M7120 Spektrálna analýza I

Fourierova transformácia

Peter Šepitka

zima 2022

Obsah

Obsah

V prechádzajúcich prednáškach sme analyzovali vyjadrenie periodických funkcií pomocou trigonometrických/exponenciálnych radov. Konkrétne, ak f je hladká periodická (komplexná) funkcia s periódou $2L \in \mathbb{R}^+$, potom je možné ju pre každé $x \in \mathbb{R}$ vyjadriť ako súčet Fourierovho exponenciálneho radu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}, \quad \text{kde čísla} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi t}{L}} \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

sa nazývajú Fourierove koeficienty funkcie f. Formulu (1) možno interpretovať ako reprezentáciu signálu f v tvare superpozície harmonických funkcií $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}$ s periódami $\frac{2L}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Fourierov koeficient c_n pritom vyjadruje mieru podielu harmonickej zložky $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{L}}$ v celkovej funkcii f. Obzvlášť platí, že

$$\text{miera podielu zložky s frekvenciou} \quad \xi_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{je} \quad \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi}{L} \times \int_{-L}^{L} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_n t} \, \mathrm{d}t.$$

Množina frekvencií ξ_n, ktoré môžeme v tomto prípade použiť na výstavbu celkového signálu f, je teda diskrétna, pričom $\Delta\xi_n := \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{L}$. Takže

$$\text{miera podielu zložiek s frekvenciami z diskrétneho intervalu} \quad [\xi_n, \xi_{n+1}) \quad \text{je}$$

$$\frac{1}{2\pi} \times \left(\int_{-L}^{L} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_n t} \, \mathrm{d}t \right) \times \Delta\xi_n.$$

Naviac, so zväčšujúcou sa periódou $2L$ bude zrejme ekvidištantná sieť frekvencií ξ_n čoraz hustejšia, pričom pre $L \to \infty$ platí $\Delta\xi_n \to 0$.

Je prirodzené sa pýtať, ako bude uvedená analýza fungovať v prípade neperiodického signálu f. Funkciu f možno teraz intuitívne chápať ako periodickú s "nekonečnou" periódou, t.j., uvažovať $L \to \infty$. V súlade s výsledkami pre konečné periódy potom očakávame, že na výstavbe signálu f sa budú podieľať harmonické zložky $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$ s ľubovoľnou reálnou frekvenciou, pričom

miera podielu zložiek s frekvenciami z malého spojitého intervalu $[\xi, \xi + \Delta\xi)$ je

pre dostatočne veľké L približne $\dfrac{1}{2\pi} \times \left(\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t \right) \times \Delta\xi.$

Obvzlášť, podľa formuly (1) potom pre $L \to \infty$ a $\Delta\xi \to 0$ formálne platí

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$. Neperiodickú funkciu f sme teda formálne vyjadrili ako spojitú superpozíciu harmonických funkcií $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$ s frekvenciami $\xi \in \mathbb{R}$. Funkcia

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

sa označuje ako Fourierov obraz funkcie f. Až na konštantný násobok reprezentuje mieru podielu zložky s danou frekvenciou ξ v celkovom signále f. Nasledujúci výklad bude preto venovaný podrobnej analýze integrálu (2).

Obsah

Fourierova transformácia

Budeme uvažovať triedu funkcií f absolútne integrovateľných na $\mathbb{R}$, t.j.,

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \{|f| \text{ lebesgueovsky integrovateľná na } \mathbb{R}\}\,. \tag{3}$$

Definícia 1 (Fourierova transformácia)

Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je daná funkcia. Funkcia $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná predpisom

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

sa nazýva Fourierov obraz funkcie f. Priradenie $f \mapsto \widehat{f}$ sa označuje ako Fourierova transformácia, pričom píšeme $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Poznámka 1

Funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pre každé $x, \xi \in \mathbb{R}$ spĺňa $|f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}| = |f(x)|$, a tak

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

t.j., integrál v (4) konverguje pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Príslušná funkcia $\widehat{f}$ predstavená v Definícii 1 je preto korektne definovaná na celom $\mathbb{R}$ pre každé $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Poznamenajme, že Fourierov obraz $\widehat{f}$ funkcie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nemusí byť vždy funkcia absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, t.j., $\widehat{f}$ v (4) vo všeobecnosti nepatrí do priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Túto skutočnosť ilustrujeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 1

Uvažujme funkciu f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Jedná sa zrejme o funkciu absolútne integrovateľnú na celej reálnej osi. Pre jej Fourierov obraz $\widehat{f}$ potom podľa (4) pre každé $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{-2\mathrm{i}\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{2\mathrm{i}\xi} = \frac{\sin\xi}{\xi},$$

kým $\widehat{f}(0) = 1$. A keďže $\lim_{\xi\to 0} \frac{\sin\xi}{\xi} = 1$, funkcia $\widehat{f}$ je spojitá na celom $\mathbb{R}$. Napriek tomu nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin\xi}{\xi}\right| \mathrm{d}\xi = 2\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin\xi|}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

diverguje, ako sa možno presvedčiť využitím Dirichletovho kritéria. Preto v súlade s (3) funkcia $\widehat{f}$ nie je prvkom priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Základné vlastnosti Fourierovej transformácie

Uvedieme teraz niekoľko základných vlastností Fourierovej transformácie.

Veta 1 (Linearita Fourierovej transformácie)

Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je lineárne zobrazenie, t.j., pre každé dve funkcie $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathcal{F}(f) + \beta\,\mathcal{F}(g). \tag{5}$$

Dôkaz Vety 1.

Platnosť formuly (5) ihneď vyplýva z linearity integrálu (4) v Definícii 1. ■

Veta 2 (Fourierova transformácia zmeny mierky)

Pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $R \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uvažujme funkciu $f^R(x) := f(Rx)$, $x \in \mathbb{R}$, t.j., zmenu mierky na funkcii f. Potom funkcia $f^R \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a platí

$$\widehat{f^R}(\xi) = \frac{1}{|R|}\,\widehat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right) = \frac{1}{|R|}\,\left(\widehat{f}\right)^{\frac{1}{R}}(\xi) \quad \textit{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Dôkaz Vety 2.

Nech f a f^R spĺňajú predpoklady vety. Potom zrejme $f^R \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a teda v súlade s Definíciou 1 pre funkciu f^R existuje jej Fourierov obraz $\widehat{f^R}$. Podľa rovnosti (4) pre každé $\xi \in \mathbb{R}$ máme

$$\widehat{f^R}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f^R(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(Rx)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Pomocou substitúcie $y = Rx$ prevedieme posledný integrál na tvar

$$\widehat{f^R}(\xi) = \operatorname{sgn} R \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\,\frac{y}{R}}\,\frac{1}{R}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|R|}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi}{R}\,y}\,\mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \frac{1}{|R|}\,\widehat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right),$$

čo dokazuje platnosť identity (6). Dôkaz je hotový. ■

Veta 3 (Zmena mierky na Fourierovom obraze)

Pre každé $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *a každé* $R \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *platí* $\frac{1}{|R|}\,f^{\frac{1}{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *a*

$$\left(\widehat{f}\right)^R(\xi) = \widehat{f}\,(R\xi) = \frac{1}{|R|}\,\widehat{f^{\frac{1}{R}}}(\xi) \quad \textit{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Dôkaz Vety 3.

Tvrdenie vyplýva z Vety 2 zámenou $R \to \frac{1}{R}$. Skutočne, voľbou $R := \frac{1}{R}$ dostávame, že funkcia $f^{\frac{1}{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a následne podľa Vety 1 s $\alpha := \frac{1}{|R|}$ a $\beta := 0$ i funkcia $\frac{1}{|R|} f^{\frac{1}{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Naviac, identita (6) nadobudne pre $\xi \in \mathbb{R}$ tvar

$$\widehat{f^{\frac{1}{R}}}(\xi) = |R|\, \widehat{f}\,(R\xi) \quad \iff \quad \left(\widehat{f}\right)^R(\xi) = \widehat{f}\,(R\xi) = \frac{1}{|R|}\, \widehat{f^{\frac{1}{R}}}(\xi).$$

Platí teda formula (7) a dôkaz je kompletný. ■

Veta 4 (Fourierova transformácia posunutia)

Pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $R \in \mathbb{R}$ uvažujme funkciu $f_R(x) := f(x - R)$, $x \in \mathbb{R}$, t.j., posunutie na funkcii f. Potom funkcia $f_R \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a platí

$$\widehat{f_R}(\xi) = \widehat{f}\,(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\xi} \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Dôkaz Vety 4.

Postupujeme analogicky ako v dôkaze Vety 2. Iste $f_R \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pričom následne podľa (4) postupne máme (využijeme substitúciu $y = x - R$)

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$\widehat{f_R}(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-R)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(y+R)}\,\mathrm{d}y$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\,\mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \widehat{f}\,(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\xi}$$

pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Dôkaz je teda kompletný. ■

Veta 5 (Posunutie na Fourierovom obraze)

Nech pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $R \in \mathbb{R}$ je $g(x) := f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Rx}$, $x \in \mathbb{R}$. Potom $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a

$$\left(\widehat{f}\,\right)_R(\xi) = \widehat{f}\,(\xi - R) = \widehat{g}\,(\xi) \quad \textit{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Dôkaz Vety 5.

Formula (9) vyplýva priamo z definície Fourierovej transformácie v (4). ■

Dôsledok 1 (Modulačné identity)

Pre každé $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *a každé* $\omega \in \mathbb{R}$ *sú funkcie*

$$g(x) := f(x)\cos\omega x, \qquad h(x) := f(x)\sin\omega x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$ *a ich Fourierove obrazy* $\widehat{g}$ *a* $\widehat{h}$ *spĺňajú pre každé* $\xi \in \mathbb{R}$ *tzv. modulačné identity*

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\widehat{f}(\xi-\omega) + \widehat{f}(\xi+\omega)\right], \tag{11}$$

$$\widehat{h}(\xi) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\widehat{f}(\xi-\omega) - \widehat{f}(\xi+\omega)\right]. \tag{12}$$

Dôkaz Dôsledku 1.

Využijeme výsledky Viet 1 a 5. Zaveďme funkcie $F_+(x)$ a $F_-(x)$ s predpismi

$$F_+(x) := f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}, \qquad F_-(x) := f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \quad \text{pre dané } \omega \in \mathbb{R}.$$

Pomocou nich a Eulerovej identity $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, potom možno funkcie g a h v (10) vyjadriť v tvare

$$g(x) = \frac{1}{2}F_+(x) + \frac{1}{2}F_-(x), \qquad h(x) = -\frac{\mathrm{i}}{2}F_+(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}F_-(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Dôkaz Dôsledku 1 (pokračovanie).

Podľa Vety 5 sú funkcie F_+ a F_- absolútne integrovateľné na celej reálnej osi s Fourierovými obrazmi

$$\widehat{F_+}(\xi) = \widehat{f}\,(\xi - \omega), \qquad \widehat{F_-}(\xi) = \widehat{f}\,(\xi + \omega) \qquad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Následne v súlade s (13) a (5) vo Vete 1 sú absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$ i funkcie g a h, pričom pre ich Fourierove obrazy postupne platí

$$\begin{aligned}\widehat{g}\,(\xi) &\overset{(13)}{=} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\,F_+ + \frac{1}{2}\,F_-\right)(\xi) \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}\,\widehat{F_+}(\xi) + \frac{1}{2}\,\widehat{F_-}(\xi) \\ &\overset{(14)}{=} \frac{1}{2}\left[\widehat{f}\,(\xi - \omega) + \widehat{f}\,(\xi + \omega)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\xi) &\overset{(13)}{=} \mathcal{F}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,F_+ + \frac{\mathrm{i}}{2}\,F_-\right)(\xi) \overset{(5)}{=} -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\widehat{F_+}(\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\widehat{F_-}(\xi) \\ &\overset{(14)}{=} -\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\widehat{f}\,(\xi - \omega) - \widehat{f}\,(\xi + \omega)\right] \qquad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ukázali sme teda platnosť modulačných identít (11) a (12) a dôkaz je hotový. ■

Veta 6 (Fourierova transformácia derivácie)

Nech funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ splĺňa podmienky

$$f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \textit{a} \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0. \tag{15}$$

Potom pre Fourierov obraz $\widehat{f'}$ derivácie f' platí formula

$$\widehat{f'}\,(\xi) = \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}\,(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Dôkaz Vety 6.

Prvá podmienka v (15) v súlade s Poznámkou 1 zaručuje existenciu Fourierovho obrazu $\widehat{f'}$. Pomocou integrácie per-partes potom postupne dostávame

$$\widehat{f'}\,(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = f'(x), & v(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}, \\ u(x) = f(x), & v'(x) = -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \end{array} \right|$$

$$= \Big[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \Big[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}\,(\xi)$$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \lim_{x\to-\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} + \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}\,(\xi) \overset{(15)}{=} \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}\,(\xi)$$

pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. To dokazuje platnosť formuly (16) a kompletizuje dôkaz. ∎

Dôsledok 2 (Fourierova transformácia derivácie)

Nech funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ spĺňa pre dané $n \in \mathbb{N}$ podmienky

$$f^{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ pre } k = 1, \dots, n \quad \text{a} \quad \lim_{|x| \to \infty} f^{(k)}(x) = 0 \text{ pre } k = 0, \dots, n-1. \tag{17}$$

Potom pre Fourierov obraz $\widehat{f^{(n)}}$ n-tej derivácie $f^{(n)}$ platí formula

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^n \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Dôkaz Dôsledku 2.

Identita (18) sa dokáže matematickou indukciou využitím výsledku Vety 6. ∎

Veta 7 (Derivácia Fourierovho obrazu)

Pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ predpokladajme, že pre funkciu $g(x) := xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, platí $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Potom Fourierov obraz $\widehat{f}$ má deriváciu na celom $\mathbb{R}$ a platí identita

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \widehat{f}(\xi) = -\mathrm{i}\, \widehat{g}(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Dôkaz Vety 7.

Dôkaz je založený na výsledku z teórie parametrických integrálov o zámene znaku derivovania podľa parametra a integrovania. Konkrétne, pri splnení istých predpokladov platí pre každé $\xi \in \mathbb{R}$ tzv. Leibnizov vzorec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right]\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Korektnosť formuly (20) je zaručená skutočnosťami, že funkcie

$$f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right] = -\mathrm{i}x\,f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} = -\mathrm{i}g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \tag{21}$$

sú podľa predpokladov vety a Poznámky 1 pre každé $\xi \in \mathbb{R}$ absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$. Preto v súlade s (4), (20) a (21) má Fourierov obraz $\widehat{f}$ deriváciu na celom $\mathbb{R}$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\,\widehat{f}\,(\xi) \overset{(4)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right] \overset{(20)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right]\mathrm{d}x$$

$$\overset{(21)}{=} -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} -\mathrm{i}\,\widehat{g}\,(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Dôkaz je teda kompletný. ■

Predchádzajúce výsledky o vlastnostiach Fourierovej transformácie využijeme na nájdenie Fourierovho obrazu tzv. Gaussovej funkcie, ktorá má početné aplikácie v rôznych oblastiach matematiky, štatistiky i fyziky. Jedná sa o funkciu s predpisom

$$G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Lema 1 (Fourierova transformácia Gaussovej funkcie)

Gaussova funkcia G je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$ s Fourierovým obrazom

$$\widehat{G}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \textit{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Dôkaz Lemy 1.

Pri dôkaze využijeme klasickú integrálnu identitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}. \tag{24}$$

Pomocou nej ľahko odvodíme, že Gaussova funkcia $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, nakoľko

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(22)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left| x = t\sqrt{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \overset{(24)}{=} 1. \tag{25}$$

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

Ďalej podľa (22) je G párnou funkciou a spĺňa identity

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x) = 0, \qquad G'(x) = -\frac{x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = -x\,G(x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Funkcia $G'(x)$ je preto nepárna a tiež absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, keďže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|G'(x)|}_{\text{párna}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} |G'(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(26)}{=} -2\int_0^{\infty} G'(x)\,\mathrm{d}x = -2\,[G(x)]_0^{\infty}$$

$$= -2\left[\lim_{x\to\infty} G(x) - G(0)\right] \overset{(26)}{=} 2G(0) \overset{(22)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Podľa Poznámky 1 preto existujú Fourierove obrazy $\widehat{G}$ a $\widehat{G'}$ na celom $\mathbb{R}$. Uvedené výpočty nám následne umožňujú efektívne aplikovať Vety 6 a 7. Konkrétne, ak označíme $g(x) := x\,G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, vďaka podmienkam v (26) potom podľa (16) a (19) platí

$$\widehat{G'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\,\widehat{G}(\xi), \qquad \left(\widehat{G}\right)'(\xi) = -\mathrm{i}\,\widehat{g}(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Avšak v súlade s druhou rovnosťou v (26) máme $g(x) = -G'(x)$ na $\mathbb{R}$, a tak

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

$$\left(\widehat{G}\right)'(\xi) \overset{(27)}{=} -\mathrm{i}\,\widehat{g}\,(\xi) = (-\mathrm{i})\left[\widehat{-G'}\,(\xi)\right] \overset{(5),(27)}{=} (-\mathrm{i})\left[-\mathrm{i}\xi\,\widehat{G}(\xi)\right] = -\xi\,\widehat{G}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Hľadaná funkcia $\widehat{G}$ je teda riešením homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice $y' = -\xi\, y$. Jej riešením zistíme, že

$$\widehat{G}(\xi) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R},$$

kde C je vhodná (komplexná) konštanta. Avšak nakoľko platí rovnosť

$$\widehat{G}(0) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot 0\cdot x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,\mathrm{d}x \overset{(25)}{=} 1,$$

máme $C = 1$ a dôkaz formuly (23) je zavŕšený. ■

Veta 8

Nech funkcia f je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. Potom jej Fourierov obraz $\widehat{f}$ je funkcia rovnomerne spojitá na celom $\mathbb{R}$.

Dôkaz Vety 8.

Výsledky v Poznámke 1 nám zaručujú existenciu Fourierovho obrazu $\widehat{f}$ pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že funkcia $\widehat{f}$ je naviac rovnomerne spojitá na $\mathbb{R}$, t.j.,

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

ak body $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ spĺňajú $|\xi - \eta| < \delta$, potom $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| < \varepsilon$.

