M7120 Spektrálna analýza I

Fourierove rady

Peter Šepitka

zima 2022

Obsah

Obsah

Fyzika – parciálne diferenciálne rovnice

Mnohé procesy a deje v prírode sú určené veličinami, ktoré vo všeobecnosti závisia na niekoľkých premenných. Ich skúmanie a modelovanie si preto vyžaduje štúdium parciálnych diferenciálnych rovníc (PDR). Fundamentálny význam majú lineárne PDR prvého a druhého rádu.

Príklad 1

Rovnica $u_{tt} = -4u_{xx}$ je príkladom lineárnej PDR druhého rádu s konštantnými koeficientami, kde $u(x,t)$ je neznáma funkcia dvoch premenných x a t a

$$u_{tt}(x,t) := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad u_{xx}(x,t) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Jedným z riešení tejto rovnice je napríklad funkcia $u(x,t) = \mathrm{e}^{2t} \sin x$.

Medzi najvýznamnejšie typy PDR s fyzikálnymi aplikáciami patrí

- rovnica vedenia tepla $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$,
- vlnová rovnica $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$,
- Laplaceova rovnica $u_{tt} + u_{xx} = 0$.

Rovnica vedenia tepla

Rovnicu vedenia tepla študoval na začiatku 19. storočia francúzsky matematik a fyzik Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830). Uvažujme nasledujúcu fyzikálnu situáciu. Homogénna tyč dĺžky L je umiestnená na osi x medzi bodmi $x = 0$ a $x = L$. Nech $u(x,t)$ označuje teplotu tyče v bode x a v čase t. Potom možno na základe fyzikálnych argumentov ukázať, že funkcia u spĺňa na množine $(0, L) \times \mathbb{R}^+$ lineárnu PDR druhého rádu

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}. \tag{1}$$

Rovnica (1) sa štandardne nazýva rovnica vedenia tepla. Kladná reálna konštanta α^2 – súčiniteľ teplotnej vodivosti – vyjadruje mieru šírenia sa tepla materiálom tyče. Na určenie konkrétneho riešenia PDR je nutné mať okrem samotnej rovnice predpísané aj tzv. okrajové podmienky. Jedná sa o podmienky tvaru

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0, L], \tag{2}$$

$$u(0,t) \equiv T_1, \quad u(L,t) \equiv T_2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

kde f je daná funkcia a T_1, T_2 sú dané reálne čísla. Podmienka (2) udáva rozloženie teploty v tyči v čase $t = 0$, kým podmienka (3) predpisuje konštantné teploty T_1 a T_2 v krajných bodoch tyče počas celého experimentu.

Rovnica (1) spolu s okrajovými podmienkami (2)–(3) sa potom nazýva okrajová úloha pre rovnicu vedenia tepla. Jednou z klasických metód riešenia tejto úlohy je Fourierova metóda separácie premenných. Príslušné riešenie u predpokladáme v separovanom tvare $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$. Dosadením do (1) a separáciou premenných získame pre funkcie $\varphi(x)$ a $\psi(t)$ dve obyčajné diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami. Konkrétne, platia výpočty

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t), \quad u_t(x,t) = \varphi(x)\,\psi'(t), \quad u_{xx}(x,t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

$$\Downarrow \text{ dosadíme do (1) } \Downarrow$$

$$\varphi\,\psi' = \alpha^2 \varphi''\,\psi \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \text{konštanta} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi'' - k\,\varphi = 0 \quad \text{a} \quad \psi' - \alpha^2 k\,\psi = 0.$$

Pre jednoduchosť uvažujme v (3) hodnoty $T_1 = 0 = T_2$. Pomocou okrajových podmienok (2)–(3) potom možno ukázať, že funkcia u je netriviálna, t.j., $u(x,t) \not\equiv 0$, iba v prípade voľby $k < 0$. Položíme preto $k = -\omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^+$.

Riešime teda systém dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{a} \quad \psi' + \alpha^2\omega^2 \psi = 0. \tag{4}$$

Jeho riešením s prihliadnutím na okrajovú podmienku (3) dostaneme pre funkcie $\varphi(x)$ a $\psi(t)$ tvar $\varphi(x) = \sin \omega x$ a $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\omega^2 t}$, kde parameter $\omega = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že každá z funkcií

$$u_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

rieši rovnicu vedenia tepla (1) a spĺňa okrajovú podmienku (3). A keďže rovnica (1) je lineárna, môžeme riešenie u okrajovej úlohy (1)–(3) uvažovať ako lineárnu kombináciu funkcií u_n, $n \in \mathbb{N}$. Bez ujmy na všeobecnosti teda máme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad [x,t] \in [0,L] \times [0,\infty), \quad b_n \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Neznáme koeficienty b_n pritom volíme tak, aby funkcia u vyhovovala okrajovej podmienke (2), t.j., aby platila rovnosť

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad x \in [0,L]. \tag{7}$$

Stojíme teda pred problémom zapísať funkciu f ako súčet nekonečného radu, ktorého členy sú funkcie $\sin \frac{n\pi x}{L}$. Fourier ako prvý študoval – v kontexte rovnice vedenia tepla – funkcie f, pre ktoré je toto možné, pričom vyslovil všeobecnejšiu hypotézu, že každú "rozumnú" funkciu $f(x)$ je možné na intervale $[0, L]$ zapísať ako súčet nekonečného radu funkcií $\sin \frac{n\pi x}{L}$ a $\cos \frac{n\pi x}{L}$, t.j., v tvare

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad x \in [0, L], \tag{8}$$

pre vhodné postupnosti reálnych koeficientov a_n a b_n. Rady typu (8) sa na jeho počesť dnes nazývajú Fourierove rady. Hlavnou náplňou tejto časti prednášky bude štúdium ich základných vlastností, obzvlášť týkajúcich sa ich konvergencie. Získané výsledky potom aplikujeme pri riešení úvodnej rovnice vedenia tepla.

Obsah

Trigonometrický polynóm a rad

V základných kurzoch matematickej analýzy sme funkciu $f(x)$, ktorá mala deriváccie všetkých rádov v bode x_0, aproximovali na vhodnom okolí x_0 jej Taylorovým polynómom, resp. Taylorovým radom so stredom v bode x_0

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Istou analógiu Taylorovho polynómu a Taylorovho radu je v prípade periodických funkcií tzv. trigonometrický polynóm a trigonometrický rad.

Definícia 1 (Trigonometrický polynóm)

Nech $N \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathbb{R}^+$ sú dané. Výraz $T_N(x)$ tvaru

$$T_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{9}$$

kde $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots, a_N, b_N$ sú nejaké reálne (komplexné) čísla, sa nazýva trigonometrický polynóm stupňa N.

Definícia 2 (Trigonometrický rad)

Nech L je dané kladné reálne číslo. Nekonečný funkcionálny rad $T(x)$ tvaru

$$T(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{10}$$

kde $a_0 \in \mathbb{R}$, resp. $a_0 \in \mathbb{C}$, a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú nejaké postupnosti reálnych (komplexných) čísiel, nazývame trigonometrický rad.

Poznámka 1

Z Definícií 1 a 2 vyplýva, že N-tým čiastočným súčtom trigonometrického radu $T(x)$ je práve trigonometrický polynóm $T_N(x)$. Reálne (komplexné) čísla a_0 a a_n, b_n pre $n \in \mathbb{N}$ sa označujú ako koeficienty trigonometrického polynómu $T_N(x)$, resp. trigonometrického radu $T(x)$.

Poznámka 2

Trigonometrický polynóm (9) a trigonometrický rad (10) je možné pomocou známych Eulerových vzorcov

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{a} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad y \in \mathbb{R},$$

prepísať na tvary

$$T_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad \text{a} \quad T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{\frac{in\pi x}{L}}, \tag{11}$$

kde komplexné koeficienty c_n, $n \in \mathbb{Z}$, spĺňajú

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0, \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Výrazy v (11) sa potom označujú ako exponenciálny polynóm stupňa N a exponenciálny rad.

Ortogonalita trigonometrických funkcií

Nech $L > 0$ je dané. Označme symbolom $\mathcal{C}[-L, L]$ množinu všetkých spojitých komplexných funkcií $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$. Množina $\mathcal{C}[-L, L]$ spolu s operáciami sčítania funkcií a násobenia komplexným číslom zrejme vytvára lineárny (vektorový) priestor nad telesom komplexných čísiel $\mathbb{C}$.

Definícia 3 (Skalárny súčin a norma)

Pre každú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{C}[-L, L]$ definujeme komplexné číslo

$$\langle f, g \rangle := \int_{-L}^{L} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x \tag{13}$$

a nazývame ho skalárnym súčinom funkcií f a g. Funkcie f a g sa nazývajú vzájomne ortogonálne (kolmé) na intervale $[-L, L]$, ak platí $\langle f, g \rangle = 0$. Normou funkcie $f \in \mathcal{C}[-L, L]$ rozumieme reálne číslo

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x}. \tag{14}$$

Hovoríme, že funkcia f je normovaná, ak platí $\|f\| = 1$.

Poznámka 3

Vďaka spojitosti funkcií f a g a kompaktnosti intervalu $[-L, L]$ sú výrazy v (13) a (14) korektne definované a skutočne sa jedná o objekty skalárny súčin a norma v priestore $\mathcal{C}[-L, L]$, ktoré sú definované vo funkcionálnej analýze.

Významnou funkcií podmnožinou v priestore $\mathcal{C}[-L, L]$ je tzv. trigonometrický systém funkcií na intervale $[-L, L]$, konkrétne,

$$\mathcal{S} := \left\{1,\ \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L},\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{15}$$

Lema 1

Trigonometrický systém $\mathcal{S}$ v (15) je ortogonálny na intervale $[-L, L]$, t.j., každé dve rôzne funkcie $f, g \in \mathcal{S}$ spĺňajú $\langle f, g\rangle = 0$. Okrem toho platia rovnosti

$$\|1\| = \sqrt{2L} \quad \text{a} \quad \left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\| = \left\|\sin\frac{n\pi x}{L}\right\| = \sqrt{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dôkaz Lemy 1.

Tvrdenie sa dokáže priamym výpočtom skalárnych súčinov dvojíc funkcií systému $\mathcal{S}$. Využijeme pri tom známe trigonometrické identity

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

Ortogonalita funkcií $1,\ \cos\frac{n\pi x}{L}$ a $1,\ \sin\frac{n\pi x}{L}$ pre $n\in\mathbb{N}$:

$$\left\langle 1,\ \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \left\langle 1,\ \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ortogonalita funkcií $\cos\frac{n\pi x}{L}$, $\sin\frac{m\pi x}{L}$ pre $n,m\in\mathbb{N}$:

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\ \sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\sin\frac{(m-n)\pi x}{L} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Ortogonalita funkcií $\cos\frac{n\pi x}{L}$, $\cos\frac{m\pi x}{L}$ pre $n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$:

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

$$\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{L} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Ortogonalita funkcií $\sin\frac{n\pi x}{L}$, $\sin\frac{m\pi x}{L}$ pre $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$:

$$\left\langle \sin\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{L} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Napokon $\|1\|^2 = \int_{-L}^{L} 1\,\mathrm{d}x = 2L$ a pre $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2 = \int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x = L,$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{L}\right\|^2 = \int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x = L.$$

Dôkaz je kompletný. $\blacksquare$

Poznámka 4

Podobne i systém spojitých komplexných funkcií

$$\tilde{\mathcal{S}} := \{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}},\ n \in \mathbb{Z}\} \tag{16}$$

(pozri Poznámku 2) je ortogonálny na $[-L, L]$, nakoľko pre $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$,

$$\left\langle \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi x}{L}} \right\rangle = \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}\, \overline{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi x}{L}}}\, \mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n-m)\pi x}{L}}\, \mathrm{d}x = 0.$$

Okrem toho pre normu každej z funkcií $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}$, $n \in \mathbb{Z}$, platí

$$\left\| \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}} \right\| = \sqrt{\int_{-L}^{L} \left| \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}} \right|^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_{-L}^{L} 1\, \mathrm{d}x} = \sqrt{2L}.$$

Nenulovosť noriem funkcií systémov $\mathcal{S}$ a $\tilde{\mathcal{S}}$ implikuje, že tieto systémy sú lineárne nezávislé. Naviac, tieto funkcie môžeme normovať. Presnejšie, systémy funkcií

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{n\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{n\pi x}{L},\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

sú ortonormálne na intervale $[-L, L]$.

Nasledujúca veta poskytuje motiváciu zavedenia Fourierových radov v Definícii 4.

Veta 1

Nech trigonometrický rad T v (10) konverguje rovnomerne na intervale $[-L, L]$ k funkcii f, t.j., platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad x \in [-L, L]. \tag{17}$$

Potom funkcia f je spojitá na $[-L, L]$, t.j., $f \in \mathcal{C}[-L, L]$, a koeficienty a_0, a_n a b_n, $n \in \mathbb{N}$, radu T spĺňaju rovnosti

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Dôkaz Vety 1.

Rovnomerná konvergencia radu T a spojitosť jeho členov zaručuje, že funkcia f ako jeho súčet je spojitá na intervale $[-L, L]$, a teda $f \in \mathcal{C}[-L, L]$. Rovnosť (17) preto môžeme na intervale $[-L, L]$ integrovať

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

Rovnomerná konvergencia radu T ďalej umožnuje v poslednej rovnosti zameniť poradie integrácie a sumácie, takže postupne dostávame

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ &= a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left\langle 1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle + b_n \left\langle 1, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle\right).\end{aligned}$$

Z Lemy 1 však vieme, že $\left\langle 1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = 0 = \left\langle 1, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle$, a tak

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 L \quad\Longrightarrow\quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Využitím podobných argumentov dostaneme pre dané $m \in \mathbb{N}$ formuly

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = a_m \left\langle \cos\frac{m\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L} \right\rangle = a_m \left\|\cos\frac{m\pi x}{L}\right\|^2$$

$\Downarrow$ Lema 1 $\Downarrow$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = La_m \quad\Longrightarrow\quad a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = b_m \left\langle \sin\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L} \right\rangle = b_m \left\|\frac{m\pi x}{L}\right\|^2$$

$\Downarrow$ Lema 1 $\Downarrow$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = Lb_m \quad\Longrightarrow\quad b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 5

Pomocou skalárneho súčinu zavedeného v Definícií 3 môžeme rovnosti (18) a (19) zapísať v tvare

$$a_n = \frac{1}{L}\left\langle f(x),\, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{20}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\left\langle f(x),\, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Pre komplexné koeficienty c_n radu T v exponenciálnom tvare (11) možno odvodiť analogické formuly

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\left\langle f(x),\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\pi x}{L}}\right\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Poznámka 6

Z praktického hľadiska nie je Veta 1 príliš vhodná, keďže, ako sme ukázali, nutne vyžaduje spojitosť funkcie f. V mnohých aplikáciach sa však často analyzujú i nespojité funkcie.

