$ a nejaké riešenie ψ systému (16), ktoré existuje na vhodnom pravom okolí bodu τ. Potom platí reprezentácia v (49), pomocou ktorej dostaneme

$$\|\psi(t)\| \overset{(49)}{\leq} \|X(t)\, X^{-1}(\tau)\| \, \|\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \|X(t)\, X^{-1}(s)\| \, \|b(s,\psi(s))\| \, \mathrm{d}s \tag{68}$$

pre každé $t \geq \tau$, v ktorom existuje riešenie ψ. Nerovnosť (68) teraz použijeme v kombinácii s predpokladanými podmienkami (34) a (66). Postupne máme

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

$$\|\psi(t)\| \overset{(68)}{\leq} \|X(t)\,X^{-1}(\tau)\|\,\|\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \|X(t)\,X^{-1}(s)\|\,\|b(s,\psi(s))\|\,\mathrm{d}s$$

$$\overset{(34),(66)}{\leq} L\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\,\|\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \gamma L\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\|\psi(s)\|\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau. \tag{69}$$

Definujme pomocnú funkciu $w(t) := \mathrm{e}^{\alpha(t-\tau)}\,\|\psi(t)\| \geq 0$ pre $t \geq \tau$, v ktorých ψ existuje. V súlade s (69) potom platí

$$w(t) = \mathrm{e}^{\alpha(t-\tau)}\,\|\psi(t)\| \overset{(69)}{\leq} L\|\psi(\tau)\| + \int_\tau^t \gamma L w(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau. \tag{70}$$

Z nerovnosti (70) aplikáciou Gronwallovej lemy vyplýva

$$w(t) \leq L\|\psi(\tau)\|\mathrm{e}^{\int_\tau^t \gamma L\,\mathrm{d}s} = L\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{\gamma L(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \tag{71}$$

Následne pre normu $\|\psi\|$ v každom bode $t \geq \tau$, v ktorom je riešenie ψ definované, platí nerovnosť (67), t.j.,

$$\|\psi(t)\| \overset{(71)}{\leq} L\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{e}^{(\gamma L-\alpha)(t-\tau)}. \tag{72}$$

Keďže číslo $\gamma L - \alpha < 0$, z (72) vyplýva $\|\psi(t)\| \leq L\|\psi(\tau)\| < a$ pre každé $t \geq \tau$, v ktorom riešenie ψ existuje. Z vlastností ω-úplných riešení systému (16) posled-

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

posledná nerovnosť zaručuje existenciu riešenia ψ na celom intervale $[\tau, \infty)$. To napokon znamená, že v súlade s Definíciou 5 je nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) exponenciálne stabilné. Dôkaz je hotový. ■

Všetky predchádzajúce tvrdenia, ktoré sme uviedli, poskytovali niektoré podmienky, ktorá zaručovali, resp. boli ekvivalentné s istým druhom stability nulového riešenia $\varphi \equiv 0$ systému (16), resp. lineárneho systému (17). V nasledujúcej klasickej vete ukážeme jednoduché postačujúce podmienky pre podmienku nestability triviálneho riešenia systému (16), t.j., pre prípad, kedy nulové riešenie systému (16) nie je ljapunovsky stabilné v zmysle Definície 1. Dôkaz je po technickej stránke zložitejší, preto ho pre jednoduchosť nebudeme uvádzať.

Veta 9 (Ljapunovova)

Nech A je reálna konštantná $n \times n$ matica, ktorá má aspoň jedno vlastné číslo s kladnou reálnou časťou. Nech funkcia b v (16) spĺňa podmienku

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|b(t,x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \textit{rovnomerne vzhľadom na } t \in \mathcal{I}. \tag{73}$$

Potom nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (16) je nestabilné.