Zvoľme teda nejaké $\varepsilon > 0$. Keďže funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, podľa (3) existuje dostatočne veľké kladné reálne číslo R_ε s vlastnosťou

$$\int_{|x| \geq R_\varepsilon} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{28}$$

Z dôvodu zjednodušenia dôkazu budeme naviac predpokladať, že funkcia f je ohraničená na $\mathbb{R}$, t.j., existuje kladná konštanta K taká, že $|f(x)| \leq K$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Následne pre ľubovoľné $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| &\overset{(4)}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right] \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{|x| \geq R_\varepsilon} f(x) \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right] \mathrm{d}x + \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} f(x) \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right] \mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

$$\leq \int_{|x|\geq R_\varepsilon} |f(x)| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x + \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} |f(x)| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x$$

$$\leq \int_{|x|\geq R_\varepsilon} |f(x)| \Big[\underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|}_{=1} + \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right|}_{=1} \Big] \mathrm{d}x + \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \underbrace{|f(x)|}_{\leq K} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x$$

$$\leq 2 \int_{|x|\geq R_\varepsilon} |f(x)|\, \mathrm{d}x + K \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x$$

$$\overset{(28)}{<} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + K \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} + K \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \mathrm{d}x. \qquad (29)$$

Na odhad výrazu $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}|$ v poslednom integrále využijeme geometrickú reprezentáciu hodnôt funkcie $g(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$, $t \in \mathbb{R}$, v komplexnej rovine pre dané pevné $x \in \mathbb{R}$. Konkrétne, platí nerovnosť

$$\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\right| \leq |-\xi x - (-\eta x)| = |x| \cdot |\xi - \eta|, \qquad (30)$$

pre každé $x, \xi, \eta \in \mathbb{R}$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Využitím relácie (30) nerovnosť (29) následne nadobudne tvar

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \overset{(29)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + K \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} \right| \mathrm{d}x \overset{(30)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + K \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} |x| \cdot |\xi - \eta| \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + K|\xi - \eta| \int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} |x| \, \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} + K R_\varepsilon^2 \, |\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Položme teraz $\delta := \frac{\varepsilon}{2KR_\varepsilon^2} > 0$. Potom pre každé $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $|\xi - \eta| < \delta$ platí v súlade s (31) nerovnosť

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \overset{(31)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + K R_\varepsilon^2 \, |\xi - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} + K R_\varepsilon^2 \, \delta = \frac{\varepsilon}{2} + K R_\varepsilon^2 \, \frac{\varepsilon}{2KR_\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Funkcia $\widehat{f}$ je teda rovnomerne spojitá na celom $\mathbb{R}$ a dôkaz je hotový. ■

V prednáške o Fourierových radoch sme uviedli Riemannovu–Lebesgueovu lemu platiacu pre funkcie z priestoru $\mathcal{L}^1(\mathcal{I})$, kde $\mathcal{I}$ je kompaktný reálny interval. Toto tvrdenie je možné rozšíriť i pre funkcie z priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Obzvlášť, v tomto kontexte poskytuje dôležitú informáciu o asymptotickom správaní sa Fourierovho obrazu funkcií absolútne integrovateľných na $\mathbb{R}$.

Lema 2 (Riemannova–Lebesgueova)

Nech funkcia f je absolútne integrovateľná na celom $\mathbb{R}$. Potom platí

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{32}$$

t.j., Fourierov obraz $\widehat{f}$ spĺňa podmienku $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Nasledujúcu vetu možno interpretovať ako analógiu integrácie per-partes v prípade Fourierovej transformácie.

Veta 9 (Fourierova transformácia "per-partes")

Pre každú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ platí formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{33}$$

pokiaľ aspoň jeden z uvedených integrálov existuje.

Dôkaz Vety 9.

Platnosť identity (33) sa ukáže pomocou Fubiniho vety pre nevlastné dvojné integrály. Predpokladajme existenciu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x$. Potom platí

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}\,(x)\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\widehat{f}\,(y)\,\mathrm{d}y,$$

čo po premenovaní premennej y na x ihneď implikuje rovnosť (33). ∎

Uvedené vlastnosti Fourierovej transformácie teraz ilustrujeme pri riešení konkrétnej praktickej úlohy – nájdenie Fourierovho obrazu danej funkcie, ktorá je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. V Príklade 2 využijeme ako užitočný nástroj tzv. Heavisideovu funkciu H definovanú na celej reálnej osi predpisom

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Príklad 2

Nájdime Fourierov obraz funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, kde a je kladná reálna konštanta. Funkcia f je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, keďže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-a|x|}}_{\text{párna}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Teda $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a preto podľa Poznámky 1 existuje Fourierov obraz $\widehat{f}$ pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Pomocou Heavisideovej funkcie H v (34) možno f zapísať v tvare

$$f(x) = H(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + H(-x)\,\mathrm{e}^{ax} \qquad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Pritom funkcie $f^+(x) := H(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$ a $f^-(x) := H(-x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, sú tiež absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Pre ich Fourierove obrazy $\widehat{f^+}$ a $\widehat{f^-}$ potom pre každé $\xi \in \mathbb{R}$ postupne máme

$$\widehat{f^+}(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^+(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(34)}{=} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}}{a+\mathrm{i}\xi}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x} + \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}, \tag{36}$$

Príklad 2

$$\widehat{f^-}(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^-(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} H(-x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(34)}{=} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\xi)x}}{a-\mathrm{i}\xi}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi} - \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\xi)x} = \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}. \tag{37}$$

V súlade s formulou (5) vo Vete 1 pre Fourierov obraz funkcie f napokon podľa vyjadrení v (35), (36) a (37) dostávame

$$\widehat{f}(\xi) \overset{(35),(5)}{=} \widehat{f^+}(\xi) + \widehat{f^-}(\xi) \overset{(36),(37)}{=} \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2} \quad \text{pre každé } \xi\in\mathbb{R}.$$

Príklad 3 (Vlastné hodnoty a vlastné funkcie Fourierovej transformácie)

V Leme 1 sme našli Fourierov obraz Gaussovej funkcie G definovanej v (22). Obzvlášť, kombináciou identít (23) a (22) dostaneme rovnosť

$$\mathcal{F}(G)(\xi) = \widehat{G}(\xi) \overset{(23)}{=} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \overset{(22)}{=} \sqrt{2\pi}\,G(\xi) \quad \text{pre každé } \xi\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

Gaussova funkcia G je teda vlastnou funkciou Fourierovej transformácie $\mathcal{F}$ odpovedajúcou vlastnému číslu $\sqrt{2\pi}$.

Konvolúcia funkcií

Pri skúmaní Fourierových radov, resp. Fourierovej transformácie, sa ukázalo prirodzené pracovať s množinou $\mathcal{L}^1(\mathcal{I})$ funkcií absolútne integrovateľných na kompaktnom intervale $\mathcal{I}$, resp. s množinou $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ funkcií absolútne integrovateľných na celom $\mathbb{R}$. Nie je ťažké ukázať, že množiny $\mathcal{L}^1(\mathcal{I})$ a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vytvárajú lineárne priestory nad telesom komplexných čísiel $\mathbb{C}$, t.j., sú uzavreté vzhľadom na komplexné lineárne kombinácie. Popri súčte a násobení skalárom je ďalšou prirodzenou a významnou operáciou súčin dvoch funkcií. V tomto prípade však súčin dvoch absolútne integrovateľných funkcií (na $\mathcal{I}$, resp. na $\mathbb{R}$) nemusí byť absolútne integrovateľnou funkciou. V snahe zachovať vlastnosť uzavretosti sa preto zavádza špeciálny typ súčinu funkcií, tzv. konvolučný súčin dvoch funkcií alebo skrátene konvolúcia dvoch funkcií.

Definícia 2 (Konvolučný súčin dvoch funkcií)

Nech f a g sú dve (komplexné) funkcie lebesgueovsky merateľné na $\mathbb{R}$. Funkcia $f * g$ definovaná predpisom

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

sa nazýva konvolučný súčin, resp. konvolúcia funkcií f a g.

Poznámka 2

Dá sa ukázať, že pre každú dvojicu $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je výraz $f(x-y)\, g(y)$ ako funkcia premennej y integrovateľný na $\mathbb{R}$ pre skoro každé reálne číslo x. Konvolučný súčin $f * g$ v (39) je preto ako funkcia premennej x korektne definovaný skoro všade na $\mathbb{R}$. V prípade, ak $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a funkcia g je ohraničená na $\mathbb{R}$, je konvolúcia $f * g$ funkcia ohraničená a spojitá na celom $\mathbb{R}$.

V nasledujúcich troch vetách uvedieme základné vlastnosti konvolúcie funkcií.

Veta 10

Pre každú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ platia nasledujúce tvrdenia.

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}x\right).$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|\, \mathrm{d}x \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \mathrm{d}x\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, \mathrm{d}x\right).$

Obzvlášť, konvolúcia $f * g$ je funkcia absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$ a platí

$$\|f * g\| \leq \|f\|\, \|g\|, \tag{40}$$

kde $\|\cdot\|$ je norma v lineárnom normovanom priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Dôkaz Vety 10.

Dôkaz oboch tvrdení je založený na využití Fubiniho vety pre nevlastné dvojné integrály. Nech $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Postupne dostávame

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x &\overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} z = x - y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z \right)}_{\text{nezávisí na } y} \mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y \right),
\end{aligned}
$$

čo po zámene $y \to x$ a $z \to x$ dokazuje správnosť rovnosti v (i). Obzvlášť, i funkcie $|f|, |g| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a tak v súlade s práve dokázanou časťou (i) máme

$$
\int_{-\infty}^{\infty} (|f| * |g|)(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x \right) \tag{41}
$$

Platnosť nerovnosti v časti (ii) potom vyplýva z nasledujúcich výpočtov

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)\,g(y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (|f|*|g|)(x)\,\mathrm{d}x \overset{(41)}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

Táto nerovnosť okrem iného ukazuje, že konvolúcia $f*g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Naviac, je ekvivalentná s reláciou v (40), keďže norma v $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je definovaná predpisom

$$\|h\| := \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x, \quad h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}). \tag{42}$$

Dôkaz vety je teda kompletný. ■

Veta 11

Konvolučný súčin predstavený v Definícii 2 je operácia komutatívna, asociatívna a distributívna vzhľadom na súčet funkcií, t.j., pre každé $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ platí

$$f * g = g * f, \tag{43}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h), \tag{44}$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h. \tag{45}$$

Dôkaz Vety 11.

Dokážeme napríklad identitu (44). Pre $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ postupne máme

$$[(f * g) * h](x) \overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x - y)\, h(y)\, \mathrm{d}y$$

$$\overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y - z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \right] h(y)\, \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = y + z \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}z \end{array} \right|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\, g(t - y)\, \mathrm{d}t \right] h(y)\, \mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\, g(t - y)\, h(y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}t$$

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-y)\,h(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t \overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,(g*h)(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(39)}{=} [f*(g*h)](x) \qquad \text{pre skoro všetky } x\in\mathbb{R}.$$

Poznamenajme, že v uvedenom výpočte sme využili skutočnosť, že podľa Vety 10 konvolúcie $f*g$ a $g*h$ sú funkcie absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$. Podobným spôsobom sa dokážu i formuly (43) a (45). ■

Nasledujúci výsledok predstavuje jeden z fundamentálnych nástrojov výskumu v spektrálnej analýze, obzvlášť v teórii Fourierovej transformácie.

Veta 12 (Fourierova transformácia konvolúcie)

Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je zobrazenie multiplikatívne vzhľadom na konvolučný súčin. Konkrétne, pre každú dvojicu funkcií $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ spĺňa Fourierov obraz $\widehat{f*g}$ ich konvolúcie pre každé $\xi\in\mathbb{R}$ formulu

$$\widehat{f*g}\,(\xi) = \widehat{f}\,(\xi)\,\widehat{g}\,(\xi), \qquad \textit{t.j.,} \qquad \mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g). \tag{46}$$

Dôkaz Vety 12.

Nech funkcie f a g sú ako v predpokladoch vety. Vo Vete 10 sme ukázali, že konvolúcia $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Preto podľa Poznámky 1 existuje Fourierov obraz $\widehat{f * g}$ pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Naviac, využitím identít (4) a (39) postupne platí

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}\,(\xi) &\overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x \overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi (x-y)}\, g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi (x-y)}\, \mathrm{d}x \right) g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} z = x - y \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z}\, \mathrm{d}z \right) g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(\xi)\, g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}y \\
&= \widehat{f}\,(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \widehat{f}\,(\xi)\, \widehat{g}\,(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Overili sme teda správnosť rovností v (46) a dôkaz je hotový. ∎

Definícia 3 (Aproximácia identity)

Nech φ je nezáporná funkcia absolútne integrovateľná na celom $\mathbb{R}$ a spĺňajúca $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Systém funkcií

$$\mathcal{S}(\varphi) := \left\{ \varphi_\eta(x),\ \eta > 0,\ \varphi_\eta(x) := \frac{1}{\eta}\,\varphi\left(\frac{x}{\eta}\right),\ x \in \mathbb{R} \right\} \tag{47}$$

sa označuje ako aproximácia identity funkciou φ.

Poznámka 3

Je zrejmé, že každá z funkcií φ_η, $\eta > 0$, definovaných v (47) je nezáporná, absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$ a spĺňa rovnosť

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\eta(x)\,\mathrm{d}x \overset{(47)}{=} \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = x/\eta \\ \mathrm{d}y = (\mathrm{d}x)/\eta \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1. \tag{48}$$

Významným príkladom aproximácie identity je systém funkcií

$$\mathcal{S}(G) := \left\{ \varphi_\eta(x) := \frac{1}{\eta}\,G\left(\frac{x}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\eta^2}},\ \eta > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\} \tag{49}$$

odpovedajúci voľbe $\varphi := G$, kde G je Gaussova funkcia v (22). Systém (49) sa niekedy označuje ako gaussovská aproximácia identity.

Nasledujúci výsledok objasňuje pomenovanie aproximácia identity pre systém funkcií $\mathcal{S}(\varphi)$ predstavený v Definícii 3. Súčasne poukazuje na jednu významnú vlastnosť konvolučného súčinu funkcií.

Veta 13

Nech $\mathcal{S}(\varphi)$ je nejaká aproximácia identity a nech f je funkcia ohraničená a spojitá na celom $\mathbb{R}$. Potom systém funkcií $f * \varphi_\eta$, $\varphi_\eta \in \mathcal{S}(\varphi)$, pre $\eta \to 0^+$ konverguje lokálne rovnomerne (skoro-rovnomerne) na $\mathbb{R}$ k funkcii f.

Dôkaz Vety 13.

Pripomeňme, že pojem lokálne rovnomerná (skoro-rovnomerná) konvergencia na $\mathbb{R}$ znamená rovnomerná konvergencia na každom kompaktnom podintervale $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Nech teda $\mathcal{I} := [a, b]$, $a < b$. Chceme ukázať, že

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \eta_\varepsilon > 0 \text{ také, že}$$
$$\text{pre každé } 0 < \eta \le \eta_\varepsilon \text{ a pre každé } x \in \mathcal{I} = [a, b] \text{ platí } |(f * \varphi_\eta)(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (50)$$

Využitím vlastností konvolučného súčinu a funkcií systému $\mathcal{S}(\varphi)$ v Definícii 2 a Poznámke 3 pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $\eta > 0$ postupne platí

$$|(f * \varphi_\eta)(x) - f(x)| \overset{(39),(48)}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \varphi_\eta(y)\, \mathrm{d}y - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\eta(y)\, \mathrm{d}y \right|$$

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$$\overset{(47)}{=} \left| \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)]\, \varphi\left(\frac{y}{\eta}\right) \mathrm{d}y \right| = \left| \begin{array}{c} t = y/\eta \\ \mathrm{d}t = (\mathrm{d}y)/\eta \end{array} \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-t\eta) - f(x)]\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t\eta) - f(x)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t. \tag{51}$$

Nech $M > 0$ je nejaké ohraničenie funkcie f na $\mathbb{R}$, t.j., $|f(x)| \le M$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Zvoľme nejaké $\varepsilon > 0$. Z konvergencie integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ vyplýva existencia (dostatočne veľkého) kladného čísla R s vlastnosťou

$$\int_{|t| \ge R} \varphi(t)\, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{52}$$

Uvažujme kompaktný interval $\mathcal{I}_R := [a-R, b+R]$. Podľa predpokladov je funkcia f spojitá na $\mathcal{I}_R$, a teda i rovnomerne spojitá na $\mathcal{I}_R$. Obzvlášť,

existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $u, v \in \mathcal{I}_R$ platí, že

ak $|u-v| < \delta$, potom $|f(u) - f(v)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (53)

Označme $\eta_\varepsilon := \min\{1,\ \delta/R\}$. Zrejme $0 < \eta_\varepsilon \le 1$ a pre každé $\eta \in (0, \eta_\varepsilon]$, každé $t \in [-R, R]$ a každé $x \in [a,b]$ bod $x - t\eta$ leží v intervale $\mathcal{I}_R = [a-R, b+R]$.

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

Okrem toho pre každú takúto trojicu (η, t, x) platí nerovnosť

$$|(x - t\eta) - x| = |t\eta| = |t|\eta \le R\eta \le R\eta_\varepsilon \le \delta.$$

Preto podľa relácie v (53) s $u := x - t\eta$ a $v := x$ máme odhad

$$|f(x - t\eta) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre každé } (\eta, t, x) \in (0, \eta_\varepsilon] \times [-R, R] \times [a, b]. \tag{54}$$

Odvodené výsledky teraz využijeme na úpravu posledného integrálu v nerovnosti (51). Konkrétne, pre každé $x \in [a, b]$ a každé $0 < \eta \le \eta_\varepsilon$ postupne dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t\eta) - f(x)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = I_1 + I_2, \quad \text{kde}$$

$$I_1 := \int_{-R}^{R} |f(x - t\eta) - f(x)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \overset{(54)}{\le} \int_{-R}^{R} \frac{\varepsilon}{2}\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-R}^{R} \varphi(t)\, \mathrm{d}t}_{\le 1} \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$I_2 := \int_{|t| \ge R} |f(x - t\eta) - f(x)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \le \int_{|t| \ge R} \Big[\underbrace{|f(x - t\eta)|}_{\le M} + \underbrace{|f(x)|}_{\le M} \Big]\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

$$\le \int_{|t| \ge R} 2M\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = 2M \int_{|t| \ge R} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \overset{(52)}{<} 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

V súlade s nerovnosťou (51) napokon dostávame odhad

$$|(f * \varphi_\eta)(x) - f(x)| \overset{(51)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t\eta) - f(x)|\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = I_1 + I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pre každé $0 < \eta \leq \eta_\varepsilon$ a každé $x \in [a, b]$. Platí teda (50) a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 4

Podľa Vety 13 teda konvolučný súčin $f * \varphi_\eta$, $\varphi_\eta \in \mathcal{S}(\varphi)$, s ľubovoľnou presnosťou globálne aproximuje ohraničenú a spojitú funkciu f na každom reálnom kompaktnom intervale $\mathcal{I}$. Naviac, získaný výsledok implikuje bodovú konvergenciu systému funkcií $f * \varphi_\eta$ pre $\eta \to 0^+$ na celom $\mathbb{R}$, t.j., platí

$$\lim_{\eta \to 0^+} (f * \varphi_\eta)(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

Funkcie φ_η teda istým spôsobom sprostredkovávajú aproximáciu identického zobrazenia. Presnejšie, každá z funkcií φ_η vytvára na priestore funkcií f ohraničených a spojitých na $\mathbb{R}$ zobrazenie $\mathcal{T}_\eta$ s predpisom

$$\mathcal{T}_\eta(f) = f * \varphi_\eta,$$

ktoré pre $\eta \to 0^+$ vo vhodnej metrike konverguje k identickému zobrazeniu.

Poznámka 5

Poznamenajme, že existuje niekoľko zovšeobecnení, resp. ďalších verzií Vety 13. Líšia sa medzi sebou podmienkami kladenými na funkciu f, a následne i typom konvergencie konvolučného súčinu $f * \varphi_\eta$. Uvedieme tri príklady.

(i) Ak funkcia f je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\lim_{\eta \to 0+} \|f * \varphi_\eta - f\|_{L^1} = \lim_{\eta \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * \varphi_\eta)(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Ak funkcia f je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\lim_{\eta \to 0+} (f * \varphi_\eta)(x) = f(x) \quad \text{pre skoro všetky } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Ak funkcia f je ohraničená na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\lim_{\eta \to 0+} (f * \varphi_\eta)(x) = f(x)$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$, v ktorom je f spojitá.

