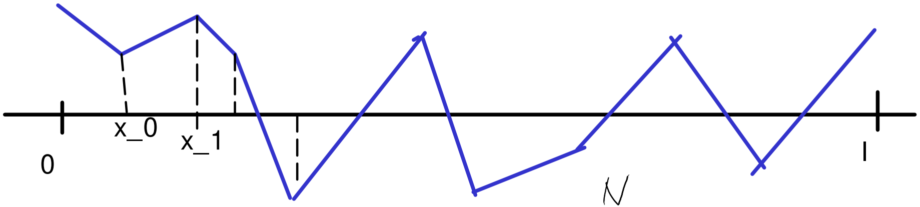
Metoda konečných prvků

U – přibližné řešení, lin. splajn – po částech lin. spojitá

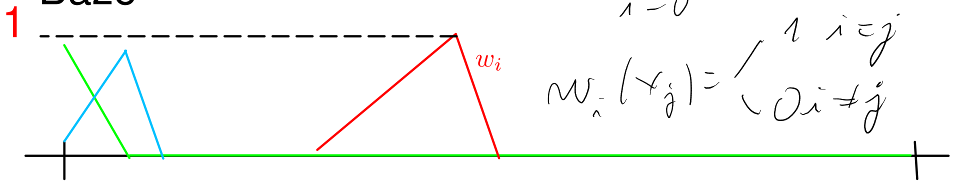


x_i, $i=0,\dots,N$ – uzly – zahrnují body, ve kterých jsou předepsány podmínky (diskr. část a(u,v), L(v))

$$U(x)=\sum_{i=0}^{N} U_i\, w_i(x)$$

$$w_i(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

Báze



Intervaly [x_{k-1},x_k] se nazývají konečné prvky (elementy).

Testovací funkce - také po částech lineární, spojité.

h - max. délka ze všech subintervalů [x_{k-1},x_k]

X_h - prostor lin. splajnů

Aproximace a(u,v) a L(v):

Nosič W_i je $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ pro $i>0$, $i<N$

$\int_0^l [pu'v' + guv]\,dx$ a $\int_0^l fv\,dx$ počítáme num. metodou pro body $x_0, \dots, x_N$

přibližná hodnota $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)\,dx$

$$\int_0^l \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} I^k(\varphi)$$

$\alpha_i = 0$ pro body, kde není předepsána podmínka

$$a(u,v) \approx a_h(U,v) = \sum_{k=1}^{N} I^k(pU'v' + guv) + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i U(x_i) v(x_i)$$

$$L(w) \approx L_h(w) = \sum_{k=1}^{N} I^k(fw) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i w(x_i)$$

Jako testovací funkce volíme bázové funkce w_i prostoru lin. splajnů.

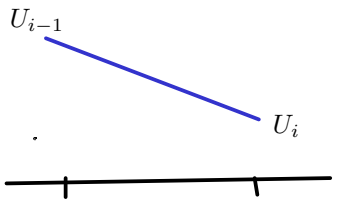
$h_i = x_i - x_{i-1}$

U na $[x_{i-1}, x_i]$: $U(x) = U_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + U_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$

$[x_i, x_{i+1}]$: $U(x) = U_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + U_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$

$w_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$ na $[x_{i-1}, x_i]$

$= \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}$ na $[x_i, x_{i+1}]$



$$U' = \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \mid w_i' = \frac{1}{h_i} \quad \text{na } [x_{i-1}, x_i]$$

$$U' = \frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} \mid w_i = -\frac{1}{h_{i+1}} \quad \text{na } [x_i, x_{i+1}]$$

Aproximace integrálů:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho U' v' dx \approx I^k(\rho U' v') = I^k(\rho U' w_i')$$

Obdélníkové pravidlo: $\rho_{i-1/2} = \rho\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$

$$I^k(\rho U' w_i') = \rho_{i-1/2} \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \cdot \frac{1}{h_i} h_i = \rho_{i-1/2} \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}$$

Lichob. pravidlo

$$I^k(\rho U' w_i') = \frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} \cdot \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} q U w_i \, dx \approx I^k(q U w_i)$$

Obd. prav.: $I^k(q U w_i) = q_{i-1/2} \frac{U_{i-1} + U_i}{2} \cdot \frac{1}{2} h_i = q_{i-1/2} h_i \frac{U_{i-1} + U_i}{4}$

Lich. prav: $I^k(q U w_i) = \frac{1}{2}\left[q_{i-1} U_{i-1} \cdot 0 + q_i U_i \cdot 1\right] h_i = \frac{1}{2} h_i q_i U_i$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cdot w_i \, dx \simeq \underline{I}^k(f w_i)$$

Obd. pravidlo: $\underline{I}^k(f w_i) = f_{i-1/2} \frac{h_i}{2}$

Lich. — " — $\underline{I}^k(f w_i) = \frac{1}{2} h_i f_i$

Doporučení:

pro $\underline{I}^k(pU'w_i')$ – obd. pravidlo

$\underline{I}^k(qUw)$ a $\underline{I}^k(f w_i)$ – lich. pravidlo

Výpočet pro $v = w_i$ – je nenulová na $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}]$

Náhrada rovnice:

$$I^i(p v'_{w_i}) + I^i(q v_{w_i}) + I^{i+1}(p v'_{w_i}) + I^{i+1}(q v_{w_i}) + d_i v_i =$$

$$= I^i(f_{w_i}) + I^{i+1}(f_{w_i}) + b_i$$

Výsledná soustava rovnic

$$p_{i-1/2}\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} + p_{i+1/2}\frac{v_i - v_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{1}{2}\left[h_i q_i + h_{i+1} q_{i+1}\right] v_i + \alpha_i v_i = \frac{1}{2} f_i \left[h_i + h_{i+1}\right] + \beta_i$$

pro $i = 1, \dots, N-1$

$i = 0$: $p_{1/2}\frac{v_0 - v_1}{h_1} + \frac{1}{2} h_1 q_0 v_0 + \alpha_0 v_0 = \frac{1}{2} h_1 f_0 + \beta_0$

$i = N$: $p_{N-1/2}\frac{v_N - v_{N-1}}{h_N} + \frac{1}{2} h_N q_N v_N + \alpha_N v_N = \frac{1}{2} h_N f_N + \beta_N$