Poznámka 4 (Stabilita nehomogénneho lineárneho systému)

Je dôležité poznamenať, že ak systém (2) je lineárny, t.j., funkcia

$$f(t,x) := A(t)\,x + b(t), \quad [t,x] \in \mathcal{I} \times D, \tag{74}$$

potom transformovaný systém (15) je pre každé vyšetrované riešenie φ systému (2) lineárny homogénny systém (17), ako sa možno ľahko presvedčiť. Vlastnosti stability jednotlivých riešení lineárneho systému teda nezávisia na výbere daného riešenia, t.j., buď všetky riešenia systému (2) s funkciou f v (74) sú stabilné, resp. rovnomerne stabilné, resp. (globálne) asymptoticky stabilné, resp. exponenciálne stabilné, alebo žiadne z nich nemá odpovedajúcu vlastnosť. Z tohto dôvodu sa často hovorí skôr o stabilite lineárneho systému než o stabilite jeho riešení.

Dôležitou triedou diferenciálnych systémov sú autonómne systémy. Jedná sa o systémy (2), v ktorých funkcia f nezávisí explicitne na premennej t, t.j.,

$$x' = g(x), \quad g : D \to \mathbb{R}^n \text{ je spojitá funkcia.} \tag{75}$$

V tomto prípade môže mať systém (75) konštantné riešenia $\varphi \equiv x_0$ na celom $\mathbb{R}$, kde vektor x_0 je koreňom rovnice $g(x) = 0$ a nazýva sa ekvilibrium (stacionárny bod) systému (75). Obzvlášť zaujímavá a významná je situácia, keď funkcia g je diferencovateľná na okolí ekvilibria x_0 systému (75). V tomto prípade sa štandardne pracuje s transformovaným systémom (16) ($y := x - x_0$) v tvare

$$y' = g'(x_0)\,y + h(y), \quad h(y) := g(y + x_0) - g'(x_0)\,y, \quad \|y + x_0\| < a, \tag{76}$$

kde konštantná $n \times n$ matica $g'(x_0)$ je hodnota Jacobiho matice funkcie g v stacionárnom bode $x = x_0$, t.j.,

$$g'(x_0) := \begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(x_0) & \cdots & (g_1)'_{x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_n)'_{x_1}(x_0) & \cdots & (g_n)'_{x_n}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Veta 10 (Stabilita autonómneho systému)

Nech x_0 je ekvilibrium systému (75) a funkcia g je spojito diferencovateľná na D. Konštantné riešenie $\varphi \equiv x_0$ systému (75) má nasledujúce vlastnosti.

- **(i)** *Riešenie $\varphi \equiv x_0$ je rovnomerne stabilné práve vtedy, keď je stabilné.*
- **(ii)** *Ak lineárny systém $y' = g'(x_0)\,y$ je exponenciálne stabilný, potom riešenie $\varphi \equiv x_0$ je exponenciálne stabilné.*
- **(iii)** *Ak Jacobiho matica $g'(x_0)$ má aspoň jedno vlastné číslo s kladnou reálnou časťou, potom riešenie $\varphi \equiv x_0$ je nestabilné.*

Dôkaz Vety 10.

Predpoklad spojitej diferencovateľnosti funkcie g na svojom definičnom obore D zaručuje, že g je lokálne lipschitzovská na oblasti D, a tak pre každú začiatočnú podmienku $[t, \eta] \in \mathbb{R} \times D$ existuje práve jedno riešenie systému (75). Ak riešenie $\varphi \equiv x_0$ je rovnomerne stabilné, potom v súlade s Poznámkou 1 je i stabilné. Opačná implikácia je dôsledkom špecifických vlastností autonómneho systému (75). Konkrétne, platí vlastnosť

$$\text{ak } \psi(t) \text{ je riešenie systému (75), potom i funkcia } \psi(t+c) \text{ je riešenie systému (75) pre každú konštantu } c \in \mathbb{R}. \tag{78}$$