Fourierov rad a koeficienty

Inšpirovaní výsledkom Vety 1 a Poznámkou 6 sa teraz obmedzíme na trigonometrické rady T, ktorých koeficienty a_n, b_n, resp. c_n, spĺňajú rovnosti (18), (19), resp. (22), a budeme skúmať, pre akú najširšiu triedu funkcií f majú integrály v (18), (19), resp. (22) zmysel. Keďže platí

$$\left|\cos\frac{n\pi x}{L}\right| \leq 1, \quad \left|\sin\frac{n\pi x}{L}\right| \leq 1, \quad \left|\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{L}}\right| = 1, \quad x \in [-L, L],$$

je prirodzené uvažovať triedu funkcií f absolútne integrovateľných na $[-L, L]$

$$\mathcal{L}^1[-L, L] := \{f \text{ je lebesgueovsky integrovateľná na } [-L, L]\}\,. \tag{23}$$

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1[-L, L]$ sú potom čísla a_n, b_n, c_n v (18), (19), (22) korektne definované, keďže dané integrály konvergujú (v Lebesgueovom zmysle)

$$\left|\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-L}^{L}\left|f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right|\mathrm{d}x \leq \int_{-L}^{L}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

$$\left|\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-L}^{L}\left|f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right|\mathrm{d}x \leq \int_{-L}^{L}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

$$\left|\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-L}^{L}\left|f(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{im\pi x}{L}}\right|\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Definícia 4 (Fourierovov rad a koeficienty)

Nech funkcia $f \in \mathcal{L}^1[-L, L]$. Čísla a_n, b_n definované vzťahmi (18), (19) sa nazývajú reálne Fourierove koeficienty funkcie f na intervale $[-L, L]$ vzhľadom na trigonometrický systém $\mathcal{S}$ v (15). Podobne čísla c_n definované vzorcom (22) sa nazývajú komplexné Fourierove koeficienty funkcie f na intervale $[-L, L]$ vzhľadom na exponenciálny system $\tilde{\mathcal{S}}$ v (16). Tieto skutočnosti zapisujeme v tvare $f \sim (a_n, b_n)$, resp. $f \sim (c_n)$. Príslušný trigonometrický rad T v (10), resp. (11), sa potom označuje ako reálny, resp. komplexný Fourierov rad funkcie f na intervale $[-L, L]$ vzhľadom na systém $\mathcal{S}$, resp. $\tilde{\mathcal{S}}$.

Poznámka 7

Poznamenajme, že Fourierove rady zaujímajú v množine všetkých trigonometrických radov na intervale $[-L, L]$ výnimočné postavenie. Z výsledku Vety 1 totiž vyplýva, že každý trigonometrický rad T, ktorý rovnomerne konverguje na intervale $[-L, L]$, je Fourierovým radom svojho súčtu na $[-L, L]$.

Definícia 5 (Párne a nepárne rozšírenie funkcie)

Nech f je reálna (komplexná) funkcia integrovateľná na intervale $[0, L]$. Funkcie g a h definované na intervale $[-L, L]$ s predpismi

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ f(-x), & x \in [-L, 0], \end{cases} \qquad h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (0, L], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in [-L, 0), \end{cases} \tag{24}$$

sa nazývajú párne a nepárne rozšírenie funkcie f na interval $[-L, L]$.

Poznámka 8

Funkcie g a h z Definície 5 sú zrejme integrovateľné na intervale $[-L, L]$, a teda podľa Definície 4 majú na tomto intervale Fourierove rady (10). Kým pre párneho rozšírenie g sú Fourierove koeficienty $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, pre nepárne rozšírenie h sú Fourierove koeficienty $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ako vyplýva z (18) a (19). Fourierov rad funkcie g sa preto nazýva kosínusový rozvoj funkcie f na intervale $[0, L]$. Podobne, Fourierov rad funkcie h sa označuje ako sínusový rozvoj funkcie f na intervale $[0, L]$.

Príklad 2

Určme Fourierove koeficienty a rady funkcie $g(x) = |x|$ na intervale $[-2, 2]$ vzhľadom na trigonometrický system $\mathcal{S}$, resp. exponenciálny systém $\tilde{\mathcal{S}}$. V tomto prípade máme $L = 2$. Keďže funkcia g je spojitá na $[-2, 2]$, je integrovateľná na $[-2, 2]$, t.j., $g \in \mathcal{L}^1[-2, 2]$. Hľadané Fourierove koeficienty a_n, b_n a c_n majú potom podľa (18), (19) a (22) tvar

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{|x|}_{\text{párna}} \,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \,\mathrm{d}x = 2, \quad c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{|x|}_{\text{párna}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 x \,\mathrm{d}x = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{|x| \cos\frac{n\pi x}{2}}_{\text{párna}} \,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \cos\frac{n\pi x}{2} \,\mathrm{d}x \overset{\text{per-partes}}{=} \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ párne}, \\ -\frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ nepárne}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{|x| \sin\frac{n\pi x}{2}}_{\text{nepárna}} \,\mathrm{d}x = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

Príklad 2

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |x|\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} x\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{per-partes}}{=} \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - 1\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ párne}, \\ -\frac{4}{n^2\pi^2}, & n \text{ nepárne}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Pre reálny, resp. komplexný Fourierov rad funkcie g na intervale $[-2,2]$ potom podľa (10), resp. (11) platí

$$1 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nepárne}}}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2},$$

$$1 - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nepárne}}}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{2}} = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(2k-1)\pi x}{2}}.$$

Poznamenajme, že funkciu g v zadaní príkladu možno v kontexte Definície 5 chápať ako párne rozšírenie funkcie $f(x) = x$ z intervalu $[0,2]$ na $[-2,2]$. Nasvedčuje tomu v zhode s Poznámkou 8 aj získaný kosínusový rozvoj.

Príklad 3

Nájdime Fourierove koeficienty a rady funkcie $h(x) = x$ na $(-2, 2)$ a $h(\pm 2) = 0$ vzhľadom na trigonometrický system $\mathcal{S}$, resp. exponenciálny systém $\tilde{\mathcal{S}}$. Opäť máme $L = 2$. V tomto prípade je však h nepárne rozšírenie funkcie $f(x) = x$ pre $x \in (0, 2)$ a $f(2) = 0$. Preto Fourierove koeficienty $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_0 = 0$ a pre b_n, c_n podľa (19), (22) platí

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \underbrace{x \sin \frac{n\pi x}{2}}_{\textbf{párna}} \,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{per-partes}}{=} \frac{4}{n\pi} (-1)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$c_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} x \,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{2}} \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{per-partes}}{=} \frac{2i}{n\pi} (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Reálny, resp. komplexný Fourierov rad funkcie h na intervale $[-2, 2]$ má potom podľa (10), resp. (11), tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2},$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2i}{n\pi} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{2}} = \frac{2i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{2}}.$$

Obsah

Konvergencia Fourierovho radu

V predchádzajúcej sekcii sme ukázali, ako možno k danej f, ktorá je absolútne integrovateľná na intervale $[-L, L]$, priradiť reálny, resp. komplexný Fourierov rad T. Toto priradenie je však zatiaľ iba *formálne*. Nevieme totiž, či rad T vôbec konverguje na $[-L, L]$, a ak konverguje, či jeho súčtom je práve funkcia f. Podľa Poznámky 7 vieme iba to, že daná funkcia f je súčtom najviac jedného Fourierovho radu T, ktorý rovnomerne konverguje na $[-L, L]$. V tejto sekcii preto preskúmame konvergenciu Fourierových radov.

Definícia 6 (Po častiach spojitá a po častiach hladká funkcia)

Funkcia f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $[-L, L]$, ak má na tomto intervale iba konečne veľa bodov nespojitosti, pričom sa jedná iba o odstrániteľné nespojitosti alebo neodstrániteľné nespojitosti I. druhu, t.j., skoky. Funkcia f sa nazýva po častiach hladká na intervale $[-L, L]$, ak f a jej derivácia f' sú funkcie po častiach spojité na intervale $[-L, L]$.

Príklad 4

a) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je príkladom po častiach hladkej funkcie na intervale $[-1,1]$, nakoľko funkcie f a f' sú spojité na $[-1,1]$ s výnimkou bodu $x=0$, v ktorom majú obidve funkcie nespojitosť typu skok.

b) Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ nie je po častiach hladká na $[-1,1]$, ba dokonca ani po častiach spojitá na $[-1,1]$, pretože v bode $x=0$ má f i f' nedstrániteľnú nespojitosť II. druhu. Konkrétne platí

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

c) Podobne funkcia $f(x) = \sqrt{|x|}$ nie je po častiach hladká na intervale $[-1,1]$. Hoci f je spojitá na $[-1,1]$, jej derivácia f' má v bode $x=0$ neodstrániteľnú nespojitosť II. druhu, konkrétne $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$.

d) Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$, je po častiach hladká na intervale $[-1,1]$, napriek tomu, že f ani f' nie sú definované v bode $x=0$. V tomto bode však f i jej derivácia f' majú odstrániteľné nespojitosti s konečnými limitami $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ a $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Príklad 5

Pre dané $L > 0$ uvažujme funkciu f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-L, 0), \\ L, & x = (0, L). \end{cases}$$

Funkcia f nie je definovaná v bodoch $x = 0$ a $x = \pm L$. Je však integrovateľná na intervale $[-L, L]$, a preto je možné k nej zostrojiť Fourierov rad na $[-L, L]$. Reálne Fourierove koeficienty majú podľa (18) a (19) tvar

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L L \, \mathrm{d}x = L,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L L \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L L \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x = \frac{L}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \begin{cases} 0, & n \text{ párne}, \\ \frac{2L}{n\pi}, & n \text{ nepárne}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Koeficienty a_n, b_n sú definované pomocou integrálov, a preto nezávisia na hodnotách $f(0)$, $f(\pm L)$. To ilustruje skutočnosť, že ak funkciu f zmeníme v konečne veľa bodoch intervalu $[-L, L]$, jej príslušný Fourierov rad sa nezmení.

Dirichletova veta

Jeden z najvýznamnejších výsledkov v teórii Fourierových radov zaznamenal nemecký matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Ako prvý našiel postačujúce podmienky pre bodovú konvergenciu Fourierovho radu $T(x)$ na intervale $[-L, L]$ a zároveň v tomto prípade stanovil i jeho súčet.

Veta 2 (Dirichletova)

Nech reálna (komplexná) funkcia f je po častiach hladká na intervale $[-L, L]$. Potom jej Fourierov rad T v (10) bodovo konverguje na $[-L, L]$ a platí

$$T(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \in (-L, L), \\ \frac{f(-L^+)+f(L^-)}{2}, & x = -L \text{ alebo } x = L, \end{cases} \tag{25}$$

kde výrazy $f(x^\pm)$ označujú jednostranné limity funkcie f v bode x, t.j.,

$$f(x^+) := \lim_{t \to x^+} f(t), \qquad f(x^-) := \lim_{t \to x^-} f(t).$$

Obzvlášť, vo všetkých bodoch $x \in (-L, L)$, v ktorých je funkcia f spojitá, platí rovnosť $T(x) = f(x)$.

Príklad 6

V Príklade 2 sme zostrojili Fourierov rad funkcie $g(x) = |x|$ na intervale $[-2, 2]$. Funkcia g je po častiach hladká na $[-2, 2]$, pretože je spojitá na $[-2, 2]$ a jej derivácia $g' \equiv -1$ pre $x \in (-2, 0)$ a $g'(x) \equiv 1$ pre $x \in (0, 2)$, a tak

$$\lim_{x \to 0^\pm} g'(x) = \pm 1, \qquad \lim_{x \to -2^+} g'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 2^-} g'(x) = 1.$$

Naviac máme $g(-2^+) = g(-2) = 2 = g(2) = g(2^-)$. Podľa Dirichletovej vety 2 a výsledku v Príklade 2 potom platí rovnosť

$$g(x) = |x| = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad x \in [-2, 2].$$

Jednou z praktických aplikácii teórie Fourierových radov je efektívne stanovenie súčtov niektorých nekonečných číselných radov. Ak v poslednej identite napríklad položíme $x = 0$, získame hodnotu súčtu číselného radu $\sum \frac{1}{(2k-1)^2}$, konkrétne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Príklad 7

Podobne v Príklade 3 sme našli Fourierov rad funkcie $h(x) = x$ na $(-2, 2)$ a $h(\pm 2) = 0$. Opäť sa jedná o po častiach hladkú funkciu na $[-2, 2]$, pretože h je spojitá na $(-2, 2)$, jej derivácia $h'(x) \equiv 1$ na $(-2, 2)$ a

$$h(-2^+) = -2, \quad h(2^-) = 2, \quad h'(-2^+) = 1 = h'(2^-).$$

V súlade s Dirichletovou vetou 2 a Príkladom 3 dostávame rovnosť

$$h(x) = x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in (-2, 2).$$

Ak v poslednej identite napríklad položíme $x = 1$, získame formulu

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Dôkaz Dirichletovej vety – nástroje

Pre dôkaz Dirichletovej vety najprv odvodíme niekoľko pomocných výsledkov.

Lema 2

Nech $L > 0$ je dané a nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $2L$-periodická funkcia integrovateľná na intervale $[-L, L]$. Potom pre každé reálne číslo a je f integrovateľná i na intervale $[-L + a, L + a]$ a platí

$$\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

Dôkaz Lemy 2.

Z periodickosti funkcie vyplýva, že $f(x + 2L) = f(x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L+a}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{L}^{L+a} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

V poslednom integrále zavedieme substitúciu $t = x - 2L$, pričom dostaneme

$$\int_{L}^{L+a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{-L+a} \underbrace{f(t + 2L)}_{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-L}^{-L+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-L}^{-L+a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

Dosadením získaného vyjadrenia do rovnosti (27) napokon máme

$$\int_{-L+a}^{L+a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L+a}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-L}^{-L+a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

čo ukazuje platnosť formuly (26). ■

Lema 3

Pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ *a* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *platí rovnosť*

$$2\sum_{n=0}^{N} \cos nx = 1 + \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{28}$$

Dôkaz Lemy 3.

Využijeme metódu matematickej indukcie. Nech $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ je dané. Pre hodnotu $N = 0$ rovnosť (28) očividne platí. Predpokladajme, že identita (28) je pravdivá pre $N = M$, kde $M \in \mathbb{N}_0$, t.j.,

$$2\sum_{n=0}^{M} \cos nx = 1 + \frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{29}$$

Dôkaz Lemy 3 (pokračovanie).

Pre hodnotu $N = M+1$ potom s využitím rovnosti (29) a trigonometrických vzorcov v dôkaze Lemy 1 postupne máme

$$2\sum_{n=0}^{M+1} \cos nx = 2\left(\sum_{n=0}^{M} \cos nx\right) + 2\cos{(M+1)x}$$

$$\overset{(29)}{=} 1 + \frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} + 2\cos{(M+1)x}$$

$$= 1 + \frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)x + 2\sin\frac{x}{2}\,\cos{(M+1)x}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left[-\left(M+\frac{1}{2}\right)x\right] + \sin\left[(M+1)+\frac{1}{2}\right]x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sin\left[(M+1)+\frac{1}{2}\right]x}{\sin\frac{x}{2}},$$

teda formula (28) platí i pre hodnotu $N = M+1$ a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 9 (Dirichletovo jadro)

Postupnosť funkcií $\{D_N(x)\}$ s predpismi

$$D_N(x) := \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad N \in \mathbb{N}_0, \tag{30}$$

sa nazýva Dirichletovo jadro. Každá z funkcií D_N pre $N \in \mathbb{N}$ je párna, 2π-periodická a triedy $\mathcal{C}^\infty$ na množine $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, pričom v bodoch $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má odstrániteľné nespojitosti s limitami $\lim_{x\to 2k\pi} D_N(x) = 2N+1$. Pomocou (28) možno funkcie D_N zapísať v tvare

$$D_N(x) = 2\sum_{n=0}^{N} \cos nx - 1 = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx. \tag{31}$$

Naviac, integráciou tejto identity v medziach od $-\pi$ do π dostaneme formulu

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}_0. \tag{32}$$

Poznamenajme, že pre $L > 0$ sa Dirichletovo jadro substitúciou $x = \frac{\pi s}{L}$ pretransformuje na $2L$-periodickú funkciu a vzorec (32) nadobudne tvar

$$\int_{-L}^{L} D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right)\mathrm{d}s = 2L \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}_0. \tag{33}$$

Lema 4

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $[-L, L]$. Pre dané $N \in \mathbb{N}$ označme T_N jej Fourierov trigonometrický polynóm na $[-L, L]$, t.j., trigonometrický polynóm v (9) *s koeficientami v* (18) *a* (19)*. Potom platí formula*

$$T_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, D_N\left(\frac{\pi\,(t-x)}{L}\right) \mathrm{d}t, \quad x \in [-L, L]. \tag{34}$$

Dôkaz Lemy 4.