Obsah

Inverzná Fourierova transformácia

V predchádzajúcich prednáškach sme k danej funkcii $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ zostrojili jej Fourierov obraz $\widehat{f}$ a skúmali sme jeho vlastnosti. Ponúka sa otázka, či je možný aj opačný proces – zo znalosti Fourierovho obrazu $\widehat{f}$ úplne zrekonštruovať východiskový signál f. Nasledujúca veta poskytuje isté postačujúce podmienky na realizáciu tejto rekonštrukcie. Zároveň je významnou motiváciou zavedenia tzv. inverznej Fourierovej transformácie v Definícii 4.

Veta 14 (Fourierova o inverzii)

Nech funkcia f je absolútne integrovateľná a spojitá na $\mathbb{R}$ a nech jej Fourierov obraz $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Potom platí tzv. Fourierova inverzná formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

Pre dôkaz Vety 14 uvedieme jeden pomocný výsledok.

Lema 3

Pre dané $\eta > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ uvažujme funkciu $g(\xi) := G(\eta\,\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$, $\xi \in \mathbb{R}$, kde G je Gaussova funkcia v (22). Potom platí $\widehat{g}(y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\eta}\, G\left(\frac{x-y}{\eta}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

Dôkaz Lemy 3.

Nech η a x sú dané ako v predpokladoch lemy. Funkcia g je zrejme absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, nakoľko v súlade s (25) platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\eta\,\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \left| \begin{array}{c} t = \eta\,\xi \\ \mathrm{d}t = \eta\,\mathrm{d}\xi \end{array} \right| = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|\,\mathrm{d}t \overset{(25)}{=} \frac{1}{\eta}.$$

Podľa Poznámky 1 preto existuje Fourierov obraz $\widehat{g}(y)$ pre každé $y \in \mathbb{R}$. V zhode s označením zavedeným vo Vete 4 môžeme písať $G(\eta\,\xi) = G^{\eta}(\xi)$ (zmena mierky na funkcii G), a tak $g(\xi) = G^{\eta}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$. Následne podľa Vety 5 (s $f := G^{\eta}$, $x := \xi$ a $R := x$) máme

$$\widehat{g}(y) \overset{(9)}{=} \widehat{G^{\eta}}(y-x), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Pre Fourierov obraz $\widehat{G^{\eta}}(y-x)$ vyplýva z Vety 2 (s $f := G$ a $R := \eta$) rovnosť

$$\widehat{G^{\eta}}(y-x) \overset{(6)}{=} \frac{1}{|\eta|}\,\widehat{G}\left(\frac{y-x}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta}\,\widehat{G}\left(\frac{y-x}{\eta}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Napokon kombináciou identít (57) a (58) s formulou (38) v Príklade 3 dostávame

$$\widehat{g}(y) \overset{(57)}{=} \widehat{G^{\eta}}(y-x) \overset{(58)}{=} \frac{1}{\eta}\,\widehat{G}\left(\frac{y-x}{\eta}\right) \overset{(38)}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{\eta}\,G\left(\frac{y-x}{\eta}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\eta}\,G\left(\frac{x-y}{\eta}\right)$$

pre každé $y \in \mathbb{R}$ (v poslednom kroku sme využili párnosť funkcie G). $\blacksquare$

Dôkaz Vety 14.

Zvoľme nejaké $x \in \mathbb{R}$ a nech $\mathcal{S}(G)$ je gaussovská aproximácia identity definovaná v Poznámke 3. Vo svetle výsledku Lemy 3 potom každá funkcia $\varphi_\eta \in \mathcal{S}(G)$, $\eta > 0$, spĺňa pre všetky $y \in \mathbb{R}$ rovnosť

$$\varphi_\eta(x-y) \overset{(49)}{=} \frac{1}{\eta} G\left(\frac{x-y}{\eta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{g}(y), \tag{59}$$

kde g je funkcia zavedená v Leme 3 pre dané x a η. Zostrojíme teraz konvolúciu $f * \varphi_\eta$ a budeme skúmať jeho hodnotu v bode x. Platí

$$(f * \varphi_\eta)(x) \overset{(43)}{=} (\varphi_\eta * f)(x) \overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\eta(x-y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \overset{(59)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{(33)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{60}$$

Do posledného integrálu dosadíme vyjadrenie funkcie g z Lemy 3

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, G(\eta\,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{61}$$

Kombináciou (60) a (61) dostávame napokon identitu

$$(f * \varphi_\eta)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, G(\eta\,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{62}$$

Dôkaz Vety 14 (pokračovanie).

Poznamenajme, že konvolučný súčin $f * \varphi_\eta$ je podľa Poznámky 2 ohraničený a spojitý na $\mathbb{R}$, a teda definovaný pre každé dané $x \in \mathbb{R}$ a $\eta > 0$, keďže funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a funkcia φ_η je v súlade s (49) ohraničená na $\mathbb{R}$. Z dôvodu zjednodušenia úvah budeme naviac predpokladať, že funkcia f je ohraničená na $\mathbb{R}$. Limitovaním rovnosti (62) pre $\eta \to 0^+$ a využitím Vety 13 a formuly (55) v Poznámke 4 potom pre každé dané $x \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$f(x) \overset{(55)}{=} \lim_{\eta \to 0+} (f * \varphi_\eta)(x) \overset{(62)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, G(\eta\,\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{63}$$

Z teórie parametrických integrálov vyplýva, že v poslednom výraze je možné zameniť poradie operácií limitovania a integrovania. A nakoľko Gaussova funkcia G je spojitá vo svojom argumente, platí

$$f(x) \overset{(63)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \left[\lim_{\eta \to 0+} G(\eta\,\xi)\right] \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, G(0)\, \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{(22)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi \quad \text{pre každé dané } x \in \mathbb{R},$$

čo potvrdzuje správnosť identity (56) a kompletizuje dôkaz. ■

Poznámka 6

Fourierov inverzný vzorec (56) možno interpretovať ako spojitú analógiu rozvoja periodickej funkcie do jej príslušného "diskrétneho" komplexného Fourierovho radu. Nevlastný integrál v (56) sa často nazýva Fourierov integrál funkcie f. Fourierov obraz $\widehat{f}$ sa v niektorej literatúre označuje termínom spektrálna hustota funkcie f a jeho absolútna hodnota $|\widehat{f}|$ termínom spektrum funkcie f. Formulu (56) možno pomocou (4) a Fubiniho vety pre každé $x \in \mathbb{R}$ zapísať i v tvare

$$f(x) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)} \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi.$$

Definícia 4 (Inverzná Fourierova transformácia)

Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je daná funkcia. Funkciu $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovanú predpisom

$$\check{f}(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x}\, \mathrm{d}x, \qquad \zeta \in \mathbb{R}, \tag{64}$$

budeme nazývať inverzný Fourierov obraz funkcie f. Priradenie $f \mapsto \check{f}$ sa označuje ako inverzná Fourierova transformácia, pričom píšeme $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

Poznámka 7

Z Definície 4 ihneď vidieť súvislosť inverzného Fourierovho obrazu a Fourierovho obrazu funkcie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Konkrétne, z formúl (4) a (64) vyplývajú identity

$$\check{f}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{f}(-\zeta), \quad \widehat{f}(\zeta) = 2\pi\,\check{f}(-\zeta) \quad \text{pre každé } \zeta \in \mathbb{R}. \tag{65}$$

Rovnosti v (65) preto umožňujú prenášať všetky vlastnosti Fourierovho obrazu $\widehat{f}$ na inverzný Fourierov obraz $\check{f}$. Obzvlášť, funkcia $\check{f}$ je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$ práve vtedy, keď $\widehat{f}$ je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$.

Poznámka 8

V niektorej literatúre sa na rozdiel od Definícií 1 a 4 pod pojmom Fourierova transformácia a inverzná Fourierova transformácia rozumejú zobrazenia

$$\tilde{\mathcal{F}}(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{66}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(f)(\zeta) := \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}^{-1}(f)(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta x}\,\mathrm{d}x, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \tag{67}$$

pre každú funkciu f absolútne integrovateľnú na celom $\mathbb{R}$.

Symbolom $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ budeme označovať množinu všetkých funkcií spojitých na $\mathbb{R}$.

Veta 15

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ takú, že $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, platia rovnosti

$$\check{\widehat{f}}(x) = f(x) = \widehat{\check{f}}(x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}, \tag{68}$$

t.j., ekvivalentne $\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big) = f = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(f)\big)$.

Dôkaz Vety 15.

Formuly v (68) sú priamym dôsledkom Fourierovej vety 14 o inverzii a prvého vzorca v (65) v Poznámke 7. Konkrétne, postupne máme

$$\check{\widehat{f}}(x) \overset{(64)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y \overset{(56)}{=} f(x),$$

$$\widehat{\check{f}}(x) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \mathrm{d}y \overset{(65)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \mathrm{d}y = \big| t = -y \big|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t \overset{(56)}{=} f(x),$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$. Dôkaz je úplný. ∎

Dôsledok 3

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ takú, že $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, platia rovnosti

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x), \quad \widehat{\widehat{\widehat{f}}}(x) = 2\pi \widehat{f}(-x), \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}(x) = 4\pi^2 f(x) \quad \textit{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{69}$$

Dôkaz Dôsledku 3.

Jednoduchou aplikáciou druhej identity v (65), Vety 2 o Fourierovej transformácii zmeny mierky funkcie pre hodnotu $R = -1$ a formuly (68) máme

$$\widehat{\widehat{f}}(x) \overset{(65)}{=} 2\pi \widehat{\left(\check{f}\right)}^{-1}(x) \overset{(6)}{=} 2\pi \frac{1}{|-1|} \widehat{\check{f}}(-x) \overset{(68)}{=} 2\pi f(-x), \tag{70}$$

$$\widehat{\widehat{\widehat{f}}}(x) \overset{(70)}{=} 2\pi \widehat{f^{-1}}(x) \overset{(6)}{=} 2\pi \frac{1}{|-1|} \widehat{f}(-x) = 2\pi \widehat{f}(-x), \tag{71}$$

$$\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}(x) \overset{(71)}{=} 2\pi \widehat{\left(\widehat{f}\right)}^{-1}(x) \overset{(6)}{=} 2\pi \frac{1}{|-1|} \widehat{\widehat{f}}(-x) \overset{(70)}{=} 2\pi \cdot 2\pi f(x) = 4\pi^2 f(x) \tag{72}$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 9

Uvažuje nasledujúcu množinu (komplexných) funkcií

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) := \left\{f,\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ \widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\right\}. \tag{73}$$

Z Vety 8 a z prvej formuly v (69) potom vyplýva, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ zobrazuje podpriestor $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ do seba, t.j., pre každú funkciu $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ platí, že i $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Naviac, identity v (68) v Dôsledku 3 ukazujú, že $\mathcal{F}$ je bijektívne zobrazenie na $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ s inverziou $\mathcal{F}^{-1}$. Označme symbolom $\mathcal{T}$ zobrazenie definované predpisom $\mathcal{T}(f)(x) := f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, a symbolom $\mathcal{I}$ identické zobrazenie. V súlade s (65), (68) a (69) potom platia rovnosti

$$\mathcal{T}^2 := \mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}, \qquad \mathcal{F} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{F} = 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}, \qquad \mathcal{F}^2 := \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\, \mathcal{T},$$

$$\mathcal{F}^3 := \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi\, \mathcal{F} \circ \mathcal{T} = 4\pi^2\, \mathcal{F}^{-1}, \qquad \mathcal{F}^4 := \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 4\pi^2\, \mathcal{I}.$$

Obzvlášť, zobrazenia $\tilde{\mathcal{F}}$ a $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ definované v (66) a (67) spĺňajú identity

$$\mathcal{T}^2 = \mathcal{I}, \qquad \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}, \qquad \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \tilde{\mathcal{F}}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}},$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^2 = \mathcal{T}, \qquad \tilde{\mathcal{F}}^3 = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{T} = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}, \qquad \tilde{\mathcal{F}}^4 = \mathcal{I}.$$

Množina $\{\mathcal{I}, \mathcal{T}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\}$ spolu s operáciou skladania zobrazení $\circ$ je teda z algebraického hľadiska 4-prvková cyklická grupa s generátormi $\tilde{\mathcal{F}}$ a $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$.

Schwartzov priestor funkcií

Symbolom $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ budeme označovať priestor všetkých funkcií f, ktoré majú derivácie všetkých rádov na celom $\mathbb{R}$.

Definícia 5 (Schwartzov priestor funkcií)

Množina komplexných funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \to \infty} \left| x^k f^{(n)}(x) \right| = 0 \text{ pre každé } k, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \tag{74}$$

sa nazýva Schwartzov priestor rýchlo klesajúcich funkcií na $\mathbb{R}$. Funkcia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa niekedy označuje termínom Schwartzova funkcia na $\mathbb{R}$.

Podpriestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ v (74) je pomenovaný na počesť francúzskeho matematika Laurenta Schwartza (1915 – 2002). Má aplikácie v mnohých oblastiach matematiky a fyziky. Obzvlášť, je fundamentálnym nástrojom pre rozšírenie Fourierovej transformácie na zovšeobecnené funkcie (tzv. temperované distribúcie).

Poznámka 10

Významným príkladom Schwartzovej funkcie na $\mathbb{R}$ je Gaussova funkcia G zavedená v (22), ako sa možno ľahko presvedčiť.

Poznámka 11

Priamo z Definície 5 vyplýva, že pre každú funkciu $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a pre každú dvojicu $k, n \in \mathbb{N}_0$ je i výraz $x^k f^{(n)}(x)$ Schwartzovou funkciou. Špeciálne, každá z derivácií $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, je prvkom priestoru $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Veta 16

Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zavedený v Definícii 5 spĺňa nasledujúce vlastnosti.

(i) *Každá funkcia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je absolútne integrovateľná a spojitá na celom $\mathbb{R}$, t.j., platí inklúzia $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

(ii) *Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ definovaná v (4) zobrazuje priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ do seba, t.j., pre každú Schwartzovu funkciu f jej Fourierov obraz $\widehat{f}$ patrí tiež do priestoru $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dôkaz Vety 16.

Nech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je daná. Spojitosť funkcie f na celom $\mathbb{R}$ je zrejmá z definície priestoru $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ v (74). Ďalej platia rovnosti

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

$$\lim_{|x|\to\infty}(1+x^2)\,|f(x)| = \lim_{|x|\to\infty}\left(|f(x)|+|x^2 f(x)|\right) \overset{(74)}{=} 0.$$

Obzvlášť teda pre dostatočne veľké kladné reálne číslo R platí nerovnosť

$$(1+x^2)\,|f(x)| \le 1 \iff |f(x)| \le \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pre každé } x \text{ spĺňajúce } |x| \ge R. \tag{75}$$

Vďaka spojitosti je funkcia f ohraničená na kompaktnom intervale $[-R, R]$, t.j., existuje reálne $M > 0$ tak, že $|f(x)| \le M$ pre každé $x \in [-R, R]$. Relácia v (75) následne zaručuje i absolútnu integrovateľnosť funkcie f, nakoľko

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R}\underbrace{|f(x)|}_{\le M}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\ge R}|f(x)|\,\mathrm{d}x \le 2MR + \int_{|x|\ge R}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(75)}{\le} 2MR + \int_{|x|\ge R}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2MR + [\pi - 2\mathrm{arctg}R] < \infty.$$

Preto $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a tvrdenie (i) je dokázané. Pre dané $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ teda existuje Fourierov obraz $\widehat{f}$ na celom $\mathbb{R}$. Na dôkaz tvrdenia (ii) využijeme výsledky Dôsledku 2 a Vety 7. Nech $n \in \mathbb{N}$ je dané. Z Poznámky 11 vieme, že funkcia $g(x) := x^n f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, spĺňa $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a podľa časti (i) následne i $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. V súlade s Vetou 7 potom existuje $\left(\widehat{f}\right)^{(n)}$ na celom $\mathbb{R}$ a platí rovnosť

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

$$\left(\widehat{f}\,\right)^{(n)}(\xi) = (-\mathrm{i})^n \widehat{g}\,(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{76}$$

Teda Fourierov obraz $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Naviac, podľa Poznámky 11 a podmienky (74) spĺňa Schwartzova funkcia g pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ i relácie

$$g^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \qquad \lim_{|x|\to\infty} g^{(k)}(x) = 0. \tag{77}$$

V súlade s formulou (18) v Dôsledku 2 potom máme

$$\widehat{g^{(k)}}\,(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^k\, \widehat{g}\,(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{78}$$

Kombináciou identít (76) a (78) a výsledku Riemannovej–Lebesgueovej lemy 2 napokon pre každé $k, n \in \mathbb{N}_0$ postupne dostávame

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left|\xi^k \left(\widehat{f}\,\right)^{(n)}(\xi)\right| \overset{(76)}{=} \lim_{|\xi|\to\infty} \left|\xi^k (-\mathrm{i})^n \widehat{g}\,(\xi)\right| = \lim_{|\xi|\to\infty} \left|(-1)^n\, \mathrm{i}^{n-k}\, (\mathrm{i}\xi)^k\, \widehat{g}\,(\xi)\right|$$

$$= \lim_{|\xi|\to\infty} \left|(\mathrm{i}\xi)^k\, \widehat{g}\,(\xi)\right| \overset{(78)}{=} \lim_{|\xi|\to\infty} \left|\widehat{g^{(k)}}\,(\xi)\right| = 0.$$

Podľa Definície 5 to teda znamená, že Fourierov obraz $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, čo ukazuje správnosť tvrdenia (ii) a kompletizuje dôkaz celej vety. ■

Nasledujúce tvrdenie a poznámka poukazujú na praktický význam priestoru $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dôsledok 4

Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ spĺňa inklúziu $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})$, kde $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ je podpriestor definovaný v Poznámke 9. Obzvlášť, Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je bijektívne zobrazenie na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dôkaz Dôsledku 4.

Uvedené tvrdenie vyplýva priamo z Vety 16 a z poznatku, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je podľa Poznámky 9 bijekciou na priestore $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Skutočne, zobrazenia $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ vnárajú priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ do seba. Obzvlášť, teda platí

$$\left(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})},$$

čo ukazuje, že $\mathcal{F}$ zobrazuje Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ do seba bijektívne. ■

Poznámka 12

Dá sa ukázať, že Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je podpriestor hustý v $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Inými slovami, každú funkciu absolútne integrovateľnú na $\mathbb{R}$ možno v integrálnej norme (42) s ľubovoľnou presnosťou aproximovať vhodnou Schwartzovou funkciou.

Korelácia a autokorelácia funkcií

Definícia 6 (Korelácia a autokorelácia funkcií)

Nech f a g sú dve (komplexné) funkcie absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$. Funkcia $f \circ g$ definovaná predpisom

$$(f \circ g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}\, g(x+y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{79}$$

sa nazýva korelácia funkcií f a g. Obzvlášť, funkcia $f \circ f$ sa označuje ako autokorelácia funkcie f.

Poznámka 13

Hodnota korelácie $(f \circ g)(x)$ vyjadruje pre dané $x \in \mathbb{R}$ istú mieru globálnej závislosti/nezávislosti signálov $f(y)$ a $g(x+y)$ na celom $\mathbb{R}$. Priamo z Definícií 2 a 6 vyplýva úzka súvislosť korelácie a konvolúcie dvoch funkcií. Konkrétne, podľa formúl (39) a (79) a v súlade s označením zavedeným vo Vete 2 platí

$$(f \circ g)(x) = \left(\overline{f^{-1}} * g\right)(x) \quad \text{pre každé prípustné } x \in \mathbb{R}, \tag{80}$$

ako sa možno ľahko presvedčiť. Podľa Poznámky 2 je preto korelácia $f \circ g$ každých dvoch funkcií $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ korektne definovaná skoro všade na $\mathbb{R}$.