Doplňme, že ak $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je maximálny interval, na ktorom existuje riešenie ψ, potom $(a - c, b - c) \subseteq \mathbb{R}$ je maximálny interval existencie riešenia $\psi(t + c)$. Predpokladajme, že konštantné riešenie $\varphi \equiv x_0$ je stabilné a nech $\varepsilon > 0$ je dané. Podľa Definície 1 existuje $\delta > 0$ také, ža platí podmienka (3) s $\tau := t_0$, t.j.,

$$\text{ak riešenie } \psi \text{ systému (75) spĺňa } \|\psi(t_0) - x_0\| < \delta, \text{ potom } \psi \text{ existuje na celom intervale } \mathcal{I} \text{ a platí } \|\psi(t) - x_0\| < \varepsilon \text{ pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{79}$$

Zvoľme bod $\tau \geq t_0$ a uvažujme riešenie $\tilde{\psi}$ systému (75), ktoré spĺňa podmienku $\|\tilde{\psi}(\tau) - x_0\| < \delta$. Potom funkcia $\psi(t) := \tilde{\psi}(t + \tau - t_0)$ je podľa (78) tiež riešením systému (75), pričom platí $\psi(t_0) = \tilde{\psi}(\tau)$. Takže v zhode s predpokladom platí $\|\psi(t_0) - x_0\| < \delta$. V súlade s (79) to následne znamená, že riešenie ψ existuje na celom intervale $\mathcal{I}$ a spĺňa nerovnosť $\|\psi(t) - x_0\| < \varepsilon$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Ekviva-

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

lentne, riešenie $\tilde{\psi}$ existuje na celom intervale $[\tau, \infty)$ a spĺňa nerovnosť

$$\|\tilde{\psi}(t) - x_0\| < \varepsilon \quad \text{pre každé } t \geq \tau.$$

Podľa Definície 2 je teda konštantné riešenie $\varphi \equiv x_0$ systému (75) rovnomerne stabilné. Dôkaz tvrdenia (i) je kompletný. Tvrdenie (ii) vyplýva z Vety 8. Keďže funkcia g je spojito diferencovateľná na D, pre funkciu h definovanú v (76) platí

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|h(y)\|}{\|y\|} = 0. \tag{80}$$

Z predpokladu exponenciálnej stability homogénneho systému

$$y' = g'(x_0)\, y \tag{81}$$

podľa Vety 5 vyplýva, že pre jeho každú danú fundamentálnu maticu X existujú kladné konštanty L a α také, že platí nerovnosť (34). Ďalej vlastnosť (80) zaručuje existenciu kladného čísla γ, ktoré spĺňa podmienky

$$\|h(y)\| \leq \gamma \|y\| \quad \text{pre každé } y \in \mathcal{O}(x_0) \qquad \text{a} \qquad \gamma < \alpha L^{-1}. \tag{82}$$

Relácie v (82) podľa Vety 8 (s voľbou $b(t, x) := h(y)$) implikujú exponenciálnu stabilitu nulového riešenia systému (76), a teda exponenciálnu stabilitu konštantného riešenia $\varphi \equiv x_0$ systému (75). Napokon tvrdenie (iii) je priamym dôsledkom Ljapunovovej 9, v ktorej kladieme

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$A := g'(x_0), \quad b(t,x) := h(y)$$

a zohľadňujeme podmienku (80), ktorá korešponduje s (73). ∎

Príklad 9

Vyšetrime stabilitu triviálneho riešenia autonómneho systému

$$x_1' = x_1^2 x_2 + x_2 \cos x_1 - e^{x_4}(x_3 - x_4) + x_3(x_2 - 1),$$

$$x_2' = 2 \sin x_1 \cos x_3 - \sin 2x_2 - x_3(1 + x_4^2) - x_4,$$

$$x_3' = 3e^{x_2} \sin x_1 - x_3 \cos 2x_2 - 3e^{x_1} \sin x_3 + \cos x_4 - 1,$$

$$x_4' = 3 \sin(x_1 - x_3 + x_4) - 2x_3^2 - 4x_4.$$

Nie je ťažké overiť, že 4-vektorová funkcia $\varphi \equiv 0$ je riešením daného systému. Pri jeho skúmaní využijeme výsledky Vety 10. Stanovíme Jacobiho maticu vektorovej funkcie g, ktorá určuje pravú stranu systému, t.j.,