Symbolom I označme integrál na pravej strane rovnosti (34). Upravíme ho využitím reprezentácie Dirichletovho jadra D_N v (31). Postupne máme

$$I \overset{(31)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\frac{n\pi\,(t-x)}{L}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \left[\cos\frac{n\pi t}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} + \sin\frac{n\pi t}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t\right) \cos\frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t\right) \sin\frac{n\pi x}{L}\right].$$

Z poslednej rovnosti a identít (18), (19) a (9) už ihneď vyplýva tvrdenie lemy. ∎

Lema 5 (Riemannova–Lebesgueova)

Nech reálna funkcia f je lebesgueovsky integrovateľná na netriviálnom intervale $[a,b]$. Potom platí

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_a^b f(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x=0 \quad \textit{a} \quad \lim_{|\omega|\to\infty}\int_a^b f(x)\,\sin\omega x\,\mathrm{d}x=0. \tag{35}$$

Dôkaz Lemy 5.

Dokážeme prvú z rovností v (35). Pre jednoduchosť budeme predpokladať riemannovskú integrovateľnosť funkcie f na $[a,b]$. Pre $\varepsilon>0$ existuje delenie

$$\mathcal{D}_n\ :\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

intervalu $[a,b]$ s vlastnosťou

$$0\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)<\frac{\varepsilon}{2},\qquad m_i:=\inf\left\{f(x),\ x\in[x_{i-1},\,x_i]\right\}$$

(jedná sa o aproximáciu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocou dolného integrálneho súčtu). Množina $\{m_1,\ldots,m_n\}$ je zrejme ohraničená, t.j., existuje $K>0$ tak, že $|m_i|\le K$ pre každé $i=1,\ldots,n$. Uvažujme na $[a,b]$ funkciu g definovanú

$$g(x):=m_i\quad\text{pre } x\in\left(x_{i-1},\,x_i\right),\quad i=1,\,\ldots,\,n.$$

Dôkaz Lemy 5 (pokračovanie).

Funkcia g je po častiach konštantná, a teda integrovateľná na $[a,b]$, pričom

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

Okrem toho platí $g(x) \le f(x)$ pre každé $x \in [a,b]\setminus\{x_0,\dots,x_n\}$. Vyššie uvedenú nerovnosť potom môžeme zapísať v tvare

$$0 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zvoľme nejaké $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Použitím trojuholníkovej nerovnosti postupne máme

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \big([f(x)-g(x)]\,\cos\omega x + g(x)\,\cos\omega x\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b g(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_a^b \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{f(x)-g(x)}\,\underbrace{|\cos\omega x|}_{\le 1}\,\mathrm{d}x + \left|\int_a^b g(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

Dôkaz Lemy 5 (pokračovanie).

$$\leq \underbrace{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{g(x)}_{m_i} \cos \omega x\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \omega x\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |m_i| \left| \left[\frac{\sin \omega x}{\omega} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|\omega|} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|m_i|}_{\leq K} |\sin \omega x_i - \sin \omega x_{i-1}|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{|\omega|} \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{|\sin \omega x_i|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin \omega x_{i-1}|}_{\leq 1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{|\omega|} \sum_{i=1}^{n} 2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nK}{|\omega|}.$$

Odvodili sme teda nerovnosť

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \omega x\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nK}{|\omega|} \quad \text{pre každé } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{36}$$

Dôkaz Lemy 5 (pokračovanie).

Keďže $\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{2nK}{|\omega|} = 0$, existuje dostatočne veľké $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ tak, aby pre každé $|\omega| \geq \omega_0$ platila nerovnosť $\frac{2nK}{|\omega|} < \frac{\varepsilon}{2}$. Využitím (36) potom dostávame

$$\left|\int_a^b f(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{pre každé } |\omega| \geq \omega_0.$$

Nakoľko $\varepsilon > 0$ bolo zvolené ľubovoľne, posledná nerovnosť je podľa definície limity v nevlastnom bode ekvivalentná s rovnosťou

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \int_a^b f(x)\,\cos\omega x\,\mathrm{d}x = 0,$$

t.j., platí prvá identita v (35). Analogicky sa dokáže i druhá formula v (35). ∎

Poznámka 10

Jednoduchou aplikáciu Eulerovej identity $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, vyplýva priamo z rovností v (35) i platnosť formuly

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{37}$$

Dôkaz Dirichletovej vety

Pristúpime teraz k samotnému dôkazu Dirichletovej vety. Nech f je funkcia po častiach hladká na intervale $[-L, L]$ a nech T_N je jej odpovedajúci Fourierov trigonometrický polynóm (t.j., trigonometrické polynómy s koeficientami (18) a (19)). Naším cieľom je ukázať, že platí

$$\lim_{N\to\infty} T_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{pre každé } x \in (-L, L). \tag{38}$$

Uvažujme $2L$-periodické rozšírenie funkcie f na celú reálnu os. Bez ujmy na všeobecnosti budeme toto rozšírenie označovať rovnako f. Nech $x \in (-L, L)$ je pevné. V integrále (34) zavedieme substitúciu $s = t - x$. Dostaneme

$$T_N(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, D_N\left(\frac{\pi\,(t-x)}{L}\right) \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} s = t - x, & \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \\ -L \rightsquigarrow -L - x, & L \rightsquigarrow L - x \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L-x}^{L-x} f(x+s)\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s.$$

Z Poznámky 9 vyplýva, že integrand posledného integrálu je $2L$-periodická funkcia. Podľa Lemy 2 (s $a := -x$) potom máme

$$T_N(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L-x}^{L-x} f(x+s)\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x+s)\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s. \tag{39}$$

Podľa Poznámky 9 je Dirichletovo jadro $D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right)$ párna funkcia. Preto integrál v (39) prejde po zámene premennej $s \mapsto -s$ na tvar

$$T_N(x) = -\frac{1}{2L}\int_L^{-L} f(x-s)\, D_N\left(-\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x-s)\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s. \tag{40}$$

Aritmetickým priemerom rovností (39) a (40) získame formulu

$$T_N(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{f(x+s)+f(x-s)}{2}\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s. \tag{41}$$

Následnou aplikáciou identity (33) v Poznámke 9 máme

$$T_N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{f(x+s)+f(x-s)}{2}\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s - \underbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s}_{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{f(x+s)+f(x-s)-f(x^+)-f(x^-)}{2}\, D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s. \tag{42}$$

Dirichletovo jadro $D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right)$ sa pomocou svojej definície v (30) prepíše

$$D_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) = \frac{\sin \frac{N\pi s}{L}}{\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2L}} + \cos \frac{N\pi s}{L}.$$

Zaveďme funkcie

$$g(s) := \frac{f(x+s) + f(x-s) - f(x^+) - f(x^-)}{2},$$

$$h(s) := \frac{f(x+s) + f(x-s) - f(x^+) - f(x^-)}{2\operatorname{tg} \frac{\pi s}{2L}}.$$

Funkcie g a h (premennej s) sú po častiach spojité na $[-L, L]$, a teda i integrovateľné na $[-L, L]$. Je to zaručené jednak predpokladmi o funkcii f, a jednak výpočtami $\lim_{s\to 0} g(s) = 0$, $\lim_{s\to L^-} h(s) = 0 = \lim_{s\to -L^+} h(s)$ a

$$\lim_{s\to 0^\pm} h(s) = |0/0, \text{ l'Hosp.}| = \lim_{s\to 0^\pm} \frac{f'(x+s) - f'(x-s)}{\frac{\pi}{L} \cos^{-2} \frac{\pi s}{2L}} = \pm\frac{L}{\pi}\left[f'(x^+) - f'(x^-)\right].$$

Pomocou funkcií g a h sa potom integrál v (42) vyjadrí v tvare

$$T_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \left(g(s) \cos \frac{N\pi s}{L} + h(s) \sin \frac{N\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s.$$

Podľa Riemannovej–Lebesgueovej lemy 5 posledný integrál pre $N \to \infty$ konverguje do nuly, čím je dokázané tvrdenie v (38).

Dirichletova veta 2 udáva postačujúce podmienky bodovej konvergencie Fourierovho radu (10) na $[-L, L]$, nie však nutné podmienky. Ich optimálne zoslabenie dodnes nie je úplne vyriešený problém. Ukazuje sa totiž, že sa jedná o veľmi delikátnu záležitosť.

(du Bois–Reymond, 1876) – Existuje funkcia f spojitá na $[-L, L]$, ktorej Fourierov rad diverguje aspoň v jednom $x \in [-L, L]$.

(Kolmogorov, 1922) – Existuje funkcia f integrovateľná na $[-L, L]$, ktorej Fourierov rad diverguje pre každé $x \in [-L, L]$.

(Carleson, 1966) – Ak pre funkciu f platí, že $|f|^2$ je integrovateľná na $[-L, L]$, potom jej Fourierov rad bodovo konverguje skoro všade na $[-L, L]$.

Jordanovo kritérium a jednoznačnosť radu

Jedným z najznámejších kritérií rovnomernej konvergencie Fourierových radov je tzv. Jordanovo kritérium. Pripomeňme, že podľa Poznámok 6 a 7 rovnomerne konvergujúce Fourierove rady (10) odpovedajú výhradne spojitým funkciám $f(x)$.

Veta 3 (Jordanovo kritérium rovnomernej konvergencie)

Nech reálna (komplexná) $2L$-periodická funkcia f je spojitá na intervale $[-L, L]$ a jej prvá derivácia f' je po častiach spojitá na $[-L, L]$. Potom jej Fourierov rad (10) *konverguje rovnomerne na celom $\mathbb{R}$ so súčtom $f(x)$.*

Poznámka 11

Podobne ako mocninové rady, tak aj trigonometrické rady sú jednoznačne určené svojím súčtom. Presnejšie, ak dva trigonometrické (nie nutne Fourierove) rady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad \frac{a_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^* \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n^* \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

majú rovnaký súčet skoro všade na $\mathbb{R}$, potom platí $a_0 = a_0^*$, $a_n = a_n^*$, $b_n = b_n^*$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Tento výsledok sa označuje ako Heineho–Cantorova veta.

Obsah

Úloha o vedení tepla s nulovými krajmi

Príklad 8

Stanovme rozloženie teploty $u(x,t)$ v kovovej tyči (súčiniteľ teplotnej vodivosti $\alpha^2 = 1$ cm^2/s) s dĺžkou $L = 50$ cm, ktorá má na začiatku konštantnú teplotu 20°C a ktorej krajné body sú udržiavané na teplote 0°C.

Predložená fyzikálna situácia je ekvivalentná s okrajovou úlohou (1)–(3), t.j.,

$$u_t = u_{xx}, \quad [x,t] \in (0,50) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = f(x) = 20, \quad x \in (0,50), \quad u(0,t) = 0 = u(50,t), \quad t \in (0,\infty).$$

V prvej prednáške sme odvodili jej riešenie u v tvare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2500}} \sin \frac{n\pi x}{50}, \quad [x,t] \in [0,50] \times [0,\infty),$$

kde čísla b_n sú podľa (7) a Poznámky 8 Fourierove koeficienty nepárneho rozšírenia funkcie f na celý interval $(-50,50)$. V súlade s (19) teda máme

$$b_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20\sin\frac{n\pi x}{50}\,\mathrm{d}x = \frac{40}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ párne}, \\ \frac{80}{n\pi}, & n \text{ nepárne}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

a tak napokon dostaneme

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nepárne}}}^{\infty} \frac{80}{n\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2500}} \sin\frac{n\pi x}{50}, \qquad [x,t] \in [0,50]\times[0,\infty). \tag{43}$$

Z rozloženia teploty tyče v (43) vidíme, že bude pomerne rýchlo (exponenciálne) klesať s rastúcim časom. Maximálna teplota sa bude vďaka symetrii úlohy pre každý čas $t \geq 0$ nadobúdať vždy v bode $x = 25$. Po dostatočne dlhom čase sa v tyči ustáli časovo nezávislá rovnovážna teplota $v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$, ktorá v našom prípade je $v(x) \equiv 0$ na $[0,50]$.

Úloha 1

Za akú dobu od začiatku experimentu klesne teplota v celej tyči pod 1°C? V rade (43) použijeme $x = 25$ a jeho prvý člen ($n = 1$) ako odhad teploty. Dostaneme

$$\frac{80}{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 t}{2500}}\sin\frac{25\pi}{50} \leq 1 \quad\Longrightarrow\quad t \geq \frac{2500}{\pi^2}\,\ln\frac{80}{\pi} \approx 820 \text{ s} \approx 14 \text{ minút}.$$

Úloha o vedení tepla s nenulovými krajmi

Zameriame sa teraz na všeobecnú okrajovú úlohu (1)–(3) s nenulovými teplotami T_1, T_2. Rovnovážna teplota $v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ nezávisí na t ani na okrajovej podmienke $f(x)$. Preto jej dosadením do rovnice vedenia tepla (1) dostaneme

$$\underbrace{v_t}_{0} = \alpha^2 v_{xx} \quad \Longrightarrow \quad v''(x) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Neznáme konštanty A, B určíme pomocou okrajových podmienok $v(0) = T_1$ a $v(L) = T_2$. Následne odvodíme

$$v(x) = (T_2 - T_1)\,\frac{x}{L} + T_1, \quad x \in [0, L]. \tag{44}$$

Riešenie u okrajovej úlohy (1)–(3) budeme uvažovať v tvare

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

kde w je riešenie okrajovej úlohy s nulovými krajmi

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}, \quad x \in (0, L) \times (0, \infty),$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x), \quad x \in (0, L), \quad w(0,t) = 0 = w(L,t), \quad t \in (0, \infty).$$

Riešenie w je dané formulou (6), t.j.,

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad [x,t] \in [0,L] \times [0,\infty),$$

kde b_n sú Fourierove koeficienty nepárneho rozšírenia funkcie $f - v$ na celý interval $(-L, L)$, teda

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Pre hľadané rozloženie teploty u v tyči napokon platí vzorec

$$\begin{aligned} u(x,t) = v(x) + w(x,t) &= (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad [x,t] \in [0,L] \times [0,\infty), \end{aligned} \tag{46}$$

s koeficientami b_n z (45).