Uvedieme teraz jeden pomocný technický výsledok.

Lema 4

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *platí identita* $\widehat{\overline{f^{-1}}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$ *pre každé* $\xi \in \mathbb{R}$.

Dôkaz Lemy 4.

Rovnosť bezprostredne vyplýva z definície Fourierovej transformácie v (4). ■

Veta 17 (Fourierova transformácia korelácie a autokorelácie)

Pre každú dvojicu $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *je korelácia* $f \circ g$ *funkcia absolútne integrovateľná na* $\mathbb{R}$ *a jej Fourierov obraz* $\widehat{f \circ g}$ *spĺňa formulu*

$$\widehat{f \circ g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}\,\widehat{g}(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{81}$$

Špeciálne, platí tzv. autokorelačná identita

$$\widehat{f \circ f}(\xi) = \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}. \tag{82}$$

Dôkaz Vety 17.

Nech f a g sú dve funkcie spĺňajúce predpoklady vety. Zrejme $\overline{f^{-1}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a následne podľa formuly (80) a Vety 10 i korelácia $f \circ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Fourierov obraz $\widehat{f \circ g}$ je preto definovaný na celom $\mathbb{R}$. Využitím Vety 12 a Lemy 4 potom priamo dostávame identitu (81), keďže

$$\widehat{f \circ g}\,(\xi) \overset{(80)}{=} \widehat{\overline{f^{-1}} * g}\,(\xi) \overset{(46)}{=} \widehat{\overline{f^{-1}}}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}\,(\xi)}\,\widehat{g}(\xi) \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}.$$

Formula (82) je jej bezprostredným dôsledkom v prípade voľby $g := f$. ∎

V teórii Fourierových radov sme pracovali s Hilbertovým priestorom $\mathcal{L}^2(\mathcal{I})$ (komplexných) funkcií, ktorých druhá mocnina je absolútne integrovateľná na kompaktnom intervale $\mathcal{I}$. V ďalšom výklade budeme uvažovať Hilbertov priestor

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) := \left\{f,\ |f|^2 \text{ je lebesgueovsky integrovateľná na } \mathbb{R}\right\}. \tag{83}$$

Poznámka 14

Poznamenajme, že pre $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ korelácia $f \circ g$ úzko súvisí so skalárnym súčinom a odpovedajúcou normou funkcií f a g. Podľa (79) platí

$$(f \circ g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}\, g(y)\, \mathrm{d}y = \langle g, f\rangle, \quad (f \circ f)(0) = \langle f, f\rangle = \|f\|^2. \tag{84}$$

Fourierova transformácia v Hilbertovom priestore

V technických a fyzikálnych aplikáciach (obzvlášť v kvantovej fyzike) má prvoradý význam spektrálna analýza v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ predstavenom v (83). V nasledujúcom výklade preto predstavíme koncept Fourierovej transformácie v priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Je nutné zdôrazniť, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ zavedená v Definícii 1 má vo všeobecnosti zmysel iba pre funkcie absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$. Obmedzíme sa teda najprv na podpriestor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Následne ukážeme rozšírenie Fourierovej transformácie na celý Hilbertov priestor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Veta 18 (Parsevalova rovnosť)

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je Fourierov obraz $\widehat{f}$ prvkom priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a platí tzv. Parsevalova rovnosť

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{85}$$

Inými slovami, Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je lineárne zobrazenie z podpriestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ do priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ s vlastnosťou

$$\|\mathcal{F}(f)\| = \sqrt{2\pi}\,\|f\| \quad \text{pre každé } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \tag{86}$$

Na dôkaz Vety 18 budeme potrebovať dva pomocné výsledky. Poznamenajme, že Lema 5 poskytuje postačujúcu podmienku absolútnej integrovateľnosti Fourierovho obrazu funkcie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Lema 5

Nech funkcia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je ohraničená na okolí $x = 0$ a $|\widehat{f}| - \widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Potom Fourierov obraz $\widehat{f}$ je funkcia absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$.

Lema 6

Pre každé dve funkcie $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je ich konvolúcia $f * g$ funkcia spojitá a ohraničená na $\mathbb{R}$ a platí $\lim_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

Dôkaz Vety 18.

Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je daná funkcia. Dokážeme, že autokorelácia $f \circ f$ je prvkom priestoru $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ predstavenom v Poznámke 9. Konkrétne, ukážeme, že funkcia $f \circ f$ spĺňa podmienky

$$(f \circ f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \text{a} \quad \widehat{f \circ f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Podľa rovnosti (80) platí $(f \circ f)(x) = (\overline{f^{-1}} * f)(x)$ skoro všade na $\mathbb{R}$, a keďže

Dôkaz Vety 18 (pokračovanie).

$\overline{f^{-1}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, podľa Vety 10 (s $g := \overline{f^{-1}}$) je autokorelácia $f \circ f$ absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. Naviac, v súlade s Lemou 6 (opäť s $g := \overline{f^{-1}}$) je funkcia $f \circ f$ spojitá na celom $\mathbb{R}$. Obzvlášť, výraz $(f \circ f)(x)$ je definovaný pre každé $x \in \mathbb{R}$. Využitím autokorelačnej identity (82) dostávame

$$\left|\widehat{f \circ f}(\xi)\right| - \widehat{f \circ f}(\xi) \overset{(82)}{=} \left|\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\right| - \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 = 0 \quad \text{pre každé } \xi \in \mathbb{R}.$$

Podľa Lemy 5 teda $\widehat{f \circ f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, a tak máme $f \circ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. To nám následne umožňuje použiť prvú formulu z (68) vo Vete 15, konkrétne platí

$$\check{\widehat{f \circ f}}(x) = (f \circ f)(x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{87}$$

V súlade s Definíciou 4 inverznej Fourierovej transformácie potom máme

$$\check{\widehat{f \circ f}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f \circ f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \overset{(82)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}\xi \tag{88}$$

pre každé $x \in \mathbb{R}$. Obzvlášť, pre voľbu $x = 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \overset{(88)}{=} 2\pi \check{\widehat{f \circ f}}(0) \overset{(87)}{=} 2\pi\,(f \circ f)(0) \overset{(84)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x < \infty,$$

čo dokazuje formulu (85). Rovnosť (86) je potom jej priamym dôsledkom. ∎

Zovšeobecnením Parsevalovej rovnosti (85) je tzv. Plancherelova formula.

Veta 19 (Plancherelova formula)

Nech funkcie $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. *Potom Fourierove obrazy* $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *a platí tzv. Plancherelova formula*

$$\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle = 2\pi \langle f, g \rangle. \tag{89}$$

Dôkaz Vety 19.

Skutočnosť, že $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, vyplýva z Vety 18. Analogicky ako v jej dôkaze sa ukáže, že korelácia $f \circ g$ je funkcia spojitá a absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. Dokážeme ďalej, že aj Fourierov obraz $\widehat{f \circ g}$ je absolútne integrovateľný na $\mathbb{R}$. Nakoľko $|\widehat{f}|, |\widehat{g}| \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f \circ g}(\xi) \right| \mathrm{d}\xi \overset{(81)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \overline{\widehat{f}(\xi)}\, \widehat{g}(\xi) \right| \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right| |\widehat{g}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi = \left\langle \left| \widehat{f} \right|, |\widehat{g}| \right\rangle,$$

a tak $\widehat{f \circ g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Funkcia $f \circ g$ je preto prvkom priestoru $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Ďalej postupujeme podobne ako v dôkaze Vety 18 (vzhľadom na funkciu $f \circ g$). ∎

Poznámka 15

Z Vety 18 vyplýva, že Fourierova transformácia $\tilde{\mathcal{F}}$ zavedená v (66) je lineárne izometrické zobrazenie z podpriestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ do priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Konkrétne, v súlade s (86) a (89) pre každé $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ platí

$$\left\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\right\| = \|f\|, \qquad \left\langle \tilde{\mathcal{F}}(f), \tilde{\mathcal{F}}(g) \right\rangle = \langle f, g \rangle. \tag{90}$$

Prvá rovnosť v (90) implikuje, že zobrazenie $\tilde{\mathcal{F}}$, a teda aj zobrazenie $\mathcal{F}$, je nutne injektívne na $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (vzhľadom na normu priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$).

Poznámka 16

Je nutné poznamenať, že na rozdiel od kompaktných intervalov $\mathcal{I}$, na ktorých vždy platí relácia $\mathcal{L}^2(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathcal{I})$, pre celú reálnu os $\mathbb{R}$ nie sú normované priestory $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ v žiadnej inklúzii.

Príklad 4

Funkcia $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, je prvkom priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, avšak nepatrí do priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ako sa možno ľahko presvedčiť elementárnou integráciou.

Nasledujúce tvrdenie má kľúčový význam pre rozšírenie konceptu Fourierovej transformácie na celý Hilbertov priestor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Lema 7

Pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *definujme postupnosť funkcií* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tvaru*

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n, \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{R}. \tag{91}$$

Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \text{ a Fourierov obraz } \widehat{f_n} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \tag{92}$$

Naviac, postupnosť $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *má v priestore* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *limitu, t.j., existuje funkcia* $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *s vlastnosťou* $\lim_{n\to\infty} \left\|\widehat{f_n} - g\right\| = 0.$

Dôkaz Lemy 7.

Zvoľme pevne nejaké $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$\int_{-n}^{n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty, \quad \text{t.j., funkcia } f \in \mathcal{L}^2[-n, n]. \tag{93}$$

Dôkaz Lemy 7 (pokračovanie).

Na druhej strane podľa Poznámky 16 vieme, že $\mathcal{L}^2[-n,n] \subseteq \mathcal{L}^1[-n,n]$, pričom

$$\int_{-n}^{n} |f(x)|\mathrm{d}x \leq \sqrt{2n}\sqrt{\int_{-n}^{n} |f(x)|^2\mathrm{d}x} \leq \sqrt{2n}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x} < \infty. \quad (94)$$

Následne pre funkciu f_n definovanú v (91) máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x \overset{(91)}{=} \int_{-n}^{n} |f(x)|\mathrm{d}x \overset{(94)}{<} \infty, \quad (95)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \overset{(91)}{=} \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\mathrm{d}x \overset{(93)}{<} \infty. \quad (96)$$

Z nerovností (95)–(96) vyplýva, že funkcia $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Príslušný Fourierov obraz $\widehat{f_n}$ je preto definovaný korektne a v súlade s Parsevalovou rovnosťou (85) vo Vete 18 máme $\widehat{f_n} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Platia teda relácie v (92). Pre dôkaz druhej časti tvrdenia v leme poznamenajme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná v priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ s limitou f. Skutočne, máme

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x \overset{(91)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>n} |f(x)|^2\mathrm{d}x = 0.$$

Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda cauchyovská v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Využijúc Parsevalovu rovnosť

Dôkaz Lemy 7 (pokračovanie).

(86) a linearitu Fourierovej transformácie v súlade vo Vete 1 máme

$$\left\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\right\| \overset{(5)}{=} \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\| \overset{(86)}{=} \sqrt{2\pi}\,\|f_n - f_m\| \quad \text{pre každé } m, n \in \mathbb{N}. \tag{97}$$

Z identity (97) a z druhej relácie v (92) následne vyplýva, že aj postupnosť Fourierových obrazov $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. A keďže priestor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je úplný, postupnosť $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 17

Ak symboly $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ označujú príslušné normy v priestoroch $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, potom z dôkazu Lemy 7 nie je ťažké ukázať, že funkcie f_n, $n \in \mathbb{N}$, definované v (91) pomocou danej funkcie $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ spĺňajú nerovnosti

$$\|f_n\|_1 \leq \sqrt{2n}\,\|f\|_2, \quad \|f_n\|_2 \leq \|f\|_2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{98}$$

Naviac, pre odpovedajúce Fourierove obrazy $\widehat{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\widehat{f_n}(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(91)}{=} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{99}$$

Funkcia g v Leme 7 potom spĺňa $g(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(\xi)$ skoro všade na $\mathbb{R}$.

Definícia 7 (Fourierova transformácia v Hilbertovom priestore)

Nech $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je daná funkcia. Funkcia g definovaná v Leme 7 sa nazýva Fourierov obraz funkcie f a označuje sa $\widehat{f}$. V súlade s Poznámkou 17 teda platí

$$\widehat{f}\,(\xi) := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{100}$$

kde uvedený limitný prechod sa uvažuje v kontexte normy v priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Priradeniu $f \mapsto \widehat{f}$ hovoríme Fourierova transformácia, pričom píšeme $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Poznámka 18 (Fourierova transformácia v Hilbertovom priestore)

Vo svetle Lemy 7 z Definície 7 vyplýva, že pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ Fourierov obraz $\widehat{f}$ definovaný formulou (100) existuje pre skoro všetky body $\xi \in \mathbb{R}$. Preto funkcia $\widehat{f}$ nemusí byť na rozdiel od klasického Fourierovho obrazu v priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (rovnomerne) spojitá na celom $\mathbb{R}$ (viď Veta 8 a Riemannova–Lebesgueova Lema 2). Je však potrebné poznamenať, že Fourierove transformácie zavedené v Definíciach 1 a 7 sú vzájomne konzistentné. Konkrétne, pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sú jej Fourierove obrazy definované v (4) a v (100) totožné skoro všade na $\mathbb{R}$, t.j., v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ reprezentujú vzhľadom na príslušnú normu rovnakú triedu funkcií.

V nasledujúcom výklade ukážeme, že Fourierova transformácia na Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ predstavená formulou (91) v Definícii 7 má analogické vlastnosti ako štandardná Fourierova transformácia na priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ zavedená v (64) v Definícii 1. Obzvlášť, v platnosti zostáva Parsevalova rovnosť (86) vo Vete 18 a Placherelova formula (89) vo Vete 19.

Veta 20 (Parsevalova rovnosť)

Pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a jej Fourierov obraz $\widehat{f}$ v (100) platí identita

$$\left\|\widehat{f}\right\| = \sqrt{2\pi}\,\|f\| \quad \textit{vzhľadom na normu priestoru } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \tag{101}$$

Dôkaz Vety 20.

Nech $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je daná funkcia a nech $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je odpovedajúci Fourierov obraz v (91). Uvažujme postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanú v (91) a k nej odpovedajúcu postupnosť $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierových obrazov v Leme 7. V súlade s dôkazom Lemy 7, Poznámkou 17 a Definíciou 7 platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n} = \widehat{f} \quad \text{vzhľadom na normu v priestore } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \tag{102}$$

Z rovností v (102) následne vďaka spojitosti normy dostávame relácie

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|, \quad \lim_{n\to\infty} \left\|\widehat{f_n}\right\| = \left\|\widehat{f}\right\|. \tag{103}$$

Keďže podľa prvej relácie v (92) funkcia $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, platí Parsevalova rovnosť (86) vo Vete 18, t.j., máme identitu

$$\left\|\widehat{f_n}\right\| = \sqrt{2\pi}\, \|f_n\| \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}. \tag{104}$$

Limitovaním formuly (104) pre $n \to \infty$ v kombinácii s rovnosťami v (103) dostávame Parsevalovu rovnosť (101) a dôkaz je kompletný. ∎

Veta 21 (Plancherelova formula)

Pre každú dvojicu $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a ich Fourierove obrazy $\widehat{f}, \widehat{g}$ v (100) platí

$$\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle = 2\pi\, \langle f, g\rangle. \tag{105}$$

Dôkaz Vety 21.

Ukážeme, že Plancherelova formula (105) je priamym dôsledkom Parsevalovej rovnosti (101). Zvoľme dve funkcie $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a uvažujme ich odpovedajúce Fourierove obrazy $\widehat{f}, \widehat{g}$ v (100). Podľa (101) platia rovnosti

Dôkaz Vety 21 (pokračovanie).

$$\left\|\widehat{f}\right\|^2 \overset{(101)}{=} 2\pi \|f\|^2, \quad \|\widehat{g}\|^2 \overset{(101)}{=} 2\pi \|g\|^2. \tag{106}$$

Keďže i funkcia $f+g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a v súlade s (5) a (100) je Fourierova transformácia lineárne zobrazenie, máme opäť podľa Parsevalovej rovnosti (101) identitu

$$\left\|\widehat{f}+\widehat{g}\right\|^2 \overset{(101)}{=} 2\pi \|f+g\|^2. \tag{107}$$

Využijúc vlastnosti komplexného skalárneho súčinu postupne dostávame

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f,g\rangle + \overline{\langle f,g\rangle} = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\langle f,g\rangle\right].\end{aligned} \tag{108}$$

Analogicky odvodíme, že platí

$$\left\|\widehat{f}+\widehat{g}\right\|^2 = \left\|\widehat{f}\right\|^2 + \|\widehat{g}\|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle\right]. \tag{109}$$

Kombináciou formúl (108), (109) a (106), (107) získame rovnosť

$$\mathrm{Re}\left[\left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle\right] = 2\pi\,\mathrm{Re}\left[\langle f,g\rangle\right]. \tag{110}$$

Poznamenajme, že odvodená formula (110) platí i pre dvojicu funkcií f a $\mathrm{i}g$, nakoľko $\mathrm{i}g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. A keďže zrejme $\widehat{\mathrm{i}g} = \mathrm{i}\widehat{g}$, máme rovnosť

Dôkaz Vety 21 (pokračovanie).

$$\mathrm{Re}\left[\left\langle \widehat{f}, \mathrm{i}\widehat{g}\right\rangle\right] \overset{(110)}{=} 2\pi\,\mathrm{Re}\,[\langle f, \mathrm{i}g\rangle]. \tag{111}$$

Na druhej strane platí

$$\langle f, \mathrm{i}g\rangle = -\mathrm{i}\langle f, g\rangle = -\mathrm{i}\left\{(\mathrm{Re}\,[\langle f, g\rangle]) + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}\,[\langle f, g\rangle])\right\} = (\mathrm{Im}\,[\langle f, g\rangle]) - \mathrm{i}\,(\mathrm{Re}\,[\langle f, g\rangle]),$$

$$\text{a tak máme} \quad \mathrm{Re}\,[\langle f, \mathrm{i}g\rangle] = \mathrm{Im}\,[\langle f, g\rangle]. \tag{112}$$

Následne teda platí aj identita

$$\mathrm{Re}\left[\langle \widehat{f}, \mathrm{i}\widehat{g}\rangle\right] = \mathrm{Im}\left[\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\right]. \tag{113}$$

Z rovností (111)–(113) dostávame identitu

$$\mathrm{Im}\left[\left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle\right] \overset{(111)-(113)}{=} 2\pi\,\mathrm{Im}\,[\langle f, g\rangle]. \tag{114}$$

Napokon pomocou (110) a (114) odvodíme rovnosť (105). Konkrétne,

$$\left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle = \left(\mathrm{Re}\left[\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\right]\right) + \mathrm{i}\left(\mathrm{Im}\left[\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\right]\right)$$

$$\overset{(110),(114)}{=} 2\pi\,(\mathrm{Re}\,[\langle f, g\rangle]) + 2\pi\mathrm{i}\,(\mathrm{Im}\,[\langle f, g\rangle]) = 2\pi\,\langle f, g\rangle,$$

t.j., platí Plancherelova formula (105) a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 19 (Plancherelova formula)

Poznamenajme, že dôkaz Vety 21 je možné viesť i v duchu dôkazu Vety 20 využitím spojitosti skalárneho súčinu. Konkrétne, v kontexte označenia v dôkaze Vety 20 pre funkcie f a g postupne máme

$$\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle \overset{(102)}{=} \left\langle \lim_{m\to\infty} \widehat{f_m}, \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n} \right\rangle = \lim_{m,n\to\infty} \left\langle \widehat{f_m}, \widehat{g_n} \right\rangle$$

$$\overset{(89)}{=} \lim_{m,n\to\infty} \left(2\pi \langle f_m, g_n \rangle\right) = 2\pi \left\langle \lim_{m\to\infty} f_m, \lim_{n\to\infty} g_n \right\rangle = 2\pi \, \langle f, g \rangle.$$

Tento postup však vyžaduje znalosť identity (89), t.j., Plancherelovej formuly na podpriestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. V nami použitom dôkaze Vety 21 túto informáciu explicitne nepoužívame a vychádzame iba z platnosti Parsevalovej rovnosti (101) na celom Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Veta 22 (Fourierova transformácia "per-partes")

Pre každú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ platí formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \widehat{g}\,(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x. \tag{115}$$

Poznámka 20 (Fourierova transformácia "per-partes")

Je nutné poznamenať, že na rozdiel od rovnosti (33) vo Vete 9 obidva integrály v (115) existujú a sú konečné pre každé dve funkcie $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Skutočne, podľa Definície 7 odpovedajúce Fourierove obrazy $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, a tak integrály v (115) predstavujú skalárne súčiny dvojíc funkcií f, $\bar{\widehat{g}}$ a $\widehat{f}$, $\bar{g}$. Formulu (115) môžeme teda ekvivalentne zapísať v tvare

$$\langle f, \bar{\widehat{g}} \rangle = \left\langle \widehat{f}, \bar{g} \right\rangle \quad \text{pre každé dvojicu funkcií } f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \tag{116}$$

V samotnom dôkaze Vety 22 sa preto obmedzíme na ukázanie rovnosti (116).