$$(g_1)'_{x_1} = 2x_1x_2 - x_2 \sin x_1, \quad (g_1)'_{x_2} = x_1^2 + \cos x_1 + x_3,$$

$$(g_1)'_{x_3} = -e^{x_4} + x_2 - 1, \quad (g_1)'_{x_4} = -e^{x_4}(x_3 - x_4 - 1),$$

Príklad 9

$$(g_2)'_{x_1} = 2\cos x_1 \cos x_3, \quad (g_2)'_{x_2} = -2\cos 2x_2,$$

$$(g_2)'_{x_3} = -2\sin x_1 \sin x_3 - (1 + x_4^2), \quad (g_2)'_{x_4} = -2x_3x_4 - 1,$$

$$(g_3)'_{x_1} = 3\mathrm{e}^{x_2}\cos x_1 - 3\mathrm{e}^{x_1}\sin x_3, \quad (g_3)'_{x_2} = 3\mathrm{e}^{x_2}\sin x_1 + 2x_3\sin 2x_2,$$

$$(g_3)'_{x_3} = -\cos 2x_2 - 3\mathrm{e}^{x_1}\cos x_3, \quad (g_3)'_{x_4} = -\sin x_4,$$

$$(g_4)'_{x_1} = 3\cos(x_1 - x_3 + x_4), \quad (g_4)'_{x_2} = 0,$$

$$(g_4)'_{x_3} = -3\cos(x_1 - x_3 + x_4) - 4x_3, \quad (g_4)'_{x_4} = 3\cos(x_1 - x_3 + x_4) - 4.$$

Následne pre hodnotu $g'(0)$ platí

$$g'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že každé vlastné číslo matice $g'(0)$ má zápornú reálnu časť. Odpovedajúci charakteristický polynóm má tvar

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 15\lambda^2 + 13\lambda + 4.$$

Príklad 9

Aplikáciou Routhovho–Hurwitzovho kritéria vo Vete 4 zistíme, že každý koreň polynómu p má zápornú reálnu časť. Skutočne, odpovedajúca Hurwitzova matica $H(p)$ má v súlade s (33) tvar

$$H(p) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 15 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nie je ťažké overiť, že všetky vedúce hlavné minory matice $H(p)$ sú kladné

$$\det\,(7) = 7 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 15 \end{pmatrix} = 92 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 13 & 15 & 7 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} = 1000 > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 15 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4000 > 0.$$

Podľa Dôsledku 5 je nulové riešenie homogénnoho systému $x' = g'(0)\,x$ exponenciálne stabilné. Následne, v súlade s Vetou 10(ii) je exponenciálne stabilné i nulové riešenie systému v zadaní príkladu.

Obsah

Ljapunovská funkcia

V predchádzajúcich sekciách sme sa zaoberali skúmaním stability riešení všeobecného systému (2). Pre dané riešenie φ sa ukázala výhodná transformácia na systém (16) a následne zisťovanie vlastností stability jeho identicky nulového riešenia. Odvodili sme niekoľko postačujúcich (niekedy zároveň i nutných) podmienok, ktoré zaručovali niektorý typ stability nulového riešenia. Každá z týchto podmienok obsahovala nejakú vhodnú požiadavku na vlastnosti maticovej funkcie A a vekorovej funkcie b v (16). V tejto sekcii predstavíme nový prístup k problematike stability systému (16), ktorý je založený na geometrických vlastnostiach jeho riešení. V literatúre sa táto metóda štandardne označuje ako priama (alebo aj druhá) Ljapunovova metóda. Spočíva v zavedení pomocnej funkcie, tzv. ljapunovskej funkcie, ktorá umožnuje posúdiť, či nulové riešenie systému (16) je, resp. nie je stabilné. Symbol o bude označovať nulový vektor v $\mathbb{R}^n$.

