Wienerův proces

– Wienerův proces (Brownův pohyb) je stochastický proces ve spojitém čase se spojitými hodnotami

– můžeme jej intuitivně chápat jako limitu náhodné procházky při zmenšování časového a prostorového kroku $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$.

Nechť

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2},$$

kde X_i, ..., $X_n, \ldots$ jsou IID náhodné veličiny.

Máme $E(X_i) = 0$ a $Var(X_i) = 1$.

Potom

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

kde $S_0 = 0$ je standardní symetrická náhodná procházka.

Zvolme délku časového kroku Δt a prostorového kroku Δx.

Pro $t = n\Delta t$, tedy $n = \frac{t}{\Delta t}$, definujeme proces

$$S_t = S_{n\Delta t} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\,\Delta x.$$

Z nezávislosti přírůstků X_j plyne, že $E\,(S_t) = 0$ a

$$Var\,(S_t) = (\Delta x)^2\, n = (\Delta x)^2\, \frac{t}{\Delta t}.$$

Zajímá nás chování tohoto procesu v limitě $\Delta x \to 0$ a $\Delta t \to 0$.

Uvažujeme mocninnou závislost mezi Δx a Δt.

Položme $\Delta t = (\Delta x)^p$, kde $p > 0$. Pro $\Delta t \to 0$ pak dostáváme

$$Var\left(S_t\right) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t \begin{cases} \to 0 & \text{pro } p < 2 \\ = t & \text{pro } p = 2 \\ \to \infty & \text{pro } p > 2 \end{cases}.$$

Konečný nenulový rozptyl tedy dostaneme jen pro volbu $p = 2$. Pro

$$\Delta t = (\Delta x)^2$$

dostaneme v limitě pro $\Delta t \to 0$ standardní Wienerův proces.

Z Centrální limitní věty plyne, že S_t má v limitě pro $\Delta t \to 0$ a $(\Delta x)^2 = \Delta t$ normální rozdělení $N(0, t)$.

Věta 10.1. ***(centrální limitní věta)*** *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které mají střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Označme*

$$Y_n = \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \mu n)}{\sqrt{n}}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$. Pak Y_n konverguje v distribuci k rozdělení $N