Dôkaz Vety 22.

Uvažujme danú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a ich príslušné Fourierove obrazy $\widehat{f}, \widehat{g}$ definované v (100) v Definícii 7. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti funkcií definovaných v (91) v Leme 7 vzhľadom na funkcie f a g. Podľa (102) v dôkaze Vety 20 platia rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n} = \widehat{f}, \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n} = g, \tag{117}$$

kde $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\widehat{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sú odpovedajúce postupnosti Fourierových obrazov definovaných v (100). Keďže v súlade s (92) máme

Dôkaz Vety 22 (pokračovanie).

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

v kontexte Poznámky 18 podľa Vety 9 platí pre každú dvojicu funkcií f_m a g_n, $m, n \in \mathbb{N}$, rovnosť (33), t.j., máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\, \widehat{g_n}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_m}(x)\, g_n(x)\, \mathrm{d}x$$

$\Updownarrow$ formula (116) v Poznámke 20 $\Updownarrow$

$$\left\langle f_m, \overline{\widehat{g_n}} \right\rangle = \left\langle \widehat{f_m}, \overline{g_n} \right\rangle \quad \text{pre každú dvojicu indexov } m, n \in \mathbb{N}. \tag{118}$$

Následne využijeme spojitosť skalárneho súčinu v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Postupnými výpočtami dostávame

$$\langle f, \bar{\widehat{g}} \rangle \overset{(117)}{=} \left\langle \lim_{m\to\infty} f_m \,, \lim_{n\to\infty} \overline{\widehat{g_n}} \right\rangle = \lim_{m,n\to\infty} \left\langle f_m, \overline{\widehat{g_n}} \right\rangle$$

$$\overset{(118)}{=} \lim_{m,n\to\infty} \left\langle \widehat{f_m}, \overline{g_n} \right\rangle = \left\langle \lim_{m\to\infty} \widehat{f_m}, \lim_{n\to\infty} \overline{g_n} \right\rangle \overset{(117)}{=} \left\langle \widehat{f}\,, \bar{g} \right\rangle.$$

Overili sme teda platnosť formuly (116) v Poznámke 20 a dôkaz je hotový. ∎

Nasledujúca tvrdenie má kľúčový význam pri skúmaní inverzie Fourierovej transformácie predstavenej v Definícii 7 na Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Lema 8

Pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ položme $g := \frac{1}{2\pi}\,\overline{\widehat{f}}$. Potom platí $f = \overline{\widehat{g}}$.

Dôkaz Lemy 8.

Predložený dôkaz je založený na technických výpočtoch a vhodnom použití identity (116) a Parsevalovej rovnosti (101). Zrejme $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Postupne máme

$$\left\| f - \overline{\widehat{g}} \right\|^2 = \left\langle f - \overline{\widehat{g}}, f - \overline{\widehat{g}} \right\rangle = \langle f, f \rangle + \left\langle \overline{\widehat{g}}, \overline{\widehat{g}} \right\rangle - \left\langle f, \overline{\widehat{g}} \right\rangle - \left\langle \overline{\widehat{g}}, f \right\rangle$$

$$= \|f\|^2 + \left\| \overline{\widehat{g}} \right\|^2 - \left\langle f, \overline{\widehat{g}} \right\rangle - \overline{\left\langle f, \overline{\widehat{g}} \right\rangle} \overset{(116)}{=} \|f\|^2 + \|\widehat{g}\|^2 - \left\langle \widehat{f}, \bar{g} \right\rangle - \overline{\left\langle \widehat{f}, \bar{g} \right\rangle}$$

$$\overset{(101)}{=} \|f\|^2 + 2\pi \|g\|^2 - \left\langle \widehat{f}, \bar{g} \right\rangle - \overline{\left\langle \widehat{f}, \bar{g} \right\rangle}. \tag{119}$$

Následným dosadením $g = \frac{1}{2\pi}\,\overline{\widehat{f}}$ do odvodenej rovnosti (119) máme

$$\left\| f - \overline{\widehat{g}} \right\|^2 \overset{(119)}{=} \|f\|^2 + 2\pi \left\| \frac{1}{2\pi}\,\overline{\widehat{f}} \right\|^2 - \left\langle \widehat{f}, \frac{1}{2\pi}\,\widehat{f} \right\rangle - \overline{\left\langle \widehat{f}, \frac{1}{2\pi}\,\widehat{f} \right\rangle}. \tag{120}$$

Dôkaz Lemy 8 (pokračovanie).

Úpravou pravej strany v (120) a použitím Parsevalovej rovnosti (101) získame

$$\left\| f - \overline{\widehat{g}} \right\|^2 \overset{(120)}{=} \|f\|^2 + \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{f} \right\|^2 - \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{f} \right\|^2 - \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{f} \right\|^2$$

$$= \|f\|^2 - \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{f} \right\|^2 \overset{(101)}{=} 0.$$

Podľa poslednej rovnosti teda platí $f = \overline{\widehat{g}}$ a dôkaz je kompletný. ∎

Dôsledok 5

Fourierova tranformácia $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ zavedená v Definícii 7 je lineárna bijekcia na Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Inými slovami, pre každé $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ existuje práve jedna funkcia $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ s vlastnosťou $f = \widehat{g}$.

Dôkaz Dôsledku 5.

Z Definície 7 a Vety 1 vyplýva, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ v (100) je lineárne zobrazenie. Parsevalova rovnosť (101) implikuje, že $\mathcal{F}$ je injektívne zobrazenie. Surjektívnosť zobrazenia $\mathcal{F}$ je priamym dôsledkom tvrdenia v Leme 8. Skutočne,

Dôkaz Dôsledku 5 (pokračovanie).

pre danú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ položme

$$h := \bar{f} \quad \text{a} \quad g := \frac{1}{2\pi}\,\overline{\widehat{h}}. \tag{121}$$

Zrejme funkcie $g, h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a podľa Lemy 8 (s voľbou $f := h$) potom platí

$$h \overset{(121)}{=} \overline{\widehat{g}}, \quad f \overset{(121)}{=} \bar{h}, \quad \text{a tak} \quad f = \widehat{g}\,. \tag{122}$$

Fourierova transformácia je teda surjektívne zobrazenie a funkcia g v (122) je vzhľadom na zvolenú funkciu f určená jednoznačne. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 21

Porovnaním Vety 14 a Poznámky 9 s Dôsledkom 5 je vidieť kvalitatívny rozdiel medzi Fourierovou transformáciou na priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a Fourierovou transformáciou na Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Kým Fourierova transformácia zavedená v Definícii 1 na priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je invertovateľná na maximálnom podpriestore $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ definovanom v (73), Fourierova transformácia predstavená v Definícii 7 na priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ má inverziu na celom $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Hlavnou príčinou tohto pozorovania je skutočnosť, že odpovedajúca norma na (Banachovom) priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nie je generovaná skalárnym súčinom.

V nasledujúcej vete sumarizujeme a kompletizujeme výsledky týkajúce sa invertovateľnosti Fourierovej transformácie na Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Veta 23 (Plancherelova)

Fourierova transformácia $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ v Definícii 7 je lineárne bijektívne zobrazenie. Presnejšie, pre každú funkciu $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ platí inverzná formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \quad \textit{pre skoro všetky } x \in \mathbb{R}, \tag{123}$$

kde $\widehat{f}$ je Fourierov obraz funkcie f definovaný v (100).

Dôkaz Vety 23.

Prvá časť tvrdenia je obsiahnutá v Dôsledku 5. Platnosť inverzného vzorca (123) vyplýva z Lemy 8. Konkrétne, ak pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ položíme $g := \frac{1}{2\pi}\overline{\widehat{f}}$, potom

$$f(x) = \overline{\widehat{g}}(x) \overset{(100)}{=} \overline{\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} g(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi} = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \bar{g}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi$$

pre skoro všetky $x \in \mathbb{R}$, t.j., platí formula (123). Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 22

Dodajme, že prvú časť Plancherelovej Vety 21 možno vďaka Parsevalovej rovnosti (101) ekvivalentne formulovať tak, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ je (lineárny) homeomorfizmus priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ na seba. Obzvlášť, zobrazenie $\tilde{\mathcal{F}} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ je následne izometrický izomorfizmus Hilbertovho priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ na seba.

Príklad 5

V tomto príklade nadviažeme na komentár v Poznámke 21 týkajúci sa existencie inverzie Fourierovej transformácie predstavenej v Definícii 1 na priestore $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}}, & |x| \le \mathrm{e}, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\ln|x|}, & |x| > \mathrm{e}. \end{cases} \tag{124}$$

Nie je ťažké overiť, že funkcia f v (124) je rovnomerne spojitá na $\mathbb{R}$ a platí $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, t.j., spĺňa vlastnosti Fourierovho obrazu vo Vete 8 a v Riemannovej–Lebesgueovej Leme 2. Napriek tomu sa dá ukázať, že neexistuje funkcia $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ s vlastnosťou $f = \widehat{g}$, t.j., funkcia f nie je Fourierovým obrazom žiadnej funkcie z priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ v zmysle definície v (4).

Obsah

Fourierova transformácia v $\mathbb{R}^n$

Koncept Fourierovej transformácie možno bez väčších komplikácií rozšíriť i do n-rozmerného (euklidovského) priestoru $\mathbb{R}^n$ pre danú dimenziu $n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade pracujeme s n-ticami $x := (x_1, \dots, x_n)$ reálnych čísiel a so skalárnymi funkciami f s n reálnymi premennými. Vo výrazoch sa objavuje skalárny súčin, resp. euklidovská norma n-tíc $x, y \in \mathbb{R}^n$, t.j.,

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, \qquad \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definujeme priestory funkcií

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \right\}, \tag{125}$$

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \right\}, \tag{126}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \lim_{\|x\|\to\infty} \left| x^k f^{(m)}(x) \right| = 0 \text{ pre } k, m \in \mathbb{N}_0^n \right\}. \tag{127}$$

Posledný priestor je odpovedajúci Schwartzov priestor a n-tice k, m sa nazývajú multiindexy. Pre $m = (m_1, \dots, m_n)$ a $k = (k_1, \dots, k_n)$ definujeme

$$x^k := x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \qquad f^{(m)}(x) := \frac{\partial^{|m|} f}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}(x), \qquad |m| := m_1 + \cdots + m_2.$$

Definícia 8 (Fourierova transformácia v $\mathbb{R}^n$)

Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ je daná funkcia. Funkcia $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definovaná predpisom

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \xi, x\rangle}\, \mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{128}$$

sa nazýva Fourierov obraz funkcie f. Priradenie $f \mapsto \widehat{f}$ sa označuje ako Fourierova transformácia, pričom píšeme $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Definícia 9 (Inverzná Fourierova transformácia v $\mathbb{R}^n$)

Nech $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ je daná funkcia. Funkcia $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definovaná predpisom

$$\check{f}(\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \zeta, x\rangle}\, \mathrm{d}x, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{129}$$

sa nazýva inverzný Fourierov obraz funkcie f. Priradenie $f \mapsto \check{f}$ sa označuje ako inverzná Fourierova transformácia, pričom píšeme $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

Fourierova transformácia, resp. inverzná Fourierova transformácia, v $\mathbb{R}^n$ spĺňa identické vlastnosti ako v $\mathbb{R}$ (dôkazy jednotlivých tvrdení sú taktiež analogické).

- Linearita Fourierovej transformácie

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathcal{F}(f) + \beta\,\mathcal{F}(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Fourierova transformácia zmeny mierky

$$\widehat{f^R}(\xi) = \frac{1}{|R|^n}\,\widehat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right) = \frac{1}{|R|^n}\,\left(\widehat{f}\right)^{\frac{1}{R}}(\xi), \quad R \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- Fourierova transformácia parciálnej derivácie

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}\,(\xi) = \mathrm{i}\xi_j\,\widehat{f}\,(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Fourierova transformácia parciálnej derivácie rádu $|m|$, $m \in \mathbb{N}_0^n$

$$\widehat{f^{(m)}}\,(\xi) = \mathrm{i}^{|m|}\xi^m\,\widehat{f}\,(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- Parciálna derivácia Fourierovej transformácie rádu $|m|$, $m \in \mathbb{N}_0^n$

$$\left(\widehat{f}\right)^{(m)}(\xi) = (-\mathrm{i})^{|m|}\,\widehat{g}\,(\xi), \quad g(x) := x^m f(x), \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n.$$

- Gaussova funkcia a jej Fourierova transformácia

$$G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}, \quad \widehat{G}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- Fourierova transformácia "per-partes":

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{g}\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Fourierova inverzná formula

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\xi,\,x-y\rangle}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

- Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a Fourierova transformácia

$\mathcal{F}$ je lineárna bijekcia na priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- Hilbertov priestor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ a Fourierova transformácia

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) = \widehat{f}\,(\xi) = \lim_{N\to\infty}\int_{\|x\|\le N} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}\mathrm{d}x, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),$$

Parsevalova rovnosť $\left\|\widehat{f}\right\| = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\|f\|, \quad f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),$

Plancherelova formula $\left\langle\widehat{f},\widehat{g}\right\rangle = (2\pi)^n\langle f,g\rangle, \quad f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n),$

$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}$ je lineárna izometria z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Obsah

Výpočet nevlastných integrálov I

Významnou aplikáciou teórie Fourierovej transformácie je možnosť efektívneho zisťovania hodnôt niektorých konvergentných nevlastných integrálov, pri ktorých klasické metódy výpočtu zlyhávajú. Uvedieme tri ilustračné príklady.

Príklad 6

V Leme 1 sme nepriamo našli Fourierov obraz Gaussovej funkcie G definovanej v (22). Konkrétne, v súlade s (23), resp. (38) v Príklade 3 sme odvodili identitu

$$\widehat{G}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \text{resp.} \quad \widehat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, G(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{130}$$

Podľa Definície 1 platí

$$\widehat{G}(\xi) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$\Downarrow \ (22), (130) \ \Downarrow$$

$$\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{131}$$

Využitím Eulerovho vzorca $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} = \cos \xi x - \mathrm{i} \sin \xi x$ nadobudne (131) tvar

Výpočet nevlastných integrálov II

Príklad 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cos \xi x \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{132}$$

Nech $a > 0$, $b \geq 0$ sú dané reálne konštanty. Substitúciou $x = \sqrt{2a}t$ a $\xi = \frac{b}{\sqrt{2a}}$ sa z identity (132) ľahko získa klasická integrálna formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0, \quad b \geq 0. \tag{133}$$

Príklad 7

V Príklade 2 sme našli Fourierov obraz funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a \in \mathbb{R}^+$, konkrétne

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{134}$$

Z riešenia Príkladu 2 vyplýva, že funkcia $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, t.j., f je absolútne integrovateľná a spojitá na $\mathbb{R}$ a $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, keďže

Výpočet nevlastných integrálov III

Príklad 7

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \overset{(134)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\xi^2} \mathrm{d}\xi = \left[2\mathrm{arctg}\frac{\xi}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi.$$

V súlade s Fourierovou vetou 14 o inverzii potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí identita

$$\mathrm{e}^{-a|x|} = f(x) \overset{(56)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi \overset{(134)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2+\xi^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi. \tag{135}$$

Napokon pomocou rovnosti $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} = \cos \xi x + \mathrm{i} \sin \xi x$ a zámenou premenných $\xi = t$ a $x = b$ vyplýva z (135) formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bt}{a^2+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{a} \mathrm{e}^{-ab} \quad \text{pre každé } a > 0 \text{ a } b \geq 0. \tag{136}$$

Príklad 8

V Príklade 1 sme skúmali funkciu f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases} \tag{137}$$

Výpočet nevlastných integrálov IV

Príklad 8

Jedná sa o funkciu absolútne integrovateľnú na $\mathbb{R}$. Naviac $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ako sa možno ľahko presvedčiť. V súlade s Vetou 18 je preto Fourierov obraz $\widehat{f}$ prvkom priestoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Keďže z Príkladu 1 vieme, že

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin\xi}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1, & \xi = 0, \end{cases} \tag{138}$$

podľa Parsevalovej rovnosti (85) platí identita

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin\xi}{\xi}\right|^2 \mathrm{d}\xi \overset{(138)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \overset{(85)}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \overset{(137)}{=} 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \,\mathrm{d}x,$$

z ktorej ihneď (po zámene $\xi = t$) vyplýva klasická integrálna formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \pi. \tag{139}$$

Na druhej strane, ako sme už komentovali v Príklade 1, funkcia $\widehat{f}$ nie je prvkom priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Podľa Plancherelovej Vety 21 však platí inverzný vzorec (105), t.j., máme identitu

Výpočet nevlastných integrálov V

Príklad 8

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \overset{(138)}{=} \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\sin\xi}{\xi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\sin\xi}{\xi} (\cos\xi x + \mathrm{i}\sin\xi x)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{n} \frac{\sin\xi}{\xi} \cos\xi x\, \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\xi\cos\xi x}{\xi}\, \mathrm{d}\xi \quad \text{pre skoro všetky } x \in \mathbb{R}. \tag{140}$$

Pomocou Cauchyho teórie komplexných krivkových integrálov sa dá ukázať

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\xi\cos\xi x}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1,1), \\ \frac{1}{4}, & x = \pm 1, \\ 0, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases} \tag{141}$$

Porovnaním (137) a (141) teda v súlade s Plancherelovou Vetou 21 skutočne rovnosť (140) platí skoro všade na $\mathbb{R}$, konkrétne, až na body $x = \pm 1$.