Definícia 6 (Pozitívne/negatívne definitná funkcia)

Nech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná funkcia definovaná na istom okolí $\mathcal{O}(o)$. Hovoríme, že V je pozitívne, resp. negatívne definitná na okolí $\mathcal{O}(o)$, ak $V(o) = 0$ a

$$V(x) > 0, \text{ resp. } V(x) < 0 \text{ pre každý nenulový vektor } x \in \mathcal{O}(o). \tag{83}$$

Definícia 7 (Ljapunovská funkcia systému)

Nech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná spojitá funkcia. Hovoríme, že V je ljapunovská funkcia systému (16), ak existuje okolie $\mathcal{O}(o)$ také, že

(i) funkcia V je pozitívne definitná na $\mathcal{O}(o)$,

(ii) funkcia V je nerastúca pozdĺž trajektórií systému (16) v $\mathcal{O}(o)$, t.j., ak ψ je riešenie systému (16) s hodnotou $\psi(\tau) \in \mathcal{O}(o)$ pre isté $\tau \in \mathcal{I}$, potom zložená funkcia $V(\psi(t))$ je nerastúca pre každé $t \geq \tau$, v ktorom riešenie ψ existuje s hodnotou $\psi(t) \in \mathcal{O}(o)$.

Veta 11 (Ljapunovova)

Ak pre systém (16) existuje ljapunovská funkcia, potom jeho identicky nulové riešenie je rovnomerne stabilné.

Dôkaz Vety 11.

Nech V je predpokladaná ljapunovská funkcia pre systém (16) a

$$\mathcal{O}(o) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < c\} \subseteq D, \quad 0 < c < a, \tag{84}$$

je odpovedajúce okolie nulového vektora v Definícii 7. Zvoľme $\varepsilon \in (0, c)$ a polož-

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

me $\lambda := \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x)$. Hodnota λ je definovaná iste korektne, pretože sféra $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \varepsilon\} \subseteq \mathcal{O}(o)$ je kompaktná množina a funkcia V je spojitá na množine $\mathcal{O}(o)$. Pomocou rovnakých argumentov a z toho, že $V(o) = 0$, naviac platí, že existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ také, že $V(x) < \lambda$ na okolí $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < \delta\}$. To znamená, že platia relácie

$$0 < \lambda \leq V(x) \quad \text{pre každé } \|x\| = \varepsilon \quad \text{a} \quad 0 < V(x) < \lambda \quad \text{pre každé } 0 < |x| < \delta. \qquad (85)$$

Zvoľme bod $\tau \in \mathcal{I}$ a nech ψ je nejaké riešenie systému (16), ktoré spĺňa podmienku $\|\psi(\tau)\| < \delta$. Keďže funkcia V je ljapunovská vzhľadom na systém (16), podľa Definície 7(ii) je nerastúca pozdĺž trajektórie riešenia ψ, t.j., platí

$$V(\psi(t)) \leq V(\psi(\tau)) \overset{(85)}{<} \lambda \quad \text{pre každé } t \geq \tau, \text{ pre ktoré } \psi(t) \text{ existuje.} \qquad (86)$$

Následne máme $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ pre každé $t \geq \tau$, pre ktoré riešenie ψ je definované. Skutočne, ak by totiž – vzhľadom na spojitosť funkcie ψ – existoval bod $T \geq \tau$ taký, že $\|\psi(T)\| = \varepsilon$, potom v súlade s (85) by muselo nutne platiť $V(\psi(T)) \geq \lambda$, čo odporuje vlastnosti (86). Napokon z toho, že $\|\psi\| < \varepsilon < c < a$ na celom obore definície funkcie ψ, vyplýva, že riešenie ψ systému (16) je definované na celom intervale $[\tau, \infty)$ a spĺňa $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ pre každé $t \geq \tau$. Podľa Definície 2 je teda nulové riešenie systému (16) rovnomerne stabilné. Dôkaz je hotový. ∎