Príklad 9

Nájdime rozloženie teploty $u(x,t)$ v kovovej tyči (súčiniteľ teplotnej vodivosti $\alpha^2 = 1$ cm^2/s) s dĺžkou $L = 30$ cm, ktorá má na začiatku teplotu

$$u(x,0) = f(x) = 60 - 2x, \quad x \in (0,30),$$

a ktorej krajné body sú udržiavané na stálych teplotách

$$u(0,t) = T_1 = 20^\circ\text{C}, \quad u(30,t) = T_2 = 50^\circ\text{C}, \quad t \in (0,\infty).$$

Podľa (44) je rovnovážna teplota $v(x) = x + 20$, $x \in [0,30]$. Celkové rozloženie teploty $u(x,t)$ tyče pre ľubovoľný čas $t \geq 0$ je dané formulou (46). Vypočítame príslušné Fourierove koeficienty b_n. Podľa rovnosti (45) platí pre $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{15}\int_0^{30} (40 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{30}\,\mathrm{d}x = \frac{300}{n\pi}(5\cos n\pi - 4) = \begin{cases} \frac{300}{n\pi}, & n \text{ párne,} \\ -\frac{2700}{n\pi}, & n \text{ nepárne.} \end{cases}$$

Pre teplotu u napokon dostávame vzorec

$$u(x,t) = x + 20 + \frac{150}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2\pi^2 t}{225}}\sin\frac{k\pi x}{15}$$

$$-\frac{2700}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 t}{900}}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{30}, \quad [x,t] \in [0,30]\times[0,\infty).$$

Poznámka 12

V Príklade 8 sme ukázali, že nulové okrajové podmienky $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ viedli na sínusový rozvoj začiatočnej teploty f, pričom koeficienty b_n tohto rozvoja boli Fourierove koeficienty nepárneho rozšírenia funkcie f na celý interval $[-L, L]$. Podobne sa dá ukázať, že nulové okrajové podmienky typu

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) \tag{47}$$

vedú na kosínusový rozvoj začiatočnej teploty f. V tomto prípade odpovedajúce koeficienty a_n sú Fourierove koeficienty párneho rozšírenia funkcie f na celý interval $[-L, L]$. Okrajové podmienky (47) vyjadrujú fyzikálnu skutočnosť, že krajné body tyče sú tepelne izolované, t.j., neprechádza nimi žiadne teplo.

Poznámka 13

Okrajové podmienky typu (2)–(3), t.j., vyskytujú sa v nich len funkčné hodnoty na okraji danej množiny, sa v matematike často nazývajú Dirichletove. Okrajové podmienky typu (47), t.j., vyskytujú sa v nich len funkčné hodnoty derivácií na okraji danej množiny, sa označujú ako Neumannove okrajové podmienky. V praktických úlohách sa často pracuje s tzv. zmiešanými okrajovými podmienkami.

Obsah

Priestory so skalárnym súčinom, Hilbertov priestor

Definícia 7 (Priestor so skalárnym súčinom)

Nech P je lineárny priestor nad $\mathbb{C}$. Zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \to \mathbb{C}$ spĺňajúce pre každé $x, y, z \in P$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vlastnosti

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ a $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (pozitívna definitnosť),

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (konjugovaná symetria),

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (linearita v prvej zložke),

sa nazýva skalárny súčin na priestore P a dvojica $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sa označuje ako priestor so skalárnym súčinom alebo aj unitárny priestor.

Poznámka 14

Z axióm (ii) a (iii) skalárneho súčinu v Definícii 7 vyplýva jeho anti-linearita v druhej zložke, t.j., pre každé $x, y, z \in P$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha}\, \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta}\, \overline{\langle z, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle .$$

Propozícia 1

Nech P je priestor so skalárnym súčinom. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Pre $x, y \in P$ platí tzv. Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť*

$$\left|\langle x,\, y\rangle\right|^2 \leq \langle x,\, x\rangle \langle y,\, y\rangle. \tag{48}$$

(ii) *Lineárny priestor P je normovaný s normou $\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$, $x \in P$. Obzvlášť, P je metrický priestor s metrikou $\rho(x,y) := \|x-y\|$, $x, y \in P$.*

(iii) *Skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je spojitým zobrazením z $P \times P$ do $\mathbb{C}$ vzhľadom na ρ.*

Dôkaz Propozície 1.

Dokážeme tvrdenie (iii). Nech $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq P$ sú dve postupnosti, ktoré konvergujú v P v metrike ρ, t.j., existujú $x, y \in P$ tak, že $\|x_n - x\| \to 0$ a $\|y_n - y\| \to 0$ pre $n \to \infty$. Pomocou axióm skalárneho súčinu a nerovnosti (48) odvodíme

$$\begin{aligned}
\left|\langle x_n,\, y_n\rangle - \langle x,\, y\rangle\right| &= \left|\langle x_n,\, y_n\rangle - \langle x,\, y_n\rangle + \langle x,\, y_n\rangle - \langle x,\, y\rangle\right| \\
&= \left|\langle x_n - x,\, y_n\rangle + \langle x,\, y_n - y\rangle\right| \leq \left|\langle x_n - x,\, y_n\rangle\right| + \left|\langle x,\, y_n - y\rangle\right| \\
&\overset{(48)}{\leq} \|x_n - x\|\, \|y_n\| + \|x\|\, \|y_n - y\| \;\to 0 \text{ pre } n \to \infty,
\end{aligned}$$

pretože postupnosť $\{\|y_n\|\}$ je ohraničená. Preto $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,\, y_n\rangle = \langle x,\, y\rangle$. ∎

Definícia 8 (Ortonormálny systém vektorov)

Nech P je unitárny priestor. Podmnožina $\mathcal{S} \subseteq P$ sa nazýva ortogonálna, ak pre každé dva rôzne vektory $x, y \in \mathcal{S}$ platí $\langle x,\, y\rangle = 0$, t.j., sú kolmé. Ak naviac $\|x\| = 1$ pre každé $x \in \mathcal{S}$, potom sa podmnožina $\mathcal{S}$ označuje ako ortonormálna.

Úplný unitárny priestor sa nazýva Hilbertov priestor. Fundamentálny význam (hlavne v praktických aplikáciach v technike a fyzike) majú tzv. separabilné Hilbertove priestory, t.j., Hilbertove priestory so spočítateľnou ortonormálnou bázou. Príkladom separabilného nekonečnorozmerného Hilbertovho priestoru je

$$l^2 := \left\{ \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}. \tag{49}$$

Skalárny súčin je v tomto priestore definovaný predpisom

$$\big\langle \{x_n\},\, \{y_n\} \big\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, \overline{y_n}, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in l^2. \tag{50}$$

Každý separabilný nekonečnorozmerný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestorom l^2. Okrem toho každá ortonormálna podmnožina S separabilného Hilbertovho priestoru je najviac spočítateľná.

Pre daný netriviálny kompaktný interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ uvažujme nezápornú (lebesgueovsky) integrovateľnú funkciu $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou

$$\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

V ďalšom výklade sa budeme podrobnejšie zaoberať priestorom

$$\mathcal{L}^2_w[a,b] := \left\{ f\,:\,[a,b] \to \mathbb{C},\ w|f|^2 \text{ je lebesgueovsky integrovateľná na } [a,b] \right\}.$$

Jedná sa o Hilbertov priestor so skalárnym súčinom a normou tvaru

$$\langle f,\,g\rangle := \int_a^b w(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f,g \in \mathcal{L}^2_w[a,b], \tag{51}$$

$$\|f\| := \sqrt{\langle f,\,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b w(x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x}, \quad f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]. \tag{52}$$

Poznámka 15

Hilbertov priestor $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ je separabilný, nekonečnorozmerný a izometricky izomorfný s priestorom l^2 v (49) (pozri Vete 7). Naviac z Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti (48) vyplýva inklúzia $\mathcal{L}^2_w[a,b] \subseteq \mathcal{L}^1_w[a,b]$.

Fourierove koeficienty a Fourierov rad

Definícia 9 (Fourierove koeficienty a Fourierov rad)

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{L}^2_w[a,b]$ je ortonormálna podmnožina, t.j.,

$$\langle \varphi_n,\, \varphi_m \rangle = 0 \text{ pre každé } m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n, \text{ a } \|\varphi_n\| = 1 \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Pre $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ sa komplexné čísla definované

$$c_n := \langle f,\, \varphi_n \rangle = \int_a^b w(x)\, f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{53}$$

nazývajú Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom na systém $\mathcal{S}$. Nekonečný rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \varphi_n$ sa označuje ako Fourierov rad funkcie f vzhľadom na $\mathcal{S}$.

Nech $\{s_N\}$ označuje postupnosť čiastočných súčtov Fourierovho radu funkcie $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ vzhľadom na ortonormálny systém $\mathcal{S}$, t.j.,

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} c_n\, \varphi_n \quad \text{s koeficientami } c_0, \dots, c_N \text{ z (53)}, \quad N \in \mathbb{N}_0. \tag{54}$$

Naším cieľom je preskúmať, kedy $\lim_{N\to\infty} s_N = f$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Veta 4

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{L}^2_w[a,b]$ *je ortonormálna podmnožina,* $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ *je daná funkcia,* $\{c_n\}$ *sú Fourierove koeficienty v* (53) *a* $N \in \mathbb{N}_0$ *je dané. Potom pre každú* $(N+1)$*-ticu komplexných čísiel* $d_0, \ldots, d_N$ *platí nerovnosť*

$$\|f - s_N\| \leq \left\| f - \sum_{n=0}^{N} d_n\, \varphi_n \right\|, \tag{55}$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy keď $d_n = c_n$ *pre každé* $n \in \{0, \ldots, N\}$.

Dôkaz Vety 4.

Položme $I := \|f - \sum_{n=0}^{N} d_n\, \varphi_n\|$. Využitím základných vlastností skalárneho súčinu v Definícii 7 a Propozícii 1 a systému $\mathcal{S}$ v Definícii 9 postupne máme

$$I^2 = \left\| f - \sum_{n=0}^{N} d_n\, \varphi_n \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{m=0}^{N} d_m\, \varphi_m,\ f - \sum_{n=0}^{N} d_n\, \varphi_n \right\rangle$$

$$= \langle f,\, f\rangle - \sum_{n=0}^{N} \overline{d_n}\, \underbrace{\langle f,\, \varphi_n\rangle}_{c_n} - \sum_{m=0}^{N} d_m\, \underbrace{\langle \varphi_m,\, f\rangle}_{\overline{c_m}} + \sum_{m,n=0}^{N} d_m\, \overline{d_n}\, \underbrace{\langle \varphi_m,\, \varphi_n\rangle}_{\delta_{mn}}$$

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$= \langle f, f\rangle - \sum_{n=0}^{N} \overline{d_n}\, c_n - \sum_{m=0}^{N} d_m\, \overline{c_m} + \sum_{n=0}^{N} d_n\, \overline{d_n}$$

$$\overset{m=n}{=} \langle f, f\rangle + \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left(d_n\, \overline{d_n} - d_n\, \overline{c_n} - \overline{d_n}\, c_n + c_n\, \overline{c_n}\right)}_{|d_n - c_n|^2} - \sum_{n=0}^{N} \underbrace{c_n\, \overline{c_n}}_{|c_n|^2}$$

$$= \underbrace{\langle f, f\rangle - \sum_{n=0}^{N} \left|c_n\right|^2}_{\text{nezávisí na } d_0, \ldots, d_N} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \left|d_n - c_n\right|^2}_{\text{toto je } \geq 0, \text{ nulové pre } d_n = c_n} .$$

Z tejto analýzy vyplýva, že hodnota I, ako funkcia premenných $d_0, \ldots, d_N$, je minimálna práve pre voľbu $d_n = c_n$ pre každé $n = 0, \ldots, N$. Teda dostávame

$$I \geq I(c_0, \ldots, c_N) = \left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n\, \varphi_n \right\| = \|f - s_N\|,$$

čo dokazuje platnosť nerovnosti (55). ∎

Poznámka 16

Výsledok Vety 4 ukazuje, že spomedzi všetkých lineárnych kombinácií funkcií φ_n aproximujú funkciu f v istom zmysle, t.j., v L^2-norme, najlepšie práve čiastočné súčty Fourierovho radu funkcie f vzhľadom na systém $\{\varphi_n\}$. Konkrétne, pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ a pre každú $(N+1)$-ticu $d_0, \dots, d_N \in \mathbb{C}$ platí

$$\underbrace{\left\| f - \sum_{n=0}^{N} d_n\, \varphi_n \right\|^2}_{\text{chyba aproximácie}} = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=0}^{N} |d_n - c_n|^2. \tag{56}$$

Dôsledok 1 (Besselova nerovnosť)

S označením Vety 4 platí pre každé $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ a každé $N \in \mathbb{N}_0$ identita

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 + \left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n\, \varphi_n \right\|^2. \tag{57}$$

Obzvlášť, pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí tzv. Besselova nerovnosť

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \le \|f\|^2. \tag{58}$$

Dôkaz Dôsledku 1.

Formula (57) ihneď vyplýva z rovnosti (56) voľbou $d_n := c_n$, $n \in \{0, \ldots, N\}$. Besselova nerovnosť (58) je potom priamym dôsledkom vzorca (57). ■

Poznámka 17

Významným dôsledkom Besselovej nerovnosti (58) je fakt, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ je konvergentný pre každé $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$, t.j., postupnosť $\{c_n\}$ je prvkom Hilbertovho priestoru l^2 v (49). Fourierove koeficienty c_n potom nutne spĺňajú podmienku $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, ktorá korešponduje s Riemannovou–Lebesgueovou lemou 5.

Dôsledok 2 (Parsevalova rovnosť)

S označením Vety 4 platí pre $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ tzv. Parsevalova rovnosť

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2 \tag{59}$$

práve vtedy, keď Fourierov rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n = f$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Dôkaz Dôsledku 2.

Uvedená ekvivalencia bezprostredne vyplýva z formuly (57) pre $N \to \infty$. ■

Príklad 10

Nech $L > 0$ je dané. Pre voľbu funkcie $w(x) \equiv 1$ na intervale $[a, b] = [-L, L]$ sú významné príklady ortonormálnych systémov funkcií v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[-L, L]$ trigonometrický a exponenciálny systém z Poznámky 4, t.j.,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}\, \mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{L}}, \ n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{60}$$

Príkladom ortonormálneho systému v priestore $\mathcal{L}^2[-1, 1]$ je systém polynómov

$$R_n(x) := \frac{1}{n!\, 2^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{61}$$

Ortonormálny systém (61) vznikol Gramovým–Schmidtovým ortonormalizačným procesom pre lineárne nezávislú množinu polynómov $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[-1, 1]$. Polynómy R_n, $n \in \mathbb{N}_0$, definované v (61) sú vhodnými konštantnými násobkami tzv. Legendreových polynómov. Tejto téme sa budeme podrobnejšie venovať ďalej v Príklade 18.

Príklad 11

Pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2[-L, L]$ nie je ťažké odvodiť súvislosť medzi trigonometrickými Fourierovými koeficientami a_n a b_n v (18) a (19) a Fourierovými koeficientami c_n v (53). Konkrétne, platí

$$a_0\sqrt{L} = c_0\sqrt{2}, \qquad \{a_n\sqrt{L},\, b_n\sqrt{L},\ n \in \mathbb{N}\} = \{c_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Besselova nerovnosť (58) má v tomto prípade tvar

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ak platia predpoklady Dirichletovej Vety 2, Parsevalova rovnosť (59) má tvar

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{62}$$

Príklad 12

Aplikáciou Parsevalovej rovnosti (62) v Príkladoch 6 a 7 získame identity

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rieszova–Fischerova veta

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je nejaký ortonormálny systém funkcií v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. V Dôsledku 2 sme odvodili nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ príslušný Fourierov rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n$ konvergoval v norme k funkcii f. Konkrétne, platí ekvivalencia

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n\,\varphi_n \right\| = 0 \iff \text{rad } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \text{ konverguje so súčtom } \|f\|^2.$$

V nasledujúcom výklade tieto poznatky podstatne rozšírime. Obzvlášť, ukážeme, že pre daný ortonormálny systém $\mathcal{S}$ sú Fourierove rady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n$ jediné konvergentné rady v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ (viď Dôsledok 3).

Lema 6

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je ortonormálna podmnožina v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a nech $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel s vlastnosťou, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n$ konverguje k funkcii f v norme priestoru $\mathcal{L}^2[a,b]$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n$ je Fourierov rad funkcie f, t.j., čísla c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú Fourierove koeficienty funkcie f definované v (53).

Dôkaz Lemy 6.