Rovnica vedenia tepla na priamke

V prednáške o Fourierových radoch sme ako motiváciu (a neskôr i ako aplikáciu preberanej teórie) študovali fyzikálny problém vedenia tepla v konečnej homogénnej tyči. Uvažujme teraz problém šírenia sa tepla v nekonečnej homogénnej tyči. Nech $u(x,t)$ označuje teplotu danej tyče v bode $x \in \mathbb{R}$ a v čase $t \in [0,\infty)$. Je zrejmé, že funkcia u spĺňa rovnakú lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu ako v prípade konečnej tyče, t.j., platí rovnica vedenia tepla

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad \text{na množine } \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{142}$$

kde kladná konštanta α je odpovedajúci súčiniteľ teplotnej vodivosti. V tomto prípade však máme k dispozícii len jednu okrajovú/začiatočnú podmienku tvaru

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{143}$$

kde f je daná funkcia reprezentujúca rozloženie teploty tyče v čase $t = 0$. Budeme predpokladať, že $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, t.j., $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Nech u je nejaké riešenie okrajovej úlohy (142)–(143), ktoré naviac spĺňa

(i) u, u_t, u_x a u_{xx} sú ako funkcie premennej x spojité a absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$ pre každú hodnotu $t \in (0,\infty)$,

(ii) $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t)$ pre každú hodnotu $t \in (0,\infty)$.

Predpoklady (i)–(ii) nám umožňujú pre dané riešenie u aplikovať na obidve strany rovnice (142) Fourierovu transformáciu, t.j., platí rovnosť

$$\widehat{u_t}\,(\xi,t) = \widehat{\alpha^2\,u_{xx}}\,(\xi,t) = \alpha^2\,\widehat{u_{xx}}\,(\xi,t) \quad \text{pre každé } [\xi,t] \in \mathbb{R}\times(0,\infty). \tag{144}$$

Keďže na $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ platia identity

$$\widehat{u_t}\,(\xi,t) \overset{(4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \widehat{u}_t(\xi,t),$$

$$\widehat{u_{xx}}\,(\xi,t) \overset{(18)}{=} (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\,\widehat{u}(\xi,t),$$

dosadením do (144) dostaneme formulu

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = -\alpha^2\xi^2\,\widehat{u}(\xi,t), \quad [\xi,t] \in \mathbb{R}\times(0,\infty). \tag{145}$$

Získali sme obyčajnú homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Jej riešením odvodíme pre Fourierov obraz $\widehat{u}$ rovnosť $\widehat{u}(\xi,t) = C\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\xi^2 t}$ pre každý bod $[\xi,t] \in \mathbb{R}\times[0,\infty)$, kde konštanta $C = \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}\,(\xi)$ v súlade s predpísanou okrajovou podmienkou (143). Dostávame teda vyjadrenie

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}\,(\xi)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\xi^2 t} \quad \text{pre každé } [\xi,t] \in \mathbb{R}\times(0,\infty). \tag{146}$$

Obzvlášť, funkcia $\widehat{u}(\cdot,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pre každú hodnotu $t \in (0,\infty)$, nakoľko

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi,t)|\,\mathrm{d}\xi \overset{(146)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\alpha^2\xi^2 t}\right|}_{\leq 1} \mathrm{d}\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Teda riešenie u ako funkcia premennej x je pre každé $t \in (0,\infty)$ prvkom priestoru $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. V ďalších úvahách využijeme nasledujúci pomocný výsledok.

Lema 9

Pre dané $a > 0$ je $g(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$ jedinou funkciou, pre ktorú $\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-a\xi^2}$.

Dôkaz Lemy 9.

Výsledok je priamym dôsledkom vlastností Gaussovej funkcie G v Leme 1 a Fourierovej transformácie $\mathcal{F}$ vo Vetách 1 a 2. ∎

Pre každú hodnotu $t \in (0,\infty)$ je potom vo svetle Lemy 9 (s voľbou $a := \alpha^2 t$)

$$g(x,t) := \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \text{ jediná funkcia spĺňajúca } \widehat{g}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\xi^2 t}. \quad (147)$$

Pomocou pozorovania (147) následne formula (146) nadobudne tvar

$$\widehat{u}(\xi,t) \overset{(146)}{=} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2\xi^2 t} \overset{(147)}{=} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi,t) \quad \text{pre každé } [\xi,t]\in\mathbb{R}\times(0,\infty). \tag{148}$$

Posledný súčin je však podľa Vety 12 pre každé $[x,t]\in(0,\infty)$ Fourierovým obrazom konvolúcie $(f*g)(x,t)$, t.j.,

$$\widehat{u}(\xi,t) \overset{(148)}{=} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi,t) \overset{(46)}{=} \widehat{f*g}\,(\xi,t), \quad [\xi,t]\in\mathbb{R}\times(0,\infty). \tag{149}$$

Z tvaru funkcie g a v súlade s Poznámkou 2 a Vetou 10 vyplýva, že konvolučný súčin $f*g$ je ako funkcia premennej x prvkom priestoru $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ pre každú hodnotu $t\in(0,\infty)$. To umožňuje spätne transformovať rovnosť (149) pomocou inverznej Fourierovej transformácie. Konkrétne, podľa Vety 15 platí

$$u(x,t) \overset{(68)}{=} \check{\widehat{u}}(\xi,t) \overset{(149)}{=} \check{\widehat{f*g}}\,(x,t) \overset{(68)}{=} (f*g)(x,t) \overset{(43)}{=} (g*f)(x,t) \tag{150}$$

pre $[x,t]\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Pre riešenie u sme teda odvodili explicitnú formulu

$$u(x,t) \overset{(150),(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y,t)\,f(y)\,\mathrm{d}y \overset{(147)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}}\,f(y)\,\mathrm{d}y \tag{151}$$

platiacu na celej otvorenej polrovine $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Poznamenajme, že funkcia g zavedená v (147) sa označuje ako Gaussovo–Weierstrassovo jadro. Nie je ťažké overiť, že g je riešením rovnice (142) (tzv. fundamentálne riešenie).

Poznámka 23

Je možné ukázať, že za predpokladu $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ funkcia u definovaná formulou (151) je skutočne riešením rovnice vedenia tepla (142) a zároveň spĺňa i všetky dodatočné predpoklady v (i)–(ii) (zaručujúce korektnosť metódy odvodenia vyjadrenia v (151)). Naviac, riešenie u dané v (151) spĺňa i predpísanú okrajovú podmienku v (143). Konkrétne, pre každé dané $x_0 \in \mathbb{R}$ platí relácia

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0+)} u(x,t) \overset{(151)}{=} \lim_{(x,t)\to(x_0,0+)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x_0).$$

Dôkaz centrálnej limitnej vety

V tejto časti ukážeme aplikácie Fourierovej transformácie v štatistike, konkrétne pri dôkaze centrálnej limitnej vety. Pripomeňme niektoré základné pojmy. Nech X je spojitá náhodná veličina s hustotou pravdepodobnosti f. Číslo

$$M_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{152}$$

sa nazýva k-tý centrálny moment náhodnej veličiny X.

Poznámka 24

Pomocou centrálnych momentov M_k možno efektívne vyjadrovať niektoré z číselných charakteristík náhodnej veličiny X. Poznamenajme, že z definície hustoty pravdepodobnosti f platí $M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Naviac, ak funkcie $xf(x)$ a $x^2 f(x)$ sú absolútne integrovateľné na $\mathbb{R}$, potom

- stredná hodnota $E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = M_1$,
- rozptyl $D(X) := E\left([X - E(X)]^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x = M_2 - M_1^2$.

Lema 10

Nech pre dané $k \in \mathbb{N}_0$ je funkcia $x^k f(x)$ absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. Potom Fourierov obraz $\widehat{f}$ má k-tú deriváciu na $\mathbb{R}$ a platí $\widehat{f}^{(k)}(0) = (-\mathrm{i})^k M_k$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Dôkaz Lemy 10.

Tvrdenie vyplýva z Vety 7 o derivácii Fourierovho obrazu a z formuly (152). ∎

Lema 11

Nech X je spojitá náhodná veličina s hustotou pravdepodobnosti f. Pre dané $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uvažujme spojitú náhodnú veličinu $Y = aX$ s príslušnou hustotou pravdepodobnosti g. Potom pre každé $y \in \mathbb{R}$ platí identita

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y}{a}\right). \tag{153}$$

Lema 12

Nech X a Y sú dve nezávislé spojité náhodné veličiny s hustotami pravdepodobnosti f_X a f_Y. Potom hustota pravdepodobnosti g_Z náhodnej veličiny $Z = X + Y$ je daná konvolúciou $f_X * f_Y$, t.j., pre každé $z \in \mathbb{R}$ platí formula

$$g_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{154}$$

Veta 24 (Lindebergova–Lévyho centrálna limitná)

Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených spojitých náhodných veličín s hustotou pravdepodobnosti f ohraničenou na $\mathbb{R}$ a spĺňajúcou $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Nech $E := E(X_n) = 0$ a $D := D(X_n) = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Definujme náhodnú veličinu

$$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}. \tag{155}$$

Potom pre $n \to \infty$ sa hustota pravdepodobnosti g_n náhodnej veličiny Y_n blíži na $\mathbb{R}$ k hustote pravdepodobnosti štandardizovaného normálneho rozdelenia. Inými slovami, pre každé $y \in \mathbb{R}$ platí limitná podmienka

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{156}$$

Dôkaz Vety 24.

Zvoľme pevne nejaké $n \in \mathbb{N}$. Podľa predpokladov vety má každá z náhodných veličín $\frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $k = 1, \ldots, n$, rovnakú hustotu pravdepodobnosti f_n, pre ktorú v súlade s Lemou 11 (s voľbou $a := \frac{1}{\sqrt{n}}$) a s označením Vety 2 platí

$$f_n(y) \overset{(153)}{=} \sqrt{n}\, f(\sqrt{n} y) = \sqrt{n}\, f^{\sqrt{n}}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{157}$$

Dôkaz Vety 24 (pokračovanie).

Fourierov obraz funkcie f_n má potom podľa Vety 2 tvar

$$\widehat{f_n}(\xi) \overset{(157),(5)}{=} \sqrt{n}\,\widehat{f\sqrt{n}}(\xi) \overset{(6)}{=} \sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{158}$$

Následne pre hustotu pravdepodobnosti g_n náhodnej veličiny Y_n definovanej v (155) a jej Fourierov obraz $\widehat{g_n}$ podľa Lemy 12 a Vety 12 dostávame

$$g_n(y) \overset{(155),(154)}{=} (\underbrace{f_n * \cdots * f_n}_{n-\text{krát}})(y), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{159}$$

$$\widehat{g_n}(\xi) \overset{(159),(46)}{=} \underbrace{\widehat{f_n}(\xi)\cdots\widehat{f_n}(\xi)}_{n-\text{krát}} = \left[\widehat{f_n}(\xi)\right]^n \overset{(158)}{=} \left[\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{160}$$

Z predpokladov vety vyplýva, že pre každé $n \geq 2$ funkcia $g_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, t.j., $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $\widehat{g_n} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ v zhode s (73). Ďalej funkcia $\widehat{f}$ je dvakrát spojito diferencovateľná na celom $\mathbb{R}$, a tak na okolí bodu 0 platí rovnosť

$$\widehat{f}(t) = \widehat{f}(0) + \left(\widehat{f}\right)'(0)\,t + \frac{1}{2}\left(\widehat{f}\right)''(0)\,t^2 + R(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{161}$$

$$\text{kde funkcia } R \text{ spĺňa podmienku } \lim_{t\to 0}\frac{R(t)}{t^2} = 0. \tag{162}$$

Dôkaz Vety 24 (pokračovanie).

Pre hodnoty $\widehat{f}(0)$, $\left(\widehat{f}\right)'(0)$ a $\left(\widehat{f}\right)''(0)$ pomocou Lemy 10 a Poznámky 24 platí

$$\widehat{f}(0) = (-\mathrm{i})^0 M_0 = M_0 = 1, \qquad \left(\widehat{f}\right)'(0) = (-\mathrm{i})^1 M_1 = \mathrm{i}M_1 = \mathrm{i}E = 0,$$

$$\left(\widehat{f}\right)''(0) = (-\mathrm{i})^2 M_2 = -M_2 = -D - M_1^2 = -1, \tag{163}$$

čo následne pre funkciu $\widehat{f}$ v súlade s identitou (161) implikuje vyjadrenie

$$\widehat{f}(t) \overset{(161),(163)}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + R(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{164}$$

Kombináciou formúl (160) a (164) dostávame rovnosť

$$\widehat{g_n}(\xi) \overset{(160)}{=} \left[\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \overset{(164)}{=} \left[1 - \frac{\xi^2}{2n} + R\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{165}$$

Nie je ťažké ukázať, že vďaka podmienke (162) a vlastnosti Gaussovej funkcie G v Leme 1 dostávame pre $n \to \infty$ v poslednej identite reláciu

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}(\xi) \overset{(165)}{=} \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\xi^2}{2n} + R\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \overset{(162)}{=} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \overset{(23)}{=} \widehat{G}(\xi) \tag{166}$$

pre každé $\xi \in \mathbb{R}$. Keďže $g_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ pre $n \geq 2$, aplikáciou Fourierovej inverznej

Dôkaz Vety 24 (pokračovanie).

formuly vo Vete 14 postupne máme

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) \overset{(56)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g_n}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi y} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}(\xi)\Big]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi y} \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{(166)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi y} \mathrm{d}\xi \overset{(56)}{=} G(y) \overset{(22)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}. \qquad (167)$$

Poznamenajme, že zámena limitovania a integrovania v uvedenom výpočte je korektná, pretože funkcia $\widehat{g_n}$ je absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Rovnosť (167) teda ukazuje, že hustota pravdepodobnosti g_n náhodnej veličiny Y_n skutočne bodovo konverguje na celom $\mathbb{R}$ k hustote štandardizovaného normálneho rozdelenia. Napokon ako dôsledok dostávame formulu (156), t.j.,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{y} g_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} \Big[\lim_{n\to\infty} g_n(x)\Big]\, \mathrm{d}x$$

$$\overset{(167)}{=} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

pre každé $y \in \mathbb{R}$. Zámena limity a integrálu vo výpočte je opäť korektná, nakoľko $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Dôkaz je teda kompletný. $\blacksquare$

Obsah

Fyzikálne motivácie

Objavenie základov diferenciálneho a integrálneho počtu v 17. storočí Newtonom a Leibnizom a následné postupné rozvíjanie teórie reálnych a komplexných funkcií spôsobilo masívny rozmach prírodných vied a tzv. technickú a neskôr i priemyselnú revolúciu. Obzvlášť, teória obyčajných, a hlavne parciálnych diferenciálnych rovníc sa ukázala ako prirodzený a vhodný nástroj na popis fyzikálnej reality sveta. V klasickej, nekvantovej fyzike (v jej nerelativistickej i relativistickej verzii) zohráva kľúčovú úlohu pojem "klasickej" funkcie – integrovateľnej, spojitej, diferencovateľnej, ... – ako zobrazenia medzi podmnožinami reálnych, resp. komplexných čísiel. Takýto prístup má mnoho výhod a vo väčšine prípadov poskytuje výsledky v uspokojivej zhode s experimentálnou skúsenosťou. Avšak pri popise niektorých fyzikálnych javov sa prílišná matematická idealizácia ukázala v príkrom rozpore so skutočnosťou. Tento vývoj udalostí, výrazne podnietený hlbším skúmaním prírody, si preto vynútil isté prehodnotenie a rozšírenie pojmu klasickej funkcie a následné zavedenie tzv. zovšeobecnenej funkcie alebo distribúcie. Najvýznamnejšie osobnosti, spojené s týmto prelomom, sú britský teoretický fyzik Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984), sovietsky matematik Sergej Ľvovič Sobolev (1908 – 1989) a už v tejto prednáške spomínaný francúzsky matematik Laurent Schwartz. Uvedieme dva jednoduché ilustračné príklady.

Príklad 9 (Hustota hmoty v jednom bode)

Jedna zo základných odvodených fyzikálnych veličín je hustota hmoty. Budeme uvažovať jednorozmernú situáciu. Ak $U_r := [-r, r]$, $r > 0$, je hmotná úsečka s hmotnosťou m, jej priemerná (stredná) hustota $\bar{\varrho}$ je definovaná $\bar{\varrho} := \frac{m}{2r}$, a tak $m = 2\bar{\varrho}\, r$. Reálnejší a presnejší fyzikálny model predpokladá hustotu $\varrho(x)$ úsečky ako integrovateľnú funkciu polohy $x \in \mathbb{R}$. V tomto koncepte je hmotnosť, resp. hmota spojito rozložená pozdĺž celej úsečky U_r, pričom platí

$$\varrho(x) \equiv 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \setminus U_r \quad \text{a} \quad m = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \varrho(x)\,\mathrm{d}x.$$

V podobnom duchu chceme teraz nejako prijateľne popísať hustotu ϱ hmotného bodu, t.j., matematickej abstrakcie, kedy je konečná kladná hmotnosť m sústredená do jedného bezrozmerného bodu P. Pre jednoduchosť predpokladajme, nech $m = 1$ a $P = 0$. Takže stále

$$\text{má platiť} \quad 1 = m = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{ale teraz} \quad \varrho(x) \equiv 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \setminus \{P\}.$$

Funkcia ϱ je skoro všade nulová na $\mathbb{R}$, a preto integrál $m = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = 0$, čo je však spor s $m = 1$. Skúsme preto ísť na vec trochu inak. Pre dané $r > 0$ uvažujme hmotnú úsečku U_r, avšak ktorej celková hmotnosť m je sústredená do bodu P. Potom priemerná hustota $\bar{\varrho}_r$ hmotného bodu P vzhľadom na U_r je

Príklad 9 (Hustota hmoty v jednom bode)

$$\bar{\varrho}_r(x) \equiv 0 \quad \text{pre } |x| > r, \quad \text{a} \quad \bar{\varrho}_r(x) \equiv \frac{m}{2r} = \frac{1}{2r} \quad \text{pre } |x| \leq r. \tag{168}$$

Okrem toho pre každú hodnotu $r > 0$ spĺňa funkcia $\bar{\varrho}_r(x)$ tú správnu reláciu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varrho}_r(x)\,\mathrm{d}x \overset{(168)}{=} \frac{m}{2r}\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x = \frac{m}{2r}\,2r = m = 1.$$

Intuitívne teda očakávame, že hľadaná hustota ϱ hmotného bodu P bude určená limitnou funkciou $\lim_{r\to 0+}\bar{\varrho}_r(x)$. Avšak nie je ťažké sa presvedčiť, že $\lim_{r\to 0+}\bar{\varrho}_r(x) = 0$ pre každé $x \neq 0$ a $\lim_{r\to 0+}\bar{\varrho}_r(0) = \lim_{r\to 0+}\frac{1}{2r} = \infty$, čo opäť nie je (fyzikálne) prijateľný model hustoty hmotného bodu. V tomto momente mal kľúčový nápad Sobolev, ktorý navrhol skúmať všeobecnejšiu limitu

$$\lim_{r\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varrho}_r(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde φ je funkcia spojitá na $\mathbb{R}$. Jednoduchý výpočet ukazuje, že

$$\lim_{r\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varrho}_r(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \overset{(168)}{=} \lim_{r\to 0+}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \tag{169}$$

pre každé $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Limita v (169) teda určuje istý (lineárny) funkcionál, ktorý každej funkcii φ z priestoru $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ priraďuje hodnotu $\varphi(0)$. Na návrh Diraca sa

Príklad 9 (Hustota hmoty v jednom bode)

tento funkcionál štandardne označuje δ a používa sa tzv. bra-ket symbolika

$$\langle \delta \,|\, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \text{resp.} \quad \langle \delta, \, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}). \tag{170}$$