Príklad 10

Overme, že nulové riešenie systému

$$x_1' = -x_2 - t x_1^3, \qquad x_2' = x_1 - t x_2^3, \qquad \mathcal{I} = [0, \infty),$$

je rovnomerne stabilné. Uvažujme funkciu $V(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ pre daný vektor $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Nie je ťažké si premyslieť, že funkcia V je pozitívne definitná a má spojité parciálne derivácie prvého rádu na celom $\mathbb{R}^2$. Naviac, pre každé riešenie $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ uvažovaného systému platí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(\psi(t))}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)\right] = 2\psi_1(t)\,\psi_1'(t) + 2\psi_2(t)\,\psi_2'(t) \\
&= 2\psi_1(t)\left[-\psi_2(t) - t\psi_1^3(t)\right] + 2\psi_2(t)\left[\psi_1(t) - t\psi_2^3(t)\right] \\
&= -2t[\psi_1^4(t) + \psi_2^4(t)] \le 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Funkcia V je teda nerastúca pozdĺž trajektórií riešení vyšetrovaného systému na celých oboroch ich definície. V súlade s Definíciou 7 sa teda jedná o ljapunovskú funkciu tohto systému. Následne podľa Ljapunovovej Vety 11 je nulové riešenie systému v zadaní príkladu skutočne rovnomerne stabilné.

V nasledujúcom výklade sa zameriame na autonómneho systémy (75) a pomocou priamej Ljapunovovej metódy budeme skúmať stabilitu ich stacionárnych bodov.

Definícia 8 (Derivácia funkcie vzhľadom na autonómny systém)

Nech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná funkcia, ktorá má na istom okolí $\mathcal{O}(o)$ spojité parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých svojich premenných. Výraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x) := \operatorname{grad} V(x) \cdot g(x) = \sum_{k=1}^{n} V'_{x_k}(x)\, g_k(x), \quad x \in \mathcal{O}(o), \tag{87}$$

budeme nazývať derivácia funkcie V vzhľadom na autonómny systém (75).

Poznámka 5

Pomenovanie výrazu (87) v Definícii 8 má svoje opodstatnenie. Ak ψ je nejaké riešenie systému (75) definované na podintervale $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ a $\psi(t) \subseteq \mathcal{O}(o)$ pre každé $t \in \mathcal{J}$, potom výraz $V(\psi(t))$ má spojitú deriváciu na $\mathcal{J}$, pričom platí

$$\frac{\mathrm{d}V(\psi(t))}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} V'_{x_k}(\psi(t))\, \psi'_k(t) \overset{(75)}{=} \sum_{k=1}^{n} V'_{x_k}(\psi(t))\, g_k(\psi(t)), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{88}$$

Poznamenajme, že pomocou pojmu derivácia funkcie vzhľadom na systém je možné vlastnosť ljapunovskej funkcie V v Definícii 7(ii) zaručiť podmienkou, že funkcia V má nekladnú deriváciu vzhľadom na systém (75), t.j., $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x) \le 0$ na $\mathcal{O}(o)$.

Veta 12 (Ljapunovova)

Nech autonómny systém (75) má jednoznačne určené riešenia. Ak pre tento systém existuje ljapunovská funkcia, ktorá má vzhľadom na neho negatívne definitnú deriváciu, potom nulové riešenie systému (75) je asymptoticky stabilné.

Dôkaz Vety 12.