Využijeme spojitosť skalárneho súčinu v Propozícii 1(iii). Pre dané $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\langle f, \varphi_n\rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} c_k\, \varphi_k \right), \varphi_n \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \left(\sum_{k=0}^{m} c_k\, \varphi_k \right), \varphi_n \right\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_n\rangle}_{\delta_{kn}} = \lim_{m\to\infty} c_n = c_n,$$

čo so zreteľom na (53) dokazuje tvrdenie. ∎

Poznámka 18

V predpokladoch Vety 1 sme požadovali rovnomernú konvergenciu trigonometrického radu (10), t.j., konvergenciu v maximálnej norme priestoru $\mathcal{C}[-L, L]$, kým v Leme 6 nám na dosiahnutie rovnakého výsledku – rad je Fourierovým radom svojho súčtu – stačila konvergencia radu iba v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[-L, L]$. Keďže platí inklúzia $\mathcal{C}[-L, L] \subseteq \mathcal{L}^2_w[-L, L]$, v tomto kontexte Lema 6 v prípade trigonometrického systému $\mathcal{S}$ v (60) vylepšuje výsledky Vety 1. Na druhej strane je nutné dodať, že v priestore $\mathcal{C}[-L, L]$ je konvergencia v maximálnej norme silnejšia požiadavka než konvergencia v norme Hilbertovho priestoru $\mathcal{L}^2_w[-L, L]$.

Veta 5 (Rieszova–Fischerova)

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je ortonormálna podmnožina v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a nech $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť z priestoru l^2 v (49). Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ konverguje v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$, t.j., existuje funkcia $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ taká, že platí konvergencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n = f$ v norme. Naviac, čísla c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom na systém $\mathcal{S}$.

Dôkaz Vety 5.

Nech $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je dané ako v predpokladoch vety a uvažujme postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ prvkov priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ definovanú $f_n := \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je cauchyovská v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Pre $n > m$ máme

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k - \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 \\ &= \left\langle \left(\sum_{k=m+1}^{n} c_k \varphi_k \right), \left(\sum_{l=m+1}^{n} c_l \varphi_l \right) \right\rangle = \sum_{k,l=m+1}^{n} c_k \overline{c_l} \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle}_{\delta_{kl}} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2. \end{aligned} \tag{63}$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Podľa predpokladov nekonečný rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konverguje, a preto podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria konvergencie platí

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } n > m \geq n_0 \text{ platí } \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 < \varepsilon^2$$

(inými slovami, postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ je cauchyovská). So zreteľom na identitu (63) je však tento výrok ekvivalentný s

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } n > m \geq n_0 \text{ platí } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Teda skutočne postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je cauchyovská v norme priestoru $\mathcal{L}_w^2[a,b]$. A keďže priestor $\mathcal{L}_w^2[a,b]$ je úplný, postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je následne i konvergentná v norme, t.j., existuje $f \in \mathcal{L}_w^2[a,b]$ taká, že $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Inak povedané, rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n = f$ v norme priestoru $\mathcal{L}_w^2[a,b]$. Skutočnosť, že sa jedná o Fourierov rad funkcie f vzhľadom na systém $\mathcal{S}$, napokon vyplýva z Lemy 6. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Dôsledok 3

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je ortonormálny systém v* $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ *a nech* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je daná postupnosť komplexných čísiel. Potom rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *konverguje v priestore* $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ *práve vtedy, keď čísla* c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *sú Fourierove koeficienty vhodnej funkcie* $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ *vzhľadom na systém* $\mathcal{S}$.

Dôkaz Dôsledku 3.

Smer "$\Rightarrow$" je obsahom Lemy 6. Platnosť implikácie "$\Leftarrow$" je dôsledkom Rieszovej–Fischerovej vety 5. Konkrétne, ak c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú Fourierove koeficienty funkcie $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$, potom podľa Poznámky 17 je číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konvergentný, a teda postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2$. To následne podľa Rieszovej–Fischerovej vety 5 dokazuje konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. ∎

Poznámka 19

Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného ortonormálneho systému $\mathcal{S}$ nie je funkcia f v Dôsledku 3 pre danú postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ určená jednoznačne. Na druhej strane, práve jedna z takýchto funkcií je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ v norme Hilbertovho priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Úplnosť a uzavretosť ortonormálnych systémov

Definícia 10 (Úplný ortonormálny systém funkcií)

Ortonormálny systém $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{L}^2_w[a,b]$ sa nazýva úplný (v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$), ak $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$, t.j., ak platí $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$, potom nutne funkcia $f = 0$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Predpoklad úplnosti ortonormálneho systému $\mathcal{S}$ zaručí v Dôsledku 3 jednoznačnosť funkcie f. Nasledujúce tvrdenie je jedným z hlavných výsledkov tejto sekcie.

Veta 6

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je úplný ortonormálny systém v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a nech $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ je nejaká postupnosť komplexných čísiel. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ je prvkom priestoru l^2.*

(ii) *Rad $\sum_{n=0}^\infty c_n \varphi_n$ konverguje v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.*

(iii) *Existuje jediná funkcia $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ s vlastnosťou, že čísla c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú jej Fourierove koeficienty vzhľadom na systém $\mathcal{S}$.*

V tomto prípade platí $\sum_{n=0}^\infty c_n \varphi_n = f$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Dôkaz Vety 6.

Implikácia "(i) $\Rightarrow$ (ii)" vyplýva z Rieszovej–Fischerovej vety 5, ekvivalencia tvrdení (ii) a (iii) je obsahom Dôsledku 3 a napokon platnosť implikácie "(iii) $\Rightarrow$ (i)" je komentovaná v Poznámke 17. V súlade s Poznámkou 19 stačí teda dokázať jednoznačnosť funkcie f v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Nech $g \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ je ďalšia funkcia, ktorá má za svoje Fourierove koeficienty čísla c_n, t.j.,

$$\langle f, \varphi_n \rangle = c_n = \langle g, \varphi_n \rangle \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Potom $\langle f - g, \varphi_n \rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ a vďaka úplnosti systému $\mathcal{S}$ podľa Definície 10 dostávame rovnosť $f = g$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. ■

Pre pevne zvolený úplný ortonormálny systém $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{L}^2_w[a,b]$ vyplýva z výsledkov Vety 6 istá korešpondencia medzi prvkami Hilbertových priestorov $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a l^2. Presnejšie, zobrazenie $\Psi : \mathcal{L}^2_w[a,b] \to l^2$ definované

$$\mathcal{L}^2_w[a,b] \ni f \;\mapsto\; \Psi(f) := \{c_n = \langle f, \varphi_n \rangle, n \in \mathbb{N}_0\} \in l^2, \tag{64}$$

je zrejme lineárna bijekcia. V nasledujúcej vete ukážeme, že o zobrazení Ψ v (64) platí dokonca silnejšie tvrdenie.

Veta 7

Nech $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je nejaká úplná ortonormálna podmnožina v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Zobrazenie $\Psi : \mathcal{L}^2_w[a,b] \to l^2$ definované v (64) je izometrický izomorfizmus Hilbertových priestorov $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a l^2.

Dôkaz Vety 7.

Skutočnosť, že Ψ v (64) je vzájomne jednoznačné zobrazenie, vyplýva z Vety 6, linearita zobrazenia je evidentná z jeho definície v (64) a z vlastností skalárneho súčinu v Definícii 7(iii). Ukážeme, že zobrazenie Ψ zachováva skalárny súčin. Pre dané $f, g \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ označme $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}, \{d_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2$ ich príslušné postupnosti Fourierových koeficientov vzhľadom na systém $\mathcal{S}$. Podľa Vety 6 platí

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n\,\varphi_n \quad \text{v norme } \mathcal{L}^2_w[a,b]. \tag{65}$$

Využitím vlastností skalárneho súčinu v Definícii 7 a Propozícii 1 postupne máme

$$\langle f,\, g\rangle \overset{(65)}{=} \left\langle \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n\,\varphi_n \right),\, g \right\rangle \overset{\text{Propozícia 1(iii)}}{=} \lim_{N\to\infty} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N} c_n\,\varphi_n \right),\, g \right\rangle$$

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\overset{\text{Definícia 7(iii)}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n \langle \varphi_n, g \rangle \overset{\text{Definícia 7(ii)}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n \overline{d_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{d_n}$$

$$\overset{(50)}{=} \langle \{c_n\}, \{d_n\} \rangle \overset{(64)}{=} \langle \Psi(f), \Psi(g) \rangle,$$

t.j., zobrazenie Ψ zachováva skalárny súčin. Dôkaz je kompletný. ∎

Definícia 11 (Uzavretý ortonormálny systém funkcií)

Nech $\mathcal{S}$ je ortonormálny systém funkcií v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Hovoríme, že systém $\mathcal{S}$ je uzavretý v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$, ak lineárny obal $\operatorname{Lin}\mathcal{S}$ je podpriestor hustý v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$, t.j., uzáver v norme $\overline{\operatorname{Lin}\mathcal{S}} = \mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Uzavretosť ortonormálneho systému $\mathcal{S}$ teda umožňuje každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ aproximovať v norme s ľubovoľnou presnosťou konečnou lineárnou kombináciou funkcií zo systému $\mathcal{S}$. Inými slovami, existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \operatorname{Lin}\mathcal{S}$

taká, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Veta 8

Ortonormálny systém $\mathcal{S}$ je uzavretý v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ práve vtedy keď je úplný v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$.

Dôkaz Vety 8.

Nech ortonormálny systém $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je uzavretý v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$ a nech funkcia $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ spĺňa $\langle f,\, \varphi_n\rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$, t.j., $f \in \mathcal{S}^\perp$. V súlade s komentárom za Definíciou 11 existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \operatorname{Lin}\mathcal{S}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ v norme $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Potom ale nutne platí i $\langle f,\, f_n\rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$, a následne

$$\|f\|^2 = \langle f,\, f\rangle = \left\langle f,\, \lim_{n\to\infty} f_n \right\rangle \overset{\text{Propozícia 1(iii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle f,\, f_n\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

t.j., funkcia $f = 0$ v norme priestoru $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Podľa Definície 10 je teda systém $\mathcal{S}$ úplný v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Naopak, ak ortonormálny systém $\mathcal{S}$ je úplný v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$, potom podľa Vety 6 pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2_w[a,b]$ platí $f = \sum_{n=0}^\infty c_n\, \varphi_n$, kde c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom na $\mathcal{S}$ v (53). To ale znamená, že funkcia $f \in \overline{\operatorname{Lin}\mathcal{S}}$. Preto je lineárny obal $\operatorname{Lin}\mathcal{S}$ podpriestor hustý v $\mathcal{L}^2_w[a,b]$, a teda podľa Definície 11 je ortonormálny systém $\mathcal{S}$ uzavretý v priestore $\mathcal{L}^2_w[a,b]$. Dôkaz je úplný. ∎

Poznámka 20

Dôležitými úplnými (a podľa Vety 8 i uzavretými) ortonormálnymi systémami v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[-L, L]$ sú trigonometrický a exponenciálny ortonormálny systém v (60) a systém polynómov definovaných v (61).

Poznámka 21

Významnou vlastnosťou úplných ortonormálnych systémov v $\mathcal{L}_w^2[a, b]$ je skutočnosť, že predstavujú ortonormálne bázy v tomto priestore. Konkrétne, ak $\mathcal{S} = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{L}_w^2[a, b]$ je nejaký úplný ortonormálny systém funkcií, potom pre každé $f \in \mathcal{L}_w^2[a, b]$ existuje jediná postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexných čísiel s vlastnosťou

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n \quad \text{v norme priestoru } \mathcal{L}_w^2[a, b].$$

Čísla c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sú Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom na $\mathcal{S}$, t.j.,

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_b^b w(x)\, f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Uvedené pozorovanie je priamym dôsledkom Viet 8 a 6.

Symetrické operátory a ortonormálne systémy

Jedným z významných a prirodzených zdrojov ortonormálnych systémov funkcií sú množiny vlastných funkcií symetrických lineárnych operátorov.

Definícia 12 (Symetrický lineárny operátor)

Nech P je unitárny priestor nad $\mathbb{C}$ a nech $\mathrm{A} : \mathcal{D}(\mathrm{A}) \subseteq P \to P$ je lineárny operátor. Povieme, že operátor A je symetrický na podmnožine $M \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{A})$, ak

$$\langle \mathrm{A}x,\, y\rangle = \langle x,\, \mathrm{A}y\rangle \quad \text{pre každé dva vektory } x, y \in M. \tag{66}$$

Poznámka 22

Keďže uvažovaný operátor A v Definícii 12 je lineárny, je korektné požadovať, aby obor jeho definície $\mathcal{D}(\mathrm{A})$ bol (algebraický) lineárny podpriestor v P.

Príklad 13

Nech n je dané prirodzené číslo a P je n-rozmerný unitárny priestor. Potom všetky symetrické lineárne operátory A pôsobiace na priestore P sú reprezentované $n \times n$ komplexnými hermiteovskými maticami A, t.j.,

$$\text{maticami } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ s vlastnosťou } \overline{A^T} = A.$$

Príklad 14

Pre $P := \mathcal{L}^2[a,b]$ a $\mathcal{D}(\mathsf{A}) := \mathcal{C}^2[a,b]$ (komplexné funkcie so spojitou druhou deriváciou na $[a,b]$) uvažujme operátor A s predpisom

$$\mathsf{A}f(x) := f''(x), \quad f \in \mathcal{C}^2[a,b]. \tag{67}$$

Operátor A v (67) je zrejme lineárny a pôsobí v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[a,b]$, keďže platí inklúzia $\mathcal{C}^2[a,b] \subseteq \mathcal{L}^2[a,b]$. Preskúmame, kde na $\mathcal{D}(A)$ je operátor A symetrický. Podľa (51) a (67) máme

$$\langle \mathsf{A}f,\, g\rangle = \int_a^b \mathsf{A}f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f''(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f,g \in \mathcal{C}^2[a,b].$$

Túto rovnosť dvojnásobnou integráciou per-partes upravíme na tvar

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{A}f,\, g\rangle &= \left[f'(x)\,\overline{g(x)}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[f'(x)\,\overline{g(x)}\right]_a^b - \left[f(x)\,\overline{g'(x)}\right]_a^b + \int_a^b f(x)\,\overline{g''(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[f'(x)\,\overline{g(x)} - f(x)\,\overline{g'(x)}\right]_a^b + \langle f,\, \mathsf{A}g\rangle.\end{aligned}$$

Podľa Definície 12 požiadavka symetrickosti operátora A vyžaduje podmienku

Príklad 14

$$f'(a)\,\overline{g(a)} - f(a)\,\overline{g'(a)} = f'(b)\,\overline{g(b)} - f(b)\,\overline{g'(b)}, \tag{68}$$

ktorú však nespĺňajú všetky dvojice funkcií $f, g \in \mathcal{D}(\mathrm{A})$. Operátor A teda nie je symetrický na celom svojom obore definície, ale iba na vhodných podpriestoroch v $\mathcal{D}(\mathrm{A})$, na ktorých platí podmienka (68). Takýmito podpriestormi sú napríklad

$$\mathcal{D}_1(\mathrm{A}) := \left\{f \in \mathcal{C}^2[a,b],\ f(a) = 0 = f(b)\right\}, \tag{69}$$

$$\mathcal{D}_2(\mathrm{A}) := \left\{f \in \mathcal{C}^2[a,b],\ f'(a) = 0 = f'(b)\right\}. \tag{70}$$

Poznamenajme, že podmienkam v (69) sa hovorí Dirichletove okrajové podmienky, kým podmienky v (70) sa nazývajú Neumannove okrajové podmienky.