Podľa (169) možno pôsobenie funkcionálu δ v (170) intuitívne vyjadriť v tvare

$$\langle \delta \,|\, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \tag{171}$$

kde objekt δ sa často populárne označuje ako tzv. Diracova delta-funkcia, hoci sa nejedná o klasickú funkciu. Nepriamo však, t.j., svojimi prejavmi a pôsobením v kontexte iných matematických objektov, reprezentuje ten správny, fyzikálne prijateľný model hustoty ϱ hmotného bodu $P = 0$ s hmotnosťou $m = 1$. Pre funkcionál δ sa používa vhodnejšie pomenovanie (Diracova) distribúcia, resp. (Diracova) zovšeobecnená funkcia. Napokon doplňme, že analogicky sa dá reprezentovať i hustota hmotného bodu $P = x_0$ s $m = 1$. Odpovedajúca Diracova distribúcia sa označuje symbolom δ_{x_0} a jej pôsobenie ako lineárneho funkcionálu na priestore $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ je dané rovnosťou

$$\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi \rangle := \varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{x_0}(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}). \tag{172}$$

V tomto označení potom $\delta = \delta_0$ a kombináciou (170) a (172) dostávame identitu

$$\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta_0 \,|\, \varphi_{-x_0} \rangle = \langle \delta \,|\, \varphi_{-x_0} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}). \tag{173}$$

Príklad 10 (Hustota náboja elektrického dipólu)

Pod pojmom elektrický dipól rozumieme dvojicu oddelených, rovnako veľkých bodových elektrických nábojov s opačnými znamienkami. Významným parametrom takejto sústavy je moment elektrického dipólu. Budeme opäť uvažovať jednorozmernú situáciu. Nech $q \in \mathbb{R}^+$ označuje absolútnu hodnotu jednotlivých nábojov daného dipólu, t.j., q je hodnota kladného náboja a $-q$ je hodnota záporného náboja. Ak d je orientovaná vzdialenosť oboch nábojov, meraná od záporného ku kladnému náboju, potom číslo

$$p := qd \tag{174}$$

sa nazýva moment elektrického dipólu. V ideálnom (matematickom) dipóle je vzdialenosť $d \to 0$, avšak pre konečný a nenulový moment p. Pre jednoduchosť umiestnime záporný náboj do bodu $P^- = 0$ a kladný náboj do bodu $P^+ = \varepsilon$ pre dané $\varepsilon > 0$. Chceme fyzikálne prijateľne popísať hustotu ϱ rozloženia elektrického náboja tohto reálneho dipólu vzhľadom na celé $\mathbb{R}$, a následne prejsť k ideálnemu prípadu $\varepsilon \to 0^+$. Podľa predchádzajúceho Príkladu 9 hustota záporného bodového náboja je vyjadrená distribúciou $-q\delta_0 = -q\delta$, kým hustota kladného náboja je daná ako $q\delta_\varepsilon$. Celková hustota elektrického náboja daného dipólu sa teda dá formálne reprezentovať pôsobením lineárneho funkcionálu

$$\eta_\varepsilon := -q\delta + q\delta_\varepsilon \overset{(174)}{=} p\,\frac{\delta_\varepsilon - \delta}{\varepsilon}, \quad \text{t.j.,} \quad \langle \eta_\varepsilon \,|\, \varphi \rangle := p\,\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}, \tag{175}$$

Príklad 10 (Hustota náboja elektrického dipólu)

pre každú funkciu $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Obzvlášť, ak sa obmedzíme iba na funkcie φ spojito diferencovateľné na $\mathbb{R}$, t.j., iba na podpriestor $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$, limitovaním druhej identity v (175) pre $\varepsilon \to 0^+$ dostávame

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \langle \eta_\varepsilon \,|\, \varphi \rangle \overset{(175)}{=} p \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} = p\,\varphi'(0), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \tag{176}$$

Hustotu náboja ideálneho elektrického dipólu s momentom p možno teda podľa relácie v (176) reprezentovať istým lineárnym funkcionálom η, ktorý každej funkcii $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ priraďuje hodnotu $p\,\varphi'(0)$, t.j.,

$$\langle \eta \,|\, \varphi \rangle := p\,\varphi'(0), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \tag{177}$$

Z formúl (177) a (170) ihneď vyplýva, že pôsobenie distribúcie η na priestore $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ možno vyjadriť pomocou Diracovej distribúcie δ, konkrétne

$$\langle \eta \,|\, \varphi \rangle = \langle p\delta \,|\, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \tag{178}$$

Nakoniec len pre zaujímavosť poznamenajme, že distribúciu η v (177) možno veľmi formálne stotožniť so záporne vzatou prvou deriváciou Diracovej delta-funkcie δ zavedenej v identite (171). Presnejšie, ak položíme

$$\langle \eta \,|\, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad \text{potom} \quad \eta(x) = -p\,\delta'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Priestor testovacích funkcií

V nasledujúcom výklade sa pokúsime korektnejšie definovať objekty δ a η, diskutované v predchádzajúcich dvoch príkladoch, a zasadiť ich do širšieho rámca ucelenej matematickej teórie. Zavedieme niekoľko nových potrebných pojmov. Nech f je komplexná funkcia definovaná na celom $\mathbb{R}$. Množinu bodov

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \neq 0\}} \tag{179}$$

budeme nazývať nosičom funkcie f. Jedná sa o uzáver množiny bodov $x \in \mathbb{R}$, v ktorých je $f(x) \neq 0$, vzhľadom na štandardnú, t.j., euklidovskú, metriku na $\mathbb{R}$. Z (179) ihneď vyplýva, že funkcia $f(x) \equiv 0$ na množine $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} f$.

Definícia 10 (Priestor testovacích funkcií)

Uvažujme množinu komplexných funkcií $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovanú

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je množina kompaktná v } \mathbb{R}\}\,. \tag{180}$$

Funkcie $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sa označujú ako testovacie funkcie na $\mathbb{R}$ a množinu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ budeme nazývať priestor testovacích funkcií na $\mathbb{R}$.

Niektorá literatúra používa pre množinu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pomenovanie priestor hladkých funkcií s kompaktným nosičom a symboliku $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$.

Príklad 11

Množina $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ v (180) je neprázdna, nakoľko napríklad

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

je testovacia funkcia na $\mathbb{R}$, ako sa možno presvedčiť priamym výpočtom.

Poznámka 25

Z ohraničenosti kompaktných podmnožín v $\mathbb{R}$ vyplýva významné pozorovanie o priestore testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Konkrétne, pre každú funkciu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\text{existuje } R > 0 \text{ tak, že } \varphi(x) = 0 \text{ pre každé } |x| \geq R. \tag{181}$$

To následne ukazuje, že každá testovacia funkcia $\varphi(x)$ je ohraničená a absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$. Dá dokázať, že pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sú i všetky jej derivácie $\varphi^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, testovacie funkcie na $\mathbb{R}$. Z pohľadu funkcionálnej analýzy je množina $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ normovaný lineárny priestor nad telesom $\mathbb{C}$. Príkladom vhodnej normy na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ je štandardná suprémová norma, t.j.,

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{182}$$

ako sa možno v súlade s vyššie uvedenými poznatkami ľahko presvedčiť.

Poznámka 26

Popri norme v (182) je možné na priestore testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ zaviesť i ďalšie typy noriem. Konkrétne sa jedná o súbor zobrazení

$$p_m(\varphi) := \max_{0\le k\le m} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_\infty, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{183}$$

Spočítateľný systém noriem v (183) potom umožňuje vytvoriť na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lokálne konvexnú topológiu, a následne tak množinu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ chápať ako lokálne konvexný topologický lineárny priestor. Je dôležité poznamenať, že táto topológia nie je indukovaná žiadnou jedinou normou na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

V nasledujúcej definícii zavedieme špeciálny typ konvergencie v priestore testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ktorý je obzvlášť kľúčový pri zavádzaní pojmu distribúcie.

Definícia 11 (Konvergencia v priestore testovacích funkcií)

Nech $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť testovacích funkcií. Hovoríme, že postupnosť $\{\varphi_n(x)\}$ konverguje k funkcii $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ak

(i) existuje $R > 0$ tak, že $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq [-R, R]$ pre každé $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x)$ lokálne rovnomerne na $\mathbb{R}$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 27

Je nutné poznamenať, že konvergencia v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ zavedená v Definícii 11 je veľmi silná v tom zmysle, že nie je ekvivalentá s konvergenciu v žiadnej jedinej norme pôsobiacej na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dá sa však dokázať, že táto konvergencia je indukovaná práve topológiu predstavenou v Poznámke 26, t.j, topológiu vytvorenou systémom noriem p_m, $m \in \mathbb{N}_0$, v (183). Konkrétne platí, že postupnosť $\{\varphi_n(x)\}$ testovacích funkcí je podľa Definície 11 konvergentná v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s limitou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ práve vtedy, keď

(i) existuje $R > 0$ tak, že $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq [-R, R]$ pre každé $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} p_m(\varphi_n - \varphi) = 0$ pre každé $m \in \mathbb{N}_0$.

Dodajme, že v podmienke (ii) v Definícii 11 je vďaka vlastnostiam priestoru testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ v Poznámke 25 požiadavka lokálne rovnomernej konvergencie na $\mathbb{R}$ ekvivalentná priamo s rovnomernou konvergenciou na $\mathbb{R}$.

V ďalšom výklade budeme pracovať s lineárnymi funkcionálmi na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Z funkcionálnej analýzy pripomeňme, že pod pojmom lineárny funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ rozumieme každé lineárne zobrazenie $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, t.j.,

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\, T(\varphi) + \beta\, T(\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{184}$$

Obvzlášť významnú triedu predstavujú spojité lineárne funkcionály na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Definícia 12 (Spojitý lineárny funkcionál na priestore testovacích funkcií)

Nech $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ je lineárny funkcionál a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nejaká testovacia funkcia. Povieme, že lineárny funkcionál T je spojitý v $\varphi(x)$, ak pre každú postupnosť $\{\varphi_n(x)\}$ testovacích funkcií, ktorá konverguje v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ k funkcii $\varphi(x)$ (v zmysle Definície 11), platí, že odpovedajúca postupnosť $\{T(\varphi_n)\}$ komplexných čísiel konverguje v $\mathbb{C}$ s limitou $T(\varphi)$. Lineárny funkcionál T je spojitý na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ak je spojitý v každom prvku $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Poznámka 28

Z klasického výsledku lineárnej funkcionálnej analýzy vieme, že lineárny funkcionál $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ je spojitý na celom $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ práve vtedy, keď je spojitý v identicky nulovej funkci $\varphi(x) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$. Obzvlášť platí, že spojitosť lineárneho funkcionálu T na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ v zmysle Definície 12 je ekvivalentná s reláciou

pre každé $R > 0$ existuje $M > 0$ a index $m \in \mathbb{N}_0$ tak, že platí

$$|T(\varphi)| \leq M\, p_m(\varphi) \quad \text{pre každé } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ spĺňajúce } \operatorname{supp} \varphi \subseteq [-R, R], \tag{185}$$

kde $p_m(\varphi)$ je norma definovaná v (183). Napokon pripomeňme, že množina všetkých spojitých lineárnych funkcionálov T na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sa štandardne nazýva duálny priestor k priestoru $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a označuje sa symbolom $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Distribúcie

V tomto okamihu sme pripravení predstaviť koncept tzv. distribúcie, jedného z ústredných pojmov modernej matematickej analýzy. Toto pomenovanie zaviedol do matematiky zhruba v polovici 20. storočia francúzsky matematik Laurent Schwartz. V dnešnej dobe predstavujú distribúcie nevyhnutný nástroj teórie parciálnych diferenciálnych rovníc, modernej fyziky a mnohých inžinierskych odvetví.

Definícia 13 (Distribúcia)

Nech $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ je priestor testovacích funkcií predstavený v Definícii 10. Distribúciou na $\mathbb{R}$ rozumieme každý spojitý lineárny funkcionál T na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ v (184).

Poznámka 29

Podľa Definície 13 je teda priestor distribúcií na $\mathbb{R}$ totožný s prvkami duálneho priestoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zavedeného v Poznámke 28. Z tohto dôvodu budeme preto na zápis hodnoty distribúcie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ na testovacej funkcii $\varphi(x)$ namiesto označenia $T(\varphi)$ používať bra-ket symboliku predstavenú v (170), t.j.,

$$\langle T \,|\, \varphi \rangle := T(\varphi), \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{186}$$

Poznámka 30

V súlade s Poznámkou 28 každá distribúcia T na $\mathbb{R}$ – ako spojitý lineárny funkcionál na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – spĺňa vlastnosť (185). Obzvlášť, ak príslušná kladná konštanta M v (185) nezávisí na výbere čísla $R > 0$, distribúcia T sa označuje prívlastkom integrovateľná. Podobne, ak index m v (185) je možné zvoliť nezávisle na $R > 0$, hovoríme, že distribúcia T má konečný rád. Týmto rádom distribúcie T pritom rozumieme najmenší takýto index m.

V Poznámke 27 sme zdôraznili, že vlastnosť konvergencie nejakej postupnosti $\{\varphi_n(x)\}$ testovacích funkcií v priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ kladie podľa Definície 11 špecifické a v istom zmysle príliš silné a obmedzujúce podmienky na funkcie $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Z tohto pohľadu je preto len "málo" postupností $\{\varphi_n(x)\}$, ktoré konvergujú v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Na druhej strane to však v súlade Definíciou 12 znamená, že existuje pomerne "veľa" spojitých lineárnych funkcionálov T na priestore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Priestor distribúcii na $\mathbb{R}$, t.j., duálny priestor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sa preto vyznačuje bohatosťou a veľkou variabilitou svojich prvkov. V tomto spočíva praktický význam konceptu distribúcie. Uvedieme teraz niekoľko príkladov konkrétnych distribúcií na $\mathbb{R}$.

Príklad 12 (Regulárna distribúcia)

Nech symbol $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ označuje priestor lokálne absolútne integrovateľných komplexných funkcií na $\mathbb{R}$, t.j., funkcií, ktoré sú absolútne integrovateľné na každej kompaktnej podmnožine v $\mathbb{R}$. Jedná sa o širokú triedu funkcií, omnoho väčšiu než priestor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (zrejme platí inklúzia $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$). Pre každú danú funkciu $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je zobrazenie T_f definované predpisom

$$\langle T_f \,|\, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{187}$$

distribúcia na $\mathbb{R}$, ako sa možno ľahko presvedčiť pomocou základných vlastností integrálov a Definícií 13 a 12. Distribúciu T_f v (187) označujeme prívlastkom regulárna. V súlade s Poznámkou 28 teda funkcionál T_f spĺňa podmienku (185). Skutočne, nech $R > 0$ je dané. Potom pre každú testovaciu funkciu $\varphi(x)$ s nosičom $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$ platí

$$p_0(\varphi) \overset{(183)}{=} \|\varphi\|_\infty \overset{(182)}{=} \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \max_{x\in[-R,R]} |\varphi(x)| \geq |\varphi(x)| \tag{188}$$

pre každé $x \in [-R, R]$. Následne pre distribúciu T_f dostávame reláciu

$$|\langle T_f \,|\, \varphi \rangle| \overset{(187)}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{-R}^{R} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{-R}^{R} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$$

Príklad 12 (Regulárna distribúcia)

$$\overset{(188)}{\leq} \int_{-R}^{R} |f(x)|\, p_0(\varphi)\,\mathrm{d}x = p_0(\varphi) \underbrace{\int_{-R}^{R} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{:=M} = M\, p_0(\varphi) \tag{189}$$

pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ spĺňajúce $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$. Nakoľko hodnota konštanty M v (189) závisí na výbere intervalu $[-R, R]$, podľa Poznámky 30 funkcionál T_f nie je integrovateľnou distribúciou, avšak má konečný rád s hodnotou $m = 0$. Získaný výsledok ukazuje, že každej funkcii $f(x)$ lokálne absolútne integrovateľnej na $\mathbb{R}$ je možné prostredníctvom (187) priradiť distribúciu T_f rádu 0. Dá sa ukázať, že toto priradenie je injektívnym homomorfizmom lineárnych priestorov $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pričom pre $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ platí $T_f = T_g$ práve vtedy, keď $f(x) = g(x)$ skoro všade na $\mathbb{R}$. Priestor $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je teda možné formálne vnoriť do priestoru distribúcií $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a každú funkciu $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tak chápať ako distribúciu T_f na $\mathbb{R}$. V tomto kontexte preto niekedy (i keď nepresne) píšeme

$$\langle f \,|\, \varphi \rangle := \langle T_f \,|\, \varphi \rangle \quad \text{pre } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{190}$$

Napokon dodajme, že vyššie uvedený vzťah priestorov $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je formálnym zdôvodnením skutočnosti, že pre distribúcie na $\mathbb{R}$ sa niekedy používa aj pomenovanie zovšeobecnené funkcie.

Príklad 13 (Heavisideova distribúcia)

Konkrétnym a významným príkladom regulárnej distribúcie diskutovanej v Príklade 12 je tzv. Heavisideova distribúcia. V kontexte formuly (187) odpovedá Heavisideovej funkcii $H(x)$ definovanej v (34). Poznamenajme, že zrejme funkcia $H \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ako možno ľahko overiť. Podľa (34), (187), (190) potom

$$\langle H \,|\, \varphi \rangle \overset{(190)}{=} \langle T_H \,|\, \varphi \rangle \overset{(34),(187)}{=} \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{191}$$

Príklad 14 (Diracova distribúcia)

Významným príkladom neregulárnej distribúcie, ktorá má fundamentálne aplikácie v modernej fyzike, je tzv. Diracova distribúcia δ_{x_0}, definovaná pre dané $x_0 \in \mathbb{R}$ predpisom (porovnaj tiež s identitou (172) v Príklade 9)

$$\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi \rangle := \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{192}$$

Diracova distribúcia δ_{x_0} je pre každú hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ integrovateľnou distribúciou konečného rádu $m = 0$. Vyplýva to z Poznámky 30 a z výpočtu

$$|\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi \rangle| \overset{(192)}{=} |\varphi(x_0)| \overset{(188)}{\leq} p_0(\varphi) \quad \text{pre každé } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ a každé } x_0 \in \mathbb{R}. \tag{193}$$

Relácia (193) obzvlášť ukazuje, že v podmienke (185) v tomto prípade môžeme

Príklad 14 (Diracova distribúcia)

položiť $M = 1$ a $m = 0$ nezávisle na výbere čísla $R > 0$ i hodnoty $x_0 \in \mathbb{R}$. Ďalej poznamenajme, že Diracova distribúcia δ_{x_0} úzko súvisí s konceptom aproximácia identity, ktorý sme zaviedli v Definícii 3. Nech $\psi(x)$ je nejaká nezáporná funkcia absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, a nech $\mathcal{S}(\psi)$ je príslušná aproximácia identity pomocou funkcie $\psi(x)$ v (47). Zvoľme nejaké pevné $x_0 \in \mathbb{R}$. Keďže podľa Definície 10 a Poznámky 25 je každá testovacia funkcia $\varphi(x)$ spojitá a ohraničená na $\mathbb{R}$, v súlade s formulou (55) v Poznámke 4 platí (s označením $f := \varphi$ a $\varphi := \psi$)

$$\lim_{\eta \to 0+} (\psi_\eta * \varphi)(x_0) = \varphi(x_0), \qquad \psi_\eta \in \mathcal{S}(\psi), \tag{194}$$

pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Konvolučný súčin $(\psi_\eta * \varphi)(x_0)$ na ľavej strane rovnosti (194) sa však dá pre každé $\eta > 0$ postupne upraviť na tvar

$$\begin{aligned}(\psi_\eta * \varphi)(x_0) &\overset{(39)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\eta(x_0 - y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\eta,x_0}(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\ &\overset{(187)}{=} \langle T_{g_{\eta,x_0}} \,|\, \varphi\rangle, \quad \text{pre každú testovaciu funkciu } \varphi(x),\end{aligned} \tag{195}$$

kde funkcia $g_{\eta,x_0}(x) := \psi_\eta(x_0 - y)$, $x \in \mathbb{R}$ a $T_{g_{\eta,x_0}}$ je regulárna distribúcia na $\mathbb{R}$ z Príkladu 12, ktorá odpovedá funkcii $g_{\eta,x_0} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Kombináciou identít (192), (194) a (195) napokon získame finálnu rovnosť

Príklad 14 (Diracova distribúcia)

$$\lim_{\eta\to 0+} \langle T_{g_{\eta,x_0}} \,|\, \varphi\rangle \overset{(195),(194)}{=} \varphi(x_0) \overset{(192)}{=} \langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{196}$$

Z formuly (196) vyplýva, že systém regulárnych distribúcií $T_{g_{\eta,x_0}}$, $\eta > 0$, aproximuje pôsobenie (neregulárnej) Diracovej distribúcie δ_{x_0}. Z tohto pohľadu možno teda Diracovu distribúciu v istom zmysle aproximovať regulárnymi distribúciami. Vo funkcionálnej analýze existuje na pomenovanie tohto výsledku presný termín. Konkrétne, rovnosť (196) znamená, že systém distribúcií $T_{g_{\eta,x_0}}$, $\eta > 0$, konverguje pre $\eta \to 0^+$ $*$-slabo k distribúcii δ_{x_0}, pričom píšeme $T_{g_{\eta,x_0}} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{x_0}$ pre $\eta \to 0^+$. Napokon dodajme, že identita (196) čiastočne opodstatňuje intuitívnu integrálnu reprezentáciu pôsobenia Diracovej distribúcie δ_{x_0}, resp. formálne zavedenie Diracovej delta-funkcie $\delta_{x_0}(x)$ v (172) v Príklade 9.