V súlade s Vetou 11 je nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (75) rovnomerne stabilné. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Potom podľa Definície 2 existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $\tau \in \mathcal{I}$ riešenie ψ systému (75), ktoré spĺňa podmienku $\|\psi(\tau)\| < \delta$, existuje na celom intervale $[\tau, \infty)$ a platí $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ pre každé $t \geq \tau$. Zvoľme teda nejaké $\tau \geq t_0$ a uvažujme riešenie ψ s uvedenými vlastnosťami. Ukážeme, že $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| = 0$. Keďže podľa predpokladov funkcia $V(\psi(t))$ v súlade s Poznámkou 5 je klesajúca na $[\tau, \infty)$, existuje limita

$$\lim_{t\to\infty} V(\psi(t)) = \alpha, \text{ pričom zrejme } \alpha \geq 0, \tag{89}$$

nakoľko podľa Definície 7(i) je funkcia V pozitívne definitná na okolí $\mathcal{O}(o)$. Sporom predpokladajm, že $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t)\| \neq 0$. Potom zrejme existuje číslo $\beta \in (0, \varepsilon)$ s vlastnosťou $\beta \leq \|\psi(t)\|$ pre každé $t \geq \tau$. Derivácia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x)$ je funkcia spojitá a záporná na kompaktnej množine $\beta \leq \|x\| \leq \varepsilon$. Podľa Weierstrassovej vety preto nadobúda na tejto množine svoje maximum, ktoré je záporné, t.j.,

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

$$\text{existuje } M < 0 \text{ tak, že } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) \leq M < 0 \text{ pre každé } \beta \leq \|x\| \leq \varepsilon \tag{90}$$

Obzvlášť teda z (90) máme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\psi(t)) \leq M < 0$ pre každé $t \geq \tau$. Následne

$$\int_\tau^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(\psi(s))\,\mathrm{d}s \leq \int_\tau^t M\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau$$

$$\Downarrow$$

$$V(\psi(t)) - V(\psi(\tau)) \leq M(t-\tau) \quad \longrightarrow \quad V(\psi(t)) \leq V(\psi(\tau)) + M(t-\tau), \quad t \geq \tau.$$

Z poslednej nerovnosti však vďaka podmienke $M < 0$ vyplýva, že

$$\lim_{t\to\infty} V(\psi(t)) = -\infty,$$

čo zjavne odporuje rovnosti v (89). Preto nutne platí relácia $\lim_{t\to\infty}\|\psi(t)\| = 0$. V zhode s Definíciou 3 je teda nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (75) asymptoticky stabilné. Dôkaz je hotový. ■

Nasledujúce tvrdenie poskytuje isté postačujúce podmienky pre nestabilitu nulového riešenia autonómneho systému (75) v reči nástrojov priamej Ljapunovovej metódy. Doplňme, že funkcia V používaná v tomto tvrdení nemusí byť nutne ljapunovská vzhľadom na autonómny systém (75).

Veta 13 (Ljapunovova)

Nech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkcia spojito diferencovateľná na istom okolí $\mathcal{O}(o)$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky

(i) $V(o) = 0$ *a pre každé* $\delta > 0$ *existuje bod* $x_\delta \in \mathcal{O}_\delta(o)$, *pre ktorý* $V(x_\delta) > 0$,

(ii) *funkcia* V *má na okolí* $\mathcal{O}(o)$ *pozitívne definitnú deriváciu vzhľadom na autonómny systém* (75).

Potom je nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ *systému* (75) *nestabilné.*

Dôkaz Vety 13.

Analogicky s (84) uvažujme uzavreté okolie

$$\mathcal{O}[o] := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le c\} \subseteq D, \quad 0 < c < a, \tag{91}$$

Keďže funkcia V je spojitá na kompaktnej množine $\mathcal{O}[o]$, existuje číslo $M > 0$ s vlastnosťou $V(x) \le M$ pre každé $x \in \mathcal{O}[o]$. Zvoľme $\tau \in \mathcal{I}$, $\delta > 0$ a bod $\eta \in \mathcal{O}[o]$ taký, že v súlade s predpokladom (i) platí $\|\eta\| < \delta$ a $V(\eta) > 0$. Ukážeme, že pre riešenie ψ systému (75), ktoré spĺňa podmienku $\psi(\tau) = \eta$, existuje bod $\tilde{t} > \tau$ taký, že $\psi(\tilde{t}) \notin \mathcal{O}[o]$. Sporom predpokladajme, že pre každé $t \ge \tau$, pre ktoré ψ existuje, platí $\psi(t) \in \mathcal{O}[o]$. Vzhľadom k (91) je potom riešenie ψ definované pre každé $t \in [\tau, \infty)$. Spojitosť funkcie V a rovnosť $V(o) = 0$, zaručuje, že existuje