Definícia 13 (Vlastné číslo a vlastný vektor lineárneho operátora)

Nech P je unitárny priestor a A je daný lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(A) \subseteq P$. Komplexné číslo λ sa nazýva vlastné číslo (hodnota) operátora A, ak existuje nenulový vektor $x \in \mathcal{D}(\mathrm{A})$ s vlastnosťou $\mathrm{A}x = \lambda x$. Vektor x sa potom označuje ako vlastný vektor operátora A prislúchajúci vlastnému číslu λ.

Nasledujúca veta poukazuje na kľúčový význam symetrických lineárnych operátorov v teórii ortonormálnych systémov.

Veta 9

Nech P je unitárny priestor a A je daný symetrický lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(\mathrm{A}) \subseteq P$. Potom každé vlastné číslo operátora A je reálne a vlastné vektory prislúchajúce rôznym vlastným číslam sú vzájomne ortogonálne.

Dôkaz Vety 9.

Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo operátora A a nech $x \in \mathcal{D}(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$ je odpovedajúci vlastný vektor, t.j., $\mathrm{A}x = \lambda x$. Platí $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \neq 0$ a využitím vlastností skalárneho súčinu a symetrickosti operátora A postupne máme

$$\lambda = \frac{\lambda\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle \mathrm{A}x, x\rangle}{\|x\|^2} \stackrel{(66)}{=} \frac{\langle x, \mathrm{A}x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle x, \lambda x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\overline{\lambda}\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} = \overline{\lambda},$$

a tak $\lambda \in \mathbb{R}$. Nech ďalej $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú dve rôzne vlastné hodnoty operátora A s vlastnými vektormi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$, t.j., platia rovnosti $\mathrm{A}x_1 = \lambda_1 x_1$ a $\mathrm{A}x_2 = \lambda_2 x_2$. Potom

$$\begin{aligned} \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle &= \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle \mathrm{A}x_1, x_2\rangle \stackrel{(66)}{=} \langle x_1, \mathrm{A}x_2\rangle \\ &= \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle, \end{aligned}$$

z čoho dostaneme $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Vďaka tomu, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, napokon máme $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, t.j., vlastné vektory x_1, x_2 sú vzájomne ortogonálne. ■

Sturmov–Liouvilleov diferenciálny operátor

Jedným z najvýznamnejších príkladov lineárnych diferenciálnych operátorov s fundamentálnymi aplikáciami v matematickej fyzike je Sturmov–Liouvilleov diferenciálny operátor, ktorý má štandardný tvar

$$\mathsf{L}y(x) := -\big[p(x)\,y'(x)\big]' + q(x)\,y(x). \tag{71}$$

V (71) uvažujeme funkcie $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$ a $q \in \mathcal{C}[a,b]$ (funkcie spojito diferencovateľné a spojité na intervale $[a,b]$). Jeho vhodným pôsobiskom je Hilbertov priestor $\mathcal{L}^2[a,b]$ so skalárnym súčinom v (51). Sturmov–Liouvilleov operátor L v (71) je zrejme prirodzene definovaný na $\mathcal{D}(\mathsf{L}) = \mathcal{C}^2[a,b]$ (pre jednoduchosť budeme uvažovať len reálne funkcie so spojitou druhou deriváciou na $[a,b]$). Nie je však všade na tomto podpriestore symetrický. Analogicky ako v Príklade 14 dostaneme dvojnásobnou integráciou per-partes pre $y, z \in \mathcal{D}(\mathsf{L})$ identitu

$$\langle \mathsf{L}y,\, z\rangle = \big[p(x)\,y(x)\,z'(x) - p(x)\,y'(x)\,z(x)\big]_a^b + \langle y,\, \mathsf{L}z\rangle. \tag{72}$$

Formulu (72) možno zavedením tzv. zovšeobecneného wronskiánu funkcií y, z

$$W[y,z](x) := p(x)\begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x)\end{vmatrix} \tag{73}$$

zapísať v elegantnejšom tvare

$$\langle \mathsf{L}y,\, z\rangle = W[y,z](b) - W[y,z](a) + \langle y,\, \mathsf{L}z\rangle. \tag{74}$$

Z rovnosti (74) potom ihneď vidíme, že v súlade s Definíciou 12 Sturmov–Liouvilleov operátor L je symetrický na podmnožinách priestoru $\mathcal{D}(\mathsf{L})$ spĺňajúcich

$$W[y,z](a) = W[y,z](b) \quad \text{pre každú dvojicu funkcií } y, z. \tag{75}$$

Požiadavka splnenia rovnosti (75) vedie k rôznym okrajovým podmienkam pre funkcie z podpriestoru $\mathcal{D}(\mathsf{L})$.

Príklad 15

V prípade, ak funkcia $p(x)$ spĺňa podmienky

$$p(a) = 0 = p(b), \tag{76}$$

pre zovšeobecnený wronskián $W[y,z](x)$ platia podľa definície v (73) rovnosti $W[y,z](a) = 0 = W[y,z](b)$, a teda i formula (75) pre každú dvojicu funkcií $y, z \in \mathcal{C}^2[a,b]$. Sturmov–Liouvilleov operátor L je teda v tomto prípade symetrický na celom svojom definičnom obore $\mathcal{D}(\mathsf{L}) = \mathcal{C}^2[a,b]$.

Príklad 16 (Separované okrajové podmienky)

Klasickým a v praktických aplikáciach najrozšírenejším typom okrajových podmienok pre funkcie $y \in \mathcal{D}(\mathsf{L})$, ktoré zaručujú vlastnosť symetrickosti Sturmovho–Liouvilleovho operátora L, sú tzv. separované okrajové podmienky tvaru

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{a} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{77}$$

kde α_1, α_2, β_1, β_2 sú dané reálne čísla spĺňajúce

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0 \quad \text{a} \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0. \tag{78}$$

Predpoklady (78) zabezpečia, že pre každé dve funkcie y a z, ktoré spĺňajú okrajové podmienky (77), sú matice

$$\begin{pmatrix} y(a) & z(a) \\ y'(a) & z'(a) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y(a) & y'(a) \\ z(a) & z'(a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(b) & z(b) \\ y'(b) & z'(b) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y(b) & y'(b) \\ z(b) & z'(b) \end{pmatrix}$$

singulárne, a tak podľa (73) platí $W[y,z](a) = 0 = W[y,z](b)$. V súlade s (75) je preto operátor L symetrický na podpriestore všetkých funkcií $y \in \mathcal{D}(\mathsf{L})$, ktoré vyhovujú okrajovým podmienkam (77) a (78). Poznamenajme, že Dirichletove, resp. Neumannove okrajové podmienky predstavené v (69), resp. (70) sú špeciálnym typom separovaných okrajových podmienok pre $\alpha_1 = 1 = \beta_1$ a $\alpha_2 = 0 = \beta_2$, resp. $\alpha_1 = 0 = \beta_1$ a $\alpha_2 = 1 = \beta_2$.

Hľadanie vlastných čísiel (hodnôt) Sturmovho–Liouvilleovho operátora L je jednou z hlavných úloh tzv. Sturmovej–Liouvilleovej teórie. V súlade s (71) a Definíciou 13 sa jedná o nájdenie všetkých komplexných čísiel λ, pre ktoré má lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu (Sturmova–Liouvilleova rovnica)

$$\mathsf{L}y = -\big[p(x)\,y'\big]' + q(x)\,y = \lambda y \tag{79}$$

na intervale $[a, b]$ netriviálne riešenie y, spravidla vyhovujúce vhodným okrajovým podmienkam. Daná funkcia y sa potom nazýva vlastná funkcia operátora L odpovedajúca vlastnému číslu λ.

Veta 10 (Vlastné hodnoty operátora L – separované okrajové podmienky)

Nech funkcie $p \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $q \in \mathcal{C}[a, b]$ a $p(x) > 0$ pre každé $x \in [a, b]$. Potom Sturmov–Liouvilleov operátor L *má vzhľadom na každé separované okrajové podmienky* (77)–(78) *iba reálne vlastné hodnoty, ktoré vytvárajú rastúcu, zhora neohraničenú postupnosť, t.j.,*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \tag{80}$$

Každému vlastnému číslu λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, odpovedá jediná lineárne nezávislá vlastná funkcia y_n spĺňajúca dané okrajové podmienky (77)–(78) *a majúca práve n nulových bodov v otvorenom intervale (a, b). Naviac, množina všetkých vlastných funkcií y_n, $n \in \mathbb{N}_0$, operátora* L *vytvára úplný ortonormálny systém v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[a, b]$.*

Príklad 17

Nájdime vlastné čísla a funkcie diferenciálneho operátora $\mathsf{L}y = -y''$ vzhľadom na Dirichletove okrajové podmienky $y(0) = 0 = y(1)$. V súlade s (71) sa jedná o Sturmov–Liouvilleov operátor s $p(x) \equiv 1$ a $q(x) \equiv 0$ na $[0,1]$. Skúmame teda riešiteľnosť a následne i netriviálne riešenia okrajovej úlohy

$$\mathsf{L}y = -y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0 = y(1), \tag{81}$$

pre vhodné $\lambda \in \mathbb{C}$. Z Príkladu 16 vieme, že predpísané okrajové podmienky $y(0) = 0 = y(1)$ zaručujú symetrickosť operátora L. Podľa Vety 9 môže mať preto okrajová úloha (81) netriviálne riešenie iba pre reálne hodnoty λ. Nie je ťažké sa presvedčiť, že v prípade $\lambda \le 0$ vyhovuje úlohe (81) iba funkcia $y \equiv 0$ na $[0,1]$, a teda žiadne $\lambda \le 0$ nie je vlastným číslom operátora L. Pre $\lambda > 0$ má diferenciálna rovnica v (81) všeobecné riešenie

$$y(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{82}$$

Pomocou okrajových podmienok v (81) stanovíme konštanty C_1 a C_2. Platí

$$C_1 = 0, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lambda = (n+1)^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{83}$$

Sturmov–Liouvilleov operátor L v zadaní príkladu má teda vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné funkcie tvaru

$$\lambda_n = (n+1)^2\pi^2, \quad y_n = \sin(n+1)\pi x, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{84}$$

Príklad 17

Daný systém vlastných funkcií y_n, $n \in \mathbb{N}_0$, je ortogonálny na intervale $[0,1]$, nakoľko podľa (51) máme

$$\int_0^1 \sin(m+1)\pi x \, \sin(n+1)\pi x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2}, & m = n. \end{cases} \tag{85}$$

Obzvlášť, podľa Vety 10 množina vlastných funkcií

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2} \sin(n+1)\pi x, \quad n \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{86}$$

tvorí úplný ortnonormálny systém v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[0,1]$. Z Poznámky 21 následne vyplýva, že každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2[0,1]$ možno na intervale $[0,1]$ jednoznačne rozvinúť do (Fourierovho) radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{2} \sin(n+1)\pi x, \quad \text{kde} \quad c_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \, \sin(n+1)\pi x \, \mathrm{d}x.$$

Tento rozvoj je možné vďaka periodickosti funkcií $\sin(n+1)\pi x$, $n \in \mathbb{N}_0$, rozšíriť i na celé $\mathbb{R}$, čím dostaneme tzv. nepárne periodické rozšírenie funkcie f (pozri i Poznámku 8). Poznamenajme, že posledný rozvoj je chápaný v norme Hilbertovho priestoru $\mathcal{L}^2[0,1]$, t.j., platí skoro všade na $[0,1]$, resp. na $\mathbb{R}$.

Príklad 18 (Legendreove polynómy)

Uvažujme teraz Sturmov–Liouvilleov operátor L v (71) tvaru

$$\mathsf{L}y = -\left[\left(1-x^2\right)y'\right]' \tag{87}$$

pôsobiaci v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[-1,1]$. V tomto prípade $p(x) = 1 - x^2$ a $q(x) \equiv 0$ na $[-1,1]$, pričom $p(-1) = 0 = p(1)$. Podľa Príkladu 15 je teda operátor L symetrický na celom podpriestore $\mathcal{C}^2[-1,1]$. Hľadanie jeho vlastných čísiel a funkcií sa preto redukuje na riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$\mathsf{L}y = -\left[\left(1-x^2\right)y'\right]' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{88}$$

bez akýchkoľvek dodatočných okrajových podmienok. Dá sa dokázať, že rovnica (88) má netriviálne riešenie, ktoré je ohraničené na $[-1,1]$, práve vtedy, keď $\lambda = n(n+1)$ pre $n \in \mathbb{N}_0$. Týmto riešením je potom tzv. Legendreov polynóm

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{89}$$

Poznamenajme, že rovnica (88) sa pre uvedenú voľbu parametra λ označuje ako Legendreova diferenciálna rovnica a zvyčajne sa zapisuje v tvare

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{90}$$

Niekoľko prvých Legendreových polynómov má tvar

Príklad 18 (Legendreove polynómy)

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x, \quad \cdots \tag{91}$$

Popri explicitnom vyjadrení (89) (tzv. Rodriguesova formula) má pre praktický výpočet jednotlivých Legendreových polynómov význam rekurentná formula

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\,xP_n(x) - \frac{n}{n+1}\,P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{92}$$

Množina všetkých vlastných čísiel operátora L v zadaní príkladu má teda tvar

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{93}$$

pričom odpovedajúce vlastné funkcie sú Legendreove polynómy $P_n(x)$. V súlade s Vetou 9 je systém funkcií $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonálny na intervale $[-1, 1]$, t.j.,

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pre } n \neq m. \tag{94}$$

Okrem toho platí $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Obzvlášť, systém funkcií

$$\mathcal{S} = \left\{ R_n := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{95}$$

Príklad 18 (Legendreove polynómy)

vytvára ortonormálnu bázu priestoru $\mathcal{L}^2[-1,1]$. Tento výsledok vo svetle Poznámok 16 a 21 hovorí, že pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ a $N \in \mathbb{N}$ je polynóm

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \, R_n(x), \quad \text{kde} \quad c_n = \int_{-1}^{1} f(x)\, R_n(x)\, \mathrm{d}x, \tag{96}$$

najlepšou aproximáciou f na $[-1,1]$ spomedzi všetkých polynómov stupňa N.

Príklad 19 (Periodické okrajové podmienky)

Poznamenajme, že okrem separovaných okrajových podmienok spomenutých v Príklade 16 sa v praxi používajú aj iné typy okrajových podmienok, ktoré zabezpečia symetrickosť Sturmovho–Liouvilleovho operátora L, t.j., platnosť podmienky (75). Takými sú napríklad tzv. periodické okrajové podmienky

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{97}$$

s dodatočným predpokladom $p(x) > 0$ na $[a,b]$ a $p(a) = p(b)$. V tomto prípade však vlastné čísla operátora L nemusia byť jednoduché. Napríklad operátor $\mathrm{L}y = -y''$ z Príkladu 17 má na intervale $[a,b] := [0,2\pi]$ vzhľadom na periodické okrajové podmienky (97) dvojnásobné vlastné číslo $\lambda = 1$ s dvomi lineárne nezávislými vlastnými funkciami $y_1(x) = \cos x$ a $y_2(x) = \sin x$.

Obsah

Motivácia – Cesàrove priemery postupnosti

Ďalší výklad je motivovaný jedným výsledkom z teórie číselných postupností.

Definícia 14 (Cesàrove priemery postupnosti)

Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nejaká postupnosť komplexných čísiel. Postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná predpisom

$$c_n := \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{98}$$

sa nazýva postupnosť Cesàrových priemerov postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Lema 7

Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť komplexných čísiel, t.j.,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}. \tag{99}$$

Potom i postupnosť Cesàrových priemerov $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ v (98) konverguje a platí

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = a. \tag{100}$$

Dôkaz Lemy 7.

V súlade s predpokladom (99) pre dané $\varepsilon > 0$ existuje index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ taký, že

$$\text{pre každé } k \geq N_\varepsilon \text{ platí nerovnosť } |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{101}$$

Zaveďme nasledujúce označenie

$$B := \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |a_k - a| \quad \text{a} \quad M_\varepsilon := 1 + \max\left\{N_\varepsilon,\ 1 + \left\lfloor \frac{2B}{\varepsilon} \right\rfloor\right\} \tag{102}$$

(symbol $\lfloor\cdot\rfloor$ štandardne znamená dolná celá časť reálneho čísla). Využitím trojuholníkovej nerovnosti potom pre každý index $n \geq M_\varepsilon$ postupne dostávame

$$\begin{aligned}
|c_n - a| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - a\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k - a| \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{N_\varepsilon}|a_k - a| + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}|a_k - a|\right] \overset{(101),(102)}{<} \frac{1}{n+1}\left[B + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&= \underbrace{\frac{B}{n+1}}_{>M_\varepsilon} + \underbrace{\frac{n - N_\varepsilon}{n+1}}_{<1}\,\frac{\varepsilon}{2} < \frac{B}{M_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(102)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dôkaz Lemy 7 (pokračovanie).

Ukázali sme teda, že pre dané $\varepsilon > 0$

existuje index $M_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tak, že pre každé $n \geq M_\varepsilon$ platí nerovnosť $|c_n - a| < \varepsilon$.

Toto pozorovanie však znamená, že postupnosť Cesàrových priemerov $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje s limitou a, t.j., platí formula (100). ■

Poznámka 23

Poznamenajme, že postupnosť Cesàrových priemerov $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ môže konvergovať aj v prípade, keď pôvodná postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je divergentná. Napríklad postupnosť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, osciluje, avšak jej odpovedajúca postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ v (98) konverguje s limitou 0, keďže platí

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ nepárne}, \\ \frac{1}{n+1}, & n \text{ párne}. \end{cases}$$

Na druhej strane, postupnosť $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, tiež diverguje, avšak rovnako diverguje i postupnosť jej Cesàrových priemerov $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, nakoľko

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n+1} \, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Fejérova veta

Nech $L > 0$ a nech f je reálna (komplexná) funkcia integrovateľná na intervale $[-L, L]$. V Definícii 4 sme predstavili komplexný Fourierov polynóm a komplexné Fourierove koeficienty funkcie f na $[-L, L]$ vzhľadom na exponenciálny systém $\tilde{S}$ v (16), t.j., v súlade s (11) a (22) pre každé $x \in [-L, L]$ máme

$$T_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi x}{L}} \, \mathrm{d}t. \tag{103}$$

Postupnosť $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ nemusí vo všeobecnosti bodovo konvergovať na intervale $[-L, L]$. Ak však $f \in \mathcal{L}^2[-L, L]$, potom exponenciálne polynómy T_N sú najlepšou aproximáciou funkcie f spomedzi všetkých konečných lineárnych kombinácií funkcií systému $\tilde{S}$ a postupnosť $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ konverguje k f v norme priestoru $\mathcal{L}^2[-L, L]$ (Poznámka 16 a Veta 6). V nasledujúcom výklade tieto výsledky zlepšíme. Presnejšie, ukážeme, že pre funkcie f spojité na intervale $[-L, L]$ je možné zostrojiť inú postupnosť trigonometrických/exponenciálnych polynómov, ktorá bude na $[-L, L]$ konvergovať rovnomerne k funkcii f.

Inšpirovaní výsledkom o Cesàrových priemeroch číselných postupností v Leme 7 uvažujme na intervale $[-L, L]$ postupnosť funkcií $\{\sigma_N\}_{N=0}^{\infty}$ definovaných

$$\sigma_N(x) := \frac{T_0(x) + T_1(x) + \cdots + T_N(x)}{N+1}, \quad N \in \mathbb{N}_0, \quad x \in [-L, L]. \tag{104}$$

V súlade s Definíciou 14 sa jedná o postupnosť Cesàrových priemerov funkcionálnej postupnosti $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ v (103).

Propozícia 2

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $[-L, L]$ a nech c_n, $n \in \mathbb{Z}$, sú jej komplexné Fourierove koeficienty v (103)*. Potom pre funkcie σ_N definované v* (104) *platí pre každé $x \in [-L, L]$ formula*

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N+1-|n|}{N+1} \right) c_n \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i} n \pi x}{L}}, \quad N \in \mathbb{N}_0. \tag{105}$$

Dôkaz Propozície 2.

Identita (105) sa overí priamym výpočtom využitím rovností (103) a (104). ■

Poznámka 24

Rovnosť (105) ukazuje, že funkcie σ_N sú skutočne exponenciálne polynómy analogické komplexným Fourierovým polynómom v (103). Podstatný rozdiel je však v tom, že koeficienty v σ_N sa menia v závislosti na stupni N.

Veta 11 (Fejérova)

Nech f je funkcia spojitá na intervale $[-L, L]$ a platí $f(-L) = f(L)$. Potom postupnosť funkcií $\{\sigma_N\}_{N=0}^{\infty}$ v (104) *konverguje rovnomerne na $[-L, L]$ k f.*

Poznámka 25

Poznamenajme, že tvrdenie Fejérovej vety 11 možno ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$\sup_{x\in[-L,L]} |\sigma_N(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{pre } N \to \infty. \tag{106}$$

Jedná sa vlastne o konvergenciu v norme priestoru $\mathcal{B}[-L, L]$ všetkých funkcií f, ktoré sú definované a ohraničené na intervale $[-L, L]$, t.j., v norme

$$\|f\|_B := \sup_{x\in[-L,L]} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{B}[-L, L]. \tag{107}$$

Fejérovo jadro

Skôr ako pristúpime k dôkazu Fejérovej vety 11, odvodíme niekoľko výsledkov.

Lema 8

Pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ má Dirichletovo jadro D_N v (30) reprezentáciu

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \quad \textit{pre každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{108}$$

Dôkaz Lemy 8.

Formula (108) vyplýva z identity (31) a z Eulerovho vzorca

$$2\cos t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{109}$$

Postupne potom pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dostávame

$$D_N(x) \overset{(31)}{=} 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx \overset{(109)}{=} \underbrace{1}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x}} + \sum_{n=1}^{N} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

čo dokazuje rovnosť (108) a dôkaz je hotový. ∎

Pre $N \in \mathbb{N}_0$ budeme uvažovať funkciu

$$K_N(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \tag{110}$$

ktorá sa v literatúre štandardne označuje ako tzv. Fejérovo jadro. Jedná sa o aritmetický priemer Dirichletových jadier D_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, definovaných v (30). Odvodíme teraz niekoľko vlastností funkcie K_N.

Lema 9

Pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí identita

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{111}$$

Dôkaz Lemy 9.

Zvoľme nejaké N a x v súlade s predpokladmi lemy. Využitím Eulerovho vzorca

$$2\mathrm{i} \sin t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{112}$$

a definícií Fejérovho a Dirichletovho jadra v (110) a (30) postupne máme

Dôkaz Lemy 9 (pokračovanie).

$$K_N(x) \overset{(110),(30)}{=} \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{(N+1)\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{N}\operatorname{Im}\left[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right],$$

kde $\operatorname{Im}[\cdot]$ označuje imaginárnu časť komplexného čísla. Posledná suma vedie na konečný geometrický súčet s prvým členom $e^{i\frac{x}{2}}$ a kvocientom e^{ix}, t.j.,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\operatorname{Im}\left[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right] &= \operatorname{Im}\left[\sum_{n=0}^{N} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i(N+1)x}-1}{e^{ix}-1}\, e^{i\frac{x}{2}}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i(N+1)x}-1}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}\right] \overset{(112)}{=} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i(N+1)x}-1}{2i\sin\frac{x}{2}}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{\cos(N+1)x - 1 + i\sin(N+1)x}{2i\sin\frac{x}{2}}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{\sin(N+1)x + i\left[1-\cos(N+1)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\right] = \frac{1-\cos(N+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Pomocou tejto identity pre Fejérovo jadro $K_N(x)$ následne platí

Dôkaz Lemy 9 (pokračovanie).

$$K_N(x) = \frac{1}{(N+1)\sin\frac{x}{2}} \frac{1-\cos(N+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

čo bolo treba ukázať. Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 26

Priamo z definície Fejérovho jadra v (110) a z Poznámky 9 vyplýva, že funkcia K_N je 2π-periodická s odstrániteľnými bodmi nespojitosti v $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pričom $\lim_{x\to 2k\pi} K_N(x) = N+1$. Z tohto dôvodu sa preto K_N zvykne definovať i v týchto bodoch s hodnotou $K_N(2k\pi) := N+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Na druhej strane, podľa formuly (111) funkcia K_N je nezáporná. Naviac pre každé $\delta \in (0,\pi)$ platí

$$|K_N(x)| = \frac{1}{N+1}\left|\left(\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right| \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \longrightarrow 0 \qquad \text{pre } N\to\infty$$

nezávisle na $x \in [-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi]$. To ukazuje, že postupnosť $\{K_N\}_{N=0}^{\infty}$ rovnomerne konverguje do 0 na $[-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi]$ pre každé dané $\delta \in (0,\pi)$. Napokon pomocou identít (110) a (32) sa ľahko overí platnosť rovnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}_0. \tag{113}$$

Lema 10

Pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ *platí formula*

$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N+1-|n|}{N+1} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{114}$$

Dôkaz Lemy 10.

Dôkaz je založený na efektívnom sčítaní členov sumy v (110). Konkrétne, využitím reprezentácie Dirichletovho jadra $D_N(x)$ v (108) v Leme 8 platí

$$\begin{array}{rccccccccc}
D_0: & & & & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x} & & & & \\
D_1: & & & & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
D_{N-1}: & & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)x} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\cdot x} & \\
D_N: & \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nx}}_{1} & \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)x}}_{2} & \cdots & \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}_{N} & \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot x}}_{N+1} & \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}_{N} & \cdots & \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\cdot x}}_{2} & \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}_{1}
\end{array}$$

Z tejto schémy už ihneď vyplýva formula (114). ■

Lema 11

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $[-L, L]$ a nech σ_N a K_N sú funkcie definované v (104) a (110). Potom pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí formula

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t, \quad x \in [-L, L]. \tag{115}$$

Dôkaz Lemy 11.

Rovnosť (115) získame kombináciou identít (103), (105) a (114), konkrétne

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x) &\overset{(105)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N+1-|n|}{N+1}\right) c_n\, \mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{L}} \\
&\overset{(103)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N+1-|n|}{N+1}\right) \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{e}^{\frac{in\pi x}{L}} \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N+1-|n|}{N+1}\right) \mathrm{e}^{\frac{in\pi(x-t)}{L}}\right) \mathrm{d}t \\
&\overset{(114)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

Dôkaz Fejérovej vety

Nech f je funkcia spojitá na intervale $[-L, L]$. Podmienka $f(-L) = f(L)$ v predpokladoch vety zabezpečí, že odpovedajúce $2L$-periodické predĺženie funkcie f na celé $\mathbb{R}$ je tiež spojitou funkciou. Bez ujmy na všeobecnosti ho budeme označovať rovnako f. Nech $\{\sigma_N\}_{N=0}^{\infty}$ je funkcionálna postupnosť definovaná v (104). Našou úlohou je dokázať reláciu v (106), t.j., ukázať, že

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \text{ tak, že pre každé } N \geq N_\varepsilon \text{ platí}$$
$$|\sigma_N(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pre každé } x \in [-L, L].$$

Zvoľme $\varepsilon > 0$. Funkcia f je spojitá na $[-L, L]$, a preto je na tomto intervale

(i) ohraničená, t.j., existuje $M > 0$ také, že $|f(x)| \leq M$ na $[-L, L]$;

(ii) rovnomerne spojitá, t.j., pre dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in (0, L)$ také, že

$$\text{ak body } u, v \in [-L, L] \text{ spĺňajú } |u - v| < \delta, \text{ potom } |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podľa Poznámky 26 sú Fejérove jadrá $K_N(\frac{\pi s}{L})$, $N \in \mathbb{N}_0$, $2L$-periodicé funkcie, ktoré rovnomerne konvergujú do 0 na $\mathcal{J} := [-L, -\delta) \cup (\delta, L]$. Existuje preto index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ taký, že pre každé $N \geq N_\varepsilon$ platí $|K_N(\frac{\pi s}{L})| < \frac{\varepsilon}{4M}$ pre každé $s \in \mathcal{J}$. Napokon formula (113) má v tomto prípade tvar

$$\int_{-L}^{L} K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s = 2L \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}_0. \tag{116}$$

Na základe týchto skutočností potom pre každé $N \geq N_\varepsilon$ a $x \in [-L, L]$ máme

$$|\sigma_N(x) - f(x)| \overset{(115)}{=} \left| \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t - f(x) \right|$$

$$\overset{(116)}{=} \left| \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \right|.$$

Pomocou substitúcie $s = x - t$ má prvý integrál v poslednom výraze tvar

$$\int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t = \int_{x-L}^{x+L} f(x-s)\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s.$$

A keďže integrand je $2L$-periodická funkcia, v súlade s Lemou 2 platí

$$\int_{-L}^{L} f(t)\, K_N\left(\frac{\pi(x-t)}{L}\right) \mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} f(x-s)\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s.$$

Následne pre výraz $|\sigma_N(x) - f(x)|$ dostávame

$$|\sigma_N(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x-s)\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s - \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \right|$$

$$= \frac{1}{2L} \left| \int_{-L}^{L} [f(x-s) - f(x)]\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \right|, \quad x \in [-L, L].$$

Na poslednú rovnosť aplikujeme trojuholníkovú nerovnosť, pričom využijeme nezápornosť funkcií K_N, $N \in \mathbb{N}_0$, podľa Poznámky 26, t.j.,

$$|\sigma_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} |f(x-s) - f(x)|\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s, \quad x \in [-L, L]. \tag{117}$$

Posledný integrál rozdelíme vzhľadom na jeho integračný obor $[-L, L]$ takto

$$\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-s) - f(x)|\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{J}} |f(x-s) - f(x)|\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s}_{I_2},$$

kde $\mathcal{J} = [-L, -\delta) \cup (\delta, L]$. Integrál I_1 odhadneme zhora pomocou poznatku rovnomernej spojitosti f na $[-L, L]$. Konkrétne, pre každé $x \in [-L, L]$ je

$$I_1 = \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x-s) - f(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s < \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-L}^{L} K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \overset{(116)}{=} \varepsilon L. \tag{118}$$

Podobne integrál I_2 upravíme využitím trojuholníkovej nerovnosti a relácie

$$K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) = \left|K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{pre každé } N \geq N_\varepsilon \text{ a každé } s \in \mathcal{J}.$$

Postupne dostávame

$$I_2 = \int_{\mathcal{J}} |f(x-s) - f(x)|\, K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s \leq \int_{\mathcal{J}} \left[\underbrace{|f(x-s)|}_{\leq M} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \right] K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right) \mathrm{d}s$$

$$\leq \int_{\mathcal{J}} 2M\, \underbrace{K_N\left(\frac{\pi s}{L}\right)}_{<\frac{\varepsilon}{4M}} \mathrm{d}s < \int_{\mathcal{J}} 2M\, \frac{\varepsilon}{4M}\, \mathrm{d}s = \frac{\varepsilon}{2}\, 2(L-\delta) = \varepsilon(L-\delta) < \varepsilon L. \quad (119)$$

Dosadením výsledkov v (118) a (119) do nerovnosti (117) napokon dostaneme

$$|\sigma_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2L}\,(I_1 + I_2) < \frac{1}{2L} \cdot 2\varepsilon L = \varepsilon$$

pre každé $N \geq N_\varepsilon$ a každé $x \in [-L, L]$. Dôkaz Fejérovej vety je teda kompletný.

Dôsledky Fejérovej vety

Bezprostredným dôsledkom Fejérovej Vety 11 je ľubovoľne presná globálna aproximácia spojitých funkcií trigonometrickými polynómami.

Veta 12

Nech f je funkcia spojitá na intervale $[-L, L]$ s $f(-L) = f(L)$ a nech $\varepsilon > 0$ je dané. Potom existuje trigonometrický/exponenciálny polynóm P taký, že

$$\|f - P\|_B = \sup_{x\in[-L,L]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{120}$$

Dôkaz Vety 12.

Tvrdenie vyplýva priamo z Fejérovej vety 11 a jej dôkazu, resp. z relácie (106) v Poznámke 25, ak za trigonometrický/exponenciálny polynóm P zoberieme funkciu σ_N definovanú v (104) s dostatočne veľkým indexom N. ■

Poznámka 27 (Úplnosť trigonometrického/exponenciálneho systému)

Výsledok Vety 12 je ekvivalentný s faktom, že trigonometrický/exponenciálny systém v (60) je uzavretý/úplný v priestore $\mathcal{C}[-L, L]$ vzhľadom na suprémovú normu v (107). Tento výsledok možno rozšíriť dokonca i na priestor $\mathcal{L}^2[-L, L]$.

Weierstrassova veta o aproximácii

Jedným z najvýznamnejších dôsledkov Fejérovej Vety 11 s aplikáciami v numerickej analýze je Weierstrassova veta o aproximácii spojitých funkcií.

Veta 13 (Weierstrassova)

Nech reálna (komplexná) funkcia f je spojitá na intervale $[a, b]$ a nech $\varepsilon > 0$ je dané. Potom existuje polynóm P taký, že

$$\|f - P\|_B = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{121}$$

Poznámka 28

Z matematickej analýzy poznáme aproximáciu funkcie f pomocou jej Taylorovho polynómu so stredom v bode x_0. Musíme však predpokladať dostatočnú hladkosť funkcie f v bode x_0. Naviac, jedná sa iba o lokálnu aproximáciu na vhodnom okolí x_0. Weierstrassova Veta 13 ukazuje, že spojité funkcie je možné pomocou polynómov aproximovať i globálne, a to dokonca s vopred zvolenou presnosťou. Takýmito polynómami sú napríklad tzv. Bernsteinove polynómy. V našom výklade budeme – so zreteľom na aplikáciu Fejérovej Vety 11 – vhodných kandidátov hľadať medzi lineárnymi kombináciami tzv. Čebyševových polynómov.

Dôkaz Weierstrassovej vety

Uvedieme najprv dve pomocné tvrdenia.

Lema 12

Nech f je párna funkcia spojitá na intervale $[-L, L]$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $M \in \mathbb{N}_0$ a komplexné čísla $d_0, \ldots, d_M$ s vlastnosťou

$$\sup_{x\in[-L,L]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{M} d_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| < \varepsilon. \tag{122}$$

Dôkaz Lemy 12.

Vďaka párnosti funkcie f platí podmienka $f(-L) = f(L)$. Obzvlášť, v súlade s Poznámkou 8 odpovedajúce Fourierove trigonometrické polynómy T_N v (9) obsahujú v tomto prípade pre každé $N \in \mathbb{N}_0$ iba členy s kosínusmi, t.j., jej Fourierove koeficienty $b_n = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že i príslušné funkcie σ_N v (104) pozostávajú z výrazov obsahujúcich iba funkcie $\cos \frac{n\pi x}{L}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in [-L, L]$. Tvrdenie lemy potom vyplýva z Vety 12 a jej dôkazu. ■

Definícia 15 (Čebyševove polynómy)

Reálne polynómy T_n, $n \in \mathbb{N}_0$, dané na $\mathbb{R}$ rekurentným predpisom

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{123}$$

sa nazývajú Čebyševove polynómy prvého druhu.

Lema 13

Čebyševove polynómy T_n z Definície 15 sú jediné polynómy spĺňajúce

$$\cos nt = T_n(\cos t) \quad \textit{pre každé } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ a každé } t \in \mathbb{R}. \tag{124}$$

Dôkaz Lemy 13.

Využijeme metódu úplnej matematickej indukcie. Platí $\cos(0t) \equiv 1 \equiv T_0(\cos t)$ a $\cos t = T_1(\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Predpokladajme, že formula (124) platí pre všetky indexy $n = 0, \dots, k$, kde $k \geq 1$ je dané. Pre index $k+1$ potom máme

$$\cos(k+1)t = [\cos(k+1)t + \cos(k-1)t] - \cos(k-1)t = 2\cos t \cos kt - \cos(k-1)t$$

$$= 2\cos t\, T_k(\cos t) - T_{k-1}(\cos t) \overset{(123)}{=} T_{k+1}(\cos t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Jedinečnosť polynómov T_n vyplýva z jednoznačnosti rekurencie v (123). ∎

Sme pripravení pristúpiť k dôkazu Weierstrassovej Vety 13. Nech f je funkcia spojitá na intervale $[a,b]$ a nech $\varepsilon > 0$ je dané. Interval $[a,b]$ bijektívne transformujeme na interval $[0,1]$ pomocou lineárneho zobrazenia

$$s = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a,b] \quad \iff \quad x = a + (b-a)s, \quad s \in [0,1]. \tag{125}$$

Analogicky sa transformuje i funkcia f, t.j., budeme pracovať s funkciou

$$\tilde{f}(s) := f(a + (b-a)s), \quad s \in [0,1]. \tag{126}$$

Vďaka spojitosti f na $[a,b]$ a linearite transformácie v (125) je funkcia $\tilde{f}$ v (126) spojitá na intervale $[0,1]$. Definujme ďalej pomocnú funkciu g s predpisom

$$g(t) := \tilde{f}(|\cos t|), \quad t \in [-\pi,\pi]. \tag{127}$$

Funkia g je spojitá a párna na intervale $[-\pi,\pi]$. Podľa Lemy 12 s $L := \pi$ preto existuje index $M \in \mathbb{N}_0$ a (komplexné) koeficienty $d_0, \ldots, d_M$ také, že pre funkciu g platí na intervale $[-\pi,\pi]$ odhad v (122), t.j.,

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]} \left| g(t) - \sum_{n=0}^{M} d_n \cos nt \right| < \varepsilon. \tag{128}$$

Uvažujme polynóm

$$\tilde{P}(s) := \sum_{n=0}^{M} d_n T_n(s), \tag{129}$$

kde T_n, $n \in \{0, \ldots, M\}$, sú Čebyševove polynómy zavedené v Definícii 15. Pomocou relácií v (124) a (127)–(129) postupne dostávame

$$\sup_{s\in[0,1]} \left|\tilde{f}(s) - \tilde{P}(s)\right| = \left|\text{substitúcia } s = \cos t\right| = \sup_{t\in[0,\pi/2]} \left|\tilde{f}(\cos t) - \tilde{P}(\cos t)\right|$$

$$\overset{(129)}{=} \sup_{t\in[0,\pi/2]} \left|\tilde{f}(|\cos t|) - \sum_{n=0}^{M} d_n T_n(\cos t)\right|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,\pi]} \left|\tilde{f}(|\cos t|) - \sum_{n=0}^{M} d_n T_n(\cos t)\right|$$

$$\overset{(124),(127)}{=} \sup_{t\in[0,\pi]} \underbrace{\left|g(t) - \sum_{n=0}^{M} d_n \cos nt\right|}_{\text{párna funkcia}}$$

$$= \sup_{t\in[-\pi,\pi]} \left| g(t) - \sum_{n=0}^{M} d_n \cos nt \right| \overset{(128)}{<} \varepsilon.$$

Polynóm $\tilde{P}$ teda aproximuje funkciu $\tilde{f}$ rovnomerne na intervale $[0,1]$ s chybou menšou než ε. V súlade s transformáciou v (125) a (126) potom polynóm

$$P(x) := \tilde{P}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

aproximuje funkciu f rovnomerne na intervale $[a,b]$ s chybou menšou než ε, t.j., platí nerovnosť (121). Dôkaz je kompletný.

Poznámka 29

Poznamenajme, že v reči funkcionálnej analýzy má Weierstrassova Veta 13 nasledujúcu ekvivalentnú interpretáciu (porovnaj i s Poznámkou 27).

Množina všetkých polynómov s komplexnými koeficientami je podpriestor hustý v priestore $\mathcal{C}[a,b]$ všetkých komplexných funkcií spojitých na intervale $[a,b]$.

Gibbsov jav – motivácia I

Nasledujúci výklad motivujeme jedným praktickým príkladom.

Príklad 20

Pre dané $L > 0$ nech f je funkcia definovaná na intervale $[-L, L]$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-L, L), \\ 0, & x = \pm L. \end{cases}$$

Uvažujme $2L$-periodické rozšírenie funkcie f na celé $\mathbb{R}$, t.j., funkciu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in \big((2k-1)L,\, (2k+1)L\big), \\ 0, & x = (2k+1)L, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcia f je po častiach hladká na intervale $[-L, L]$, a teda integrovateľná na $[-L, L]$. V súlade s Definíciou 4 preto vieme zostrojiť postupnosť jej Fourierových trigonometrických polynómov. Konkrétne, pre každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$T_N(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in [-L, L]. \tag{130}$$

Gibbsov jav – motivácia II

Príklad 20

Podľa Dirichletovej Vety 2 vieme, že postupnosť $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ bodovo konverguje na celom $\mathbb{R}$, pričom v tomto prípade

$$\lim_{N\to\infty} T_N(x) = \frac{\tilde{f}(x^-)+\tilde{f}(x^+)}{2} = \tilde{f}(x) \quad \text{pre každé dané } x \in \mathbb{R}. \tag{131}$$

Podrobnejšie teraz preskúmame správanie sa funkcionálnej postupnosti $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ na okolí bodov nespojitosti funkcie $\tilde{f}$, t.j., bodov $x_k = (2k+1)L$, $k \in \mathbb{Z}$. Bez ujmy na všeobecnosti sa budeme zaoberať bodom $x_0 = L$, pričom predpokladajme, že sa k nemu blížime prostredníctvom postupnosti bodov

$$x_0 - \frac{L}{N} = L - \frac{L}{N} = L\left(1-\frac{1}{N}\right) \longrightarrow L = x_0 \quad \text{pre } N \to \infty.$$

Zaujíma nás existencia a následná hodnota limity

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 - \frac{L}{N}\right) = ???$$

Nech $N \in \mathbb{N}$ je dané. Dosadením $x = x_0 - \frac{L}{N}$ do (130) dostaneme

Gibbsov jav – motivácia III

Príklad 20

$$T_N\left(x_0-\frac{L}{N}\right)=T_N\left(L\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)\overset{(130)}{=}\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi L\left(1-\frac{1}{N}\right)}{L}$$

$$=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(n\pi-\frac{n\pi}{N}\right)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{N}$$

$$=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{N}}{\frac{n\pi}{N}}\right)\frac{\pi}{N}.$$

Posledná suma však predstavuje Riemannov integrálny súčet funkcie $\frac{\sin t}{t}$ na intervale $[0,\pi]$ pre ekvidištantné delenie s krokom $\frac{\pi}{N}$. A keďže funkcia $\frac{\sin t}{t}$ je integrovateľná na $[0,\pi]$, platí

$$\lim_{N\to\infty}T_N\left(x_0-\frac{L}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{N}}{\frac{n\pi}{N}}\right)\frac{\pi}{N}=\frac{2L}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{132}$$

Gibbsov jav – motivácia IV

Príklad 20

Zaveďme označenie

$$G := \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \tilde{G} := \frac{G}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}. \tag{133}$$

Rovnosť v (132) potom nadobudne tvar

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 - \frac{L}{N}\right) = \frac{2L}{\pi} G = L + 2L\tilde{G}.$$

A nakoľko $\tilde{f}(x_0^-) = L$ a $\tilde{f}(x_0^-) - \tilde{f}(x_0^+) = 2L$, získame napokon formulu

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 - \frac{L}{N}\right) = \tilde{f}(x_0^-) + \left[\tilde{f}(x_0^-) - \tilde{f}(x_0^+)\right]\tilde{G}. \tag{134}$$

Analogická identita platí i na pravom okolí bodu x_0, konkrétne

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 + \frac{L}{N}\right) = \tilde{f}(x_0^+) - \left[\tilde{f}(x_0^-) - \tilde{f}(x_0^+)\right]\tilde{G}. \tag{135}$$

Vidíme teda, že Fourierove polynómy T_N Fourierovho radu funkcie $\tilde{f}$ sa na okolí bodu x_0 s rastúcim N globálne neprimkýnajú k hodnotám $\tilde{f}(x_0^-)$, resp. $\tilde{f}(x_0^+)$, ako by sme podľa rovnosti (131) očakávali.

Situácii, opísanej v Príklade 20, sa štandardne hovorí Gibbsov jav. Dochádza k nemu v bodoch nespojitosti v prípade ľubovoľnej po častiach hladkej funkcie f. Príslušný Fourierov polynóm T_N na malých okoliach takýchto bodov vykazuje veľké oscilácie, ktoré s rastúcim N nevymiznú. Naopak, funkcie T_N prekmitávajú/podkmitávajú f o hodnoty, ktoré majú pre $N \to \infty$ konečnú nenulovú limitu. Príčinou toho je skutočnosť, že na okoliach bodov nespojitosti funkcie f postupnosť $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ nekonverguje rovnomerne. Gibbsov jav objavil anglický matematik Henry Wilbraham (1825 – 1883), neskôr bol nezávisle od neho pozorovaný americkým matematikom Josiahom Willardom Gibbsom (1839 – 1903). Konštanta G v (133) sa nazýva Wilbrahamova–Gibbsova konštanta a platí

$$G = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \approx 1.852, \qquad \tilde{G} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \approx 0.089. \tag{136}$$

Veta 14 (Gibbsov jav)

Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálna (komplexná) $2L$-periodická a po častiach hladká funkcia a nech $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$ je jej odpovedajúca postupnosť Fourierových polynómov vzhľadom na intervale $[-L, L]$ v (9) a Definícii 4. Ak x_0 je bod nespojitosti funkcie f so skokom $\delta := f(x_0^-) - f(x_0^+)$, potom platí

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 + \frac{L}{N}\right) = f(x_0^+) - \delta\tilde{G}, \qquad \lim_{N\to\infty} T_N\left(x_0 - \frac{L}{N}\right) = f(x_0^-) + \delta\tilde{G}.$$

Príklad 21

Uvažujme 2-periodické predĺženie f funkcie g s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0), \\ 1, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

na celú reálnu os. Podľa Príkladu 5 s $L := 1$ pre príslušný Fourierov trigonometrický polynóm T_N, $N \in \mathbb{N}$, funkcie f vzhľadom na $[-1, 1]$ platí

$$T_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nepárne}}}^{N} \frac{\sin n\pi x}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor} \frac{\sin(2m-1)\pi x}{2m-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

V $x_0 = 0$ má f bod nespojitosti so skokom $\delta = f(x_0^-) - f(x_0^+) = -1$. Obzvlášť, na vhodných okoliach tohto bodu postupnosť $\{T_N\}_{N=0}^{\infty}$ spĺňa

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{N}}{2m-1}$$

Príklad 21

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{N}}{\frac{(2m-1)\pi}{N}} \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Pomocou identít v (136) napokon dostávame

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(\frac{1}{N}\right) = 1 + \tilde{G},$$

v súlade s prvou formulou vo Vete 14. Analogicky máme

$$\lim_{N\to\infty} T_N\left(-\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{N}}{2m-1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \overset{(136)}{=} -\tilde{G},$$

v zhode s druhou rovnosťou vo Vete 14.