Definícia 14 (Derivácia distribúcie)

Nech T je distribúcia na $\mathbb{R}$. Pod pojmom derivácia distribúcie T na $\mathbb{R}$ rozumieme funkcionál T' na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definovaný predpisom

$$\langle T' \,|\, \varphi\rangle := -\langle T \,|\, \varphi'\rangle \quad \text{pre každé } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{197}$$

pričom $\varphi'(x)$ je prvá derivácia testovacej funkcie $\varphi(x)$.

Poznámka 31

Funkcionál $T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ v Definícii 14 je zavedený korektne, nakoľko podľa Poznámky 25 je $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pre každú funkciu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Z linearity a spojitosti funkcionálu T a operátora derivovania na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vyplýva prostredníctvom identity (197), že T' je spojitý lineárny funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, t.j., $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Teda každá distribúcia T na $\mathbb{R}$ má svoju deriváciu T' ako distribúciu na $\mathbb{R}$. Motiváciou pre pomenovanie T' v (197) ako derivácie T je analógia s pravidlom per-partes na integráciu funkcií so spojitou deriváciou, ako ilustrujeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 15 (Derivácia regulárnej distribúcie)

Nech $f(x)$ je (komplexná) funkcia so spojitou deriváciou na $\mathbb{R}$, t.j., $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a nech T_f je odpovedajúca regulárna distribúcia na $\mathbb{R}$ definovaná v (187). V súlade s Definíciou 14 pre jej deriváciu $(T_f)'$ platí

$$\langle (T_f)' \,|\, \varphi \rangle \overset{(197)}{=} -\langle T_f \,|\, \varphi' \rangle \overset{(187)}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{198}$$

Vďaka skutočnosti, že každá testovacia funkcia $\varphi(x)$ má kompaktný nosič na $\mathbb{R}$, je integrál na pravej strane rovnosti (198) konvergentný pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Konkrétne, ak pre danú testovaciu funkciu $\varphi(x)$ máme $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-R, R]$, $R > 0$,

Príklad 15 (Derivácia regulárnej distribúcie)

potom i $\operatorname{supp}\varphi' \subseteq [-R, R]$ a pomocou integrácie per-partes dostávame

$$\langle (T_f)' \mid \varphi\rangle \overset{(198)}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-R}^{R} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{per-partes}}{=} -[f(x)\,\varphi(x)]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(187)}{=} f(-R)\,\underbrace{\varphi(-R)}_{0} - f(R)\,\underbrace{\varphi(R)}_{0} + \langle T_{f'} \mid \varphi\rangle = \langle T_{f'} \mid \varphi\rangle. \tag{199}$$

Rovnosť (199) zrejme platí pre každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, a tak podľa Definície 14 pre deriváciu distribúcie T_f máme identitu

$$(T_f)' = T_{f'} \quad \text{pre každé } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \tag{200}$$

Formula (200) teda poukazuje na to, že deriváciu distribúcií na $\mathbb{R}$ predstavenú v Definícii 14 možno interpretovať ako jedno z možných zovšeobecnení konceptu derivácie i pre funkcie, ktoré nie sú derivovateľné v klasickom zmysle. Tento fakt názorne demonštrujeme v nasledujúcom Príklade 16. Poznamenajme, že vzorec (200) zostáva v platnosti i pri slabších podmienkach na funkciu $f(x)$, konkrétne i pre funkcie $f, f' \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Obzvlášť, derivácia $(T_f)'$ je pre takéto funkcie $f(x)$ opäť regulárnou distribúciou konečného rádu $m = 0$, ako vyplýva z Príkladu 12.

Príklad 16 (Derivácia Heavisideovej distribúcie)

Regulárna Heavisideova distribúcia T_H zavedená v Príklade 13 síce má v súlade s Definíciou 14 deriváciu $(T_H)'$, avšak formula (200) v tomto prípade nemá zmysel, nakoľko Heavisideova funkcia $H(x)$ v (34) nemá štandardnú deriváciu v bode $x = 0$. Ukážeme však, že platí identita

$$(T_H)' = \delta_0, \tag{201}$$

kde δ_0 je Diracova distribúcia v (192) pre hodnotu $x_0 = 0$. Skutočne, pre každú testovaciu funkciu $\varphi(x)$ totiž postupne platí

$$\begin{aligned} \langle (T_H)' \,|\, \varphi \rangle &\overset{(197)}{=} -\langle T_H \,|\, \varphi' \rangle \overset{(191)}{=} -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) - \lim_{x\to\infty} \varphi(x) \\ &= \varphi(0) \overset{(192)}{=} \langle \delta_0 \,|\, \varphi \rangle, \end{aligned} \tag{202}$$

čo dokazuje správnosť formuly (201). Distribúcia $(T_H)'$ je teda v súlade s Príkladom 14 neregulárna a integrovateľná s konečným rádom $m = 0$. Dodajme, že identita (201) sa niekedy formálne zapisuje i v tvare $H'(x) = \delta_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde $\delta_0(x)$ je už zmienená Diracova-delta funkcia. Symbol $H'(x)$ sa potom interpretuje ako (formálna) derivácia Heavisideovej funkcie $H(x)$.

Príklad 17 (Derivácia Diracovej distribúcie)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je dané. Podľa Definície 14 pre deriváciu Diracovej distribúcie δ_{x_0} definovanej rovnosťou (192) v Príklade 14 platí

$$\langle (\delta_{x_0})' \,|\, \varphi \rangle \overset{(197)}{=} -\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi' \rangle \overset{(192)}{=} -\varphi'(x_0) \quad \text{pre každé } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{203}$$

V súlade s Poznámkou 30 a reláciou (185) je teda $(\delta_{x_0})'$ integrovateľná distribúcia konečného rádu $m = 1$, ako vyplýva z výpočtu

$$\left|\langle (\delta_{x_0})' \,|\, \varphi \rangle\right| \overset{(203)}{=} |\varphi'(x_0)| \overset{(182)}{\leq} \|\varphi'\|_\infty \overset{(183)}{\leq} p_1(\varphi), \tag{204}$$

platiacom pre každú testovaciu funkciu $\varphi(x)$. Poznamenajme, že odvodené výsledky dávajú korektný význam intuitívnym úvahám v motivačnom Príklade 10 o hustote náboja elektrického dipólu. Konkrétne, funkcionál η zavedený v (177) teda skutočne predstavuje záporne vzatú deriváciu Diracovej distribúcie δ_0.

Na záver tejto sekcie uvedieme jeden pomocný výsledok o testovacích funkciách.

Lema 13

Každá testovacia funkcia $\varphi(x)$ na $\mathbb{R}$ je i Schwartzovou funkciou na $\mathbb{R}$. Inými slovami, platí inklúzia $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, kde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je Schwartzov priestor na $\mathbb{R}$.

Distribúcie a Fourierova transformácia

V tejto sekcii sa pokúsime zaviesť pojem Fourierovej transformácie pre istú triedu distribúcií na $\mathbb{R}$. Predtým však vyslovíme jedno pomocné tvrdenie, ktoré je špeciálnym prípadom všeobecného klasického výsledku z funkcionálnej analýzy.

Lema 14

Každý spojitý lineárny funkcionál T na Schwartzovom priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je distribúciou na $\mathbb{R}$. Inými slovami, duálne priestory $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spĺňajú inklúziu

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{205}$$

Dôkaz Lemy 14.

K dôkazu poznamenajme len toľko, že konvergencia vo Schwartzovom priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa definuje podobne ako konvergencia v priestore testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Konkrétne, povieme, že postupnosť $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konverguje v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ k funkcii $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ak každá z postupností $\{x^l \varphi_n^{(k)}(x)\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, konverguje rovnomerne na $\mathbb{R}$ k funkcii $x^l \varphi^{(k)}(x)$. Vďaka výsledku v Leme 13 potom nie je ťažké ukázať, že každá postupnosť $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergentná v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, konverguje i v priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (s rovnakou limitou). Následne, každý spojitý lineárny funkcionál $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je spojitým lineárnym funkcionálom i na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ■

Definícia 15 (Temperovaná distribúcia)

Distribúcia na $\mathbb{R}$ z duálneho priestoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sa nazýva temperovaná distribúcia.

Práve priestor temperovaných distribúcií $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je tým vhodným pôsobiskom zovšeobecnenej Fourierovej, resp. inverznej Fourierovej transformácie.

Definícia 16 (Zovšeobecnená Fourierova transformácia)

Nech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je temperovaná distribúcia na $\mathbb{R}$. Funkcionál $\widehat{T}$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ daný

$$\langle \widehat{T} \,|\, \varphi \rangle := \langle T \,|\, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{206}$$

sa nazýva Fourierov obraz distribúcie T. Priradenie $T \mapsto \widehat{T}$ sa potom označuje ako zovšeobecnená Fourierova transformácia, pričom píšeme $\widehat{T} = \mathcal{F}(T)$.

Definícia 17 (Zovšeobecnená inverzná Fourierova transformácia)

Nech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je temperovaná distribúcia na $\mathbb{R}$. Funkcionál $\check{T}$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ daný

$$\langle \check{T} \,|\, \varphi \rangle := \langle T \,|\, \check{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{207}$$

sa nazýva inverzný Fourierov obraz distribúcie T. Priradenie $T \mapsto \check{T}$ sa označuje ako zovšeobecnená inverzná Fourierova transformácia a píšeme $\check{T} = \mathcal{F}^{-1}(T)$.

Poznámka 32

Zobrazenia $\widehat{T}$ a $\check{T}$ v (206) a (207) v Definíciách 16 a 17 sú zavedené korektne, pretože podľa Vety 16(ii) a identít v (65) v Poznámke 7 pre každú Schwartzovu funkciu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ platí $\widehat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ďalej sa dá dokázať, že Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ v (4) a inverzná Fourierova transformácia $\mathcal{F}^{-1}$ v (64) sú spojité lineárne bijekcie na Schwartzovom priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. V súlade so spojitosťou lineárneho funkcionálu T na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ potom dostávame, že funkcionály $\widehat{T}$ a $\check{T}$ sú temperované distribúcie na $\mathbb{R}$, t.j., $\widehat{T}, \check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Teda zovšeobecnená Fourierova transformácia $\mathcal{F}$ a zovšeobecnená inverzná Fourierova transformácia $\mathcal{F}^{-1}$ predstavené v Definíciách 16 a 17 zobrazujú duálny priestor $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ do seba. Obvzlášť, pre každú Schwartzovu funkciu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ platia rovnosti

$$\langle \check{\widehat{T}} \mid \varphi \rangle \overset{(207)}{=} \langle \widehat{T} \mid \check{\varphi} \rangle \overset{(206)}{=} \langle T \mid \widehat{\check{\varphi}} \rangle \overset{(68)}{=} \langle T \mid \varphi \rangle,$$

$$\langle \widehat{\check{T}} \mid \varphi \rangle \overset{(206)}{=} \langle \check{T} \mid \widehat{\varphi} \rangle \overset{(207)}{=} \langle T \mid \check{\widehat{\varphi}} \rangle \overset{(68)}{=} \langle T \mid \varphi \rangle,$$

ktoré ihneď implikujú formuly

$$\check{\widehat{T}} = T \quad \text{a} \quad \widehat{\check{T}} = T \qquad \text{pre každú temperovanú distribúciu } T \text{ na } \mathbb{R}. \tag{208}$$

Identity v (208) potom ukazujú, že zobrazenia $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ sú vzájomne inverzné bijekcie na priestore $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ temperovaných distribúcií na $\mathbb{R}$.

Príklad 18 (Fourierova transformácia regulárnej temperovanej distribúcie)

V Príklade 12 sme ukázali, že každej danej funkcii $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ vieme pomocou predpisu (187) priradiť tzv. regulárnu distribúciu T_f na $\mathbb{R}$. Funkcionál T_f pritom pôsobí na priestore testovacích funkcií $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dá sa ukázať, že v prípade funkcie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ je možné v súlade s Lemou 13 funkcionál $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ rozšíriť i na Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ so zachovaním predpisu (187). Inými slovami, zobrazenie T_f na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definované

$$\langle T_f \,|\, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{209}$$

je korektne zadaná temperovaná distribúcia na $\mathbb{R}$ a budeme ju označovať pojmom regulárna temperovaná distribúcia na $\mathbb{R}$ (odpovedajúca funkcii $f(x)$). Podľa Poznámky 32 preto existujú zovšeobecnené Fourierove obrazy $\widehat{T_f}$ a $\widetilde{T_f}$ ako temperované distribúcie na $\mathbb{R}$. Obzvlášť, ak naviac i Fourierov obraz $\widehat{f}\,(\xi)$ je funkcia absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, potom platia identity

$$\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}\,, \quad \widetilde{T_f} = T_{\widetilde{f}} \quad \text{pre každú funkciu } f(x) \text{ spĺňajúcu } f, \widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}). \tag{210}$$

Skutočne, každá Schwartzova funkcia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je podľa Vety 16(i) absolútne integrovateľná na $\mathbb{R}$, a tak využitím Vety 9 dostávame

Príklad 18 (Fourierova transformácia regulárnej temperovanej distribúcie)

$$\langle \widehat{T_f} \,|\, \varphi \rangle \overset{(206)}{=} \langle T_f \,|\, \widehat{\varphi} \rangle \overset{(209)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\, \mathrm{d}x \overset{(33)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \overset{(209)}{=} \langle T_{\widehat{f}} \,|\, \varphi \rangle$$

pre každé $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. To dokazuje platnosť prvej formuly v (210). Druhá rovnosť v (210) sa ukáže analogicky.

V podobnom prirodzenom duchu ako v Príklade 18 sa dá na Schwartzov priestor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rozšíriť i Diracova distribúcia δ_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$, predstavená v (192). Konkrétne,

$$\langle \delta_{x_0} \,|\, \varphi \rangle := \varphi(x_0) \quad \text{pre každé } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{211}$$

Nie je ťažké overiť, že funkcionál δ_{x_0} v (211) je pre každú hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ lineárny a spojitý na priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a je rozšírením Diracovej distribúcie v (192). Na jeho označenie budeme preto používať rovnaké pomenovanie Diracova (temperovaná) distribúcia na $\mathbb{R}$. Zavedieme teraz nasledujúcu symboliku. Výrazom $\mathbf{1}$ budeme označovať lineárny funkcionál pôsobiaci na priestore $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$\langle \mathbf{1} \,|\, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{212}$$

Funkcionál $\mathbf{1}$ je rovnosťou (212) definovaný korektne, nakoľko pre každú Schwartzovu funkciu $\varphi(x)$ platí $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ako vyplýva z Vety 16(i).

Veta 25 (Fourierov obraz Diracovej distribúcie)

Lineárny funkcionál $\mathbf{1}$ *definovaný v* (212) *je temperovaná distribúcia na* $\mathbb{R}$, *t.j.,* $\mathbf{1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Naviac, platia identity*

$$\widehat{\delta_0} = \mathbf{1} \quad a \quad \widehat{\mathbf{1}} = 2\pi\,\delta_0, \tag{213}$$

kde δ_0 *je Diracova distribúcia v* (211) *pre hodnotu* $x_0 = 0$.

Dôkaz Vety 25.

Pre každú funkciu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ postupne máme

$$\langle \mathbf{1} \,|\, \varphi \rangle \overset{(212)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0\cdot x}\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \widehat{\varphi}\,(0) \overset{(211)}{=} \langle \delta_0 \,|\, \widehat{\varphi} \rangle \overset{(206)}{=} \langle \widehat{\delta_0} \,|\, \varphi \rangle,$$

čo dokazuje platnosť prvej formuly v (213). Zároveň to v súlade s Poznámkou 32 znamená, že lineárny funkcionál $\mathbf{1}$ je temperovaná distribúcia na $\mathbb{R}$, keďže distribúcia $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Následne, podľa Definície 16 pre Fourierov obraz $\widehat{\mathbf{1}}$ platí

$$\langle \widehat{\mathbf{1}} \,|\, \varphi \rangle \overset{(206)}{=} \langle \mathbf{1} \,|\, \widehat{\varphi} \rangle \overset{(212)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}\,(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot 0}\,\mathrm{d}\xi \overset{(56)}{=} 2\pi\varphi(0) \overset{(211)}{=} \langle 2\pi\,\delta_0 \,|\, \varphi \rangle$$

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

pre každú Schwartzovu funkciu $\varphi(x)$. Teda $\widehat{\mathbf{1}} = 2\pi\,\delta_0$ a dôkaz je kompletný. ■

Veta 26 (Inverzný Fourierov obraz Diracovej distribúcie)

Temperované distribúcie δ_0 *a* $\mathbf{1}$ *v* (211) *a* (212) *spĺňajú rovnosti*

$$\check{\delta}_0 = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1} \quad a \quad \check{\mathbf{1}} = \delta_0. \tag{214}$$

Dôkaz Vety 26.

Identity v (214) získame kombináciou formúl v (213) a (208). Presnejšie, platí

$$\check{\delta}_0 \overset{(213)}{=} \widecheck{\frac{1}{2\pi}\widehat{\mathbf{1}}} = \frac{1}{2\pi}\check{\widehat{\mathbf{1}}} \overset{(208)}{=} \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}, \qquad \check{\mathbf{1}} \overset{(213)}{=} \check{\widehat{\delta_0}} \overset{(208)}{=} \delta_0.$$

Dôkaz je preto hotový. ■

Na záver poznamenajme, že zovšeobecnená Fourierova transformácia a zovšeobecnená inverzná Fourierova transformácia predstavené v Definíciách 16 a 17 spĺňajú analogické vlastnosti ako klasické transformácie $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ z Definícií 1 a 4. Viac o tom v nadväzujúcom predmete M8120 Spektrální analýza II.