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$\varepsilon > 0$ také, že pre každé $x \in \mathcal{O}(o)$ s $\|x\| < \varepsilon$ platí $V(x) < V(x_0)$. V súlade s podmienkou (ii) je derivácia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x)$ spojitá a kladná na kompaktnej množine $\varepsilon \leq \|x\| \leq c$. Podľa Weierstrassovej vety má teda funkcia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x)$ na tejto množine svoje minimum, t.j.,

$$\text{existuje } m > 0 \text{ tak, že } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) \geq m > 0 \text{ pre každé } \varepsilon \leq \|x\| \leq c \tag{92}$$

Obzvlášť teda z (92) máme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\psi(t)) \geq m > 0$ pre každé $t \geq \tau$. Následne

$$\int_\tau^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(\psi(s))\,\mathrm{d}s \geq \int_\tau^t m\,\mathrm{d}s, \quad t \geq \tau$$

$$\Downarrow$$

$$V(\psi(t)) - V(\psi(\tau)) \geq m(t-\tau) \quad \longrightarrow \quad V(\psi(t)) \geq V(\psi(\tau)) + m(t-\tau), \quad t \geq \tau.$$

Z poslednej odvodenej nerovnosti vyplýva, že $\lim_{t\to\infty} V(\psi(t)) = \infty$, čo však odporuje predpokladu $\psi(t) \in \mathcal{O}[o]$ pre každé $t \geq \tau$, nakoľko na množine $\mathcal{O}[o]$ je funkcia V ohraničená zhora konštantou M. Existuje teda bod $\tilde{t} > \tau$ s vlastnosťou $\psi(\tilde{t}) \notin \mathcal{O}[o]$. V súlade s (91) a označením dôkazu Vety 11 potom platí nerovnosť $\|\psi(\tilde{t})\| > c > \varepsilon$. Podľa Definície 1 to znamená, že nulové riešenie $\varphi \equiv 0$ systému (75) nie je stabilné. Dôkaz je kompletný. ∎

Príklad 11

Pomocou ljapunovskej funkcie

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2, \quad [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3,$$

dokážme, že nulové riešenie systému

$$x_1' = -\frac{1}{2}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_1 x_2^2, \qquad x_2' = -\frac{3}{4}\, x_2 + 3x_1 x_3^3, \qquad x_3' = -\frac{2}{3}\, x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2$$

je na intervale $\mathcal{I} = [0, \infty)$ asymptoticky stabilné. Jedná sa zrejme o autonómny systém. V súlade s Definíciou 6 je funkcia V pozitívne definitná na celom $\mathbb{R}^3$. Naviac, má spojité parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých svojich premenných. S ohľadom na (87) platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} &\overset{(87)}{=} -2x_1 \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_1 x_2^2}{2} \right) - 4x_2 \left(\frac{3x_2}{4} - 3x_1 x_3^3 \right) - 6x_3 \left(\frac{2x_3}{3} + 2x_1 x_2 x_3^2 \right) \\ &= -x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - x_1^2 x_2^2 < 0, \quad [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \setminus [0, 0, 0].\end{aligned}$$

Podľa Definícií 8 a 6 má funkcia V negatívne definitnú deriváciu vzhľadom na systém v zadaní príkladu. V súlade s Definíciou 7 sa teda jedná o ljapunovskú funkciu vzhľadom na uvedený systém. Následne podľa Ljapunovovej Vety 12 je nulové riešenie tohto systému skutočne asymptoticky stabilné na intervale $\mathcal{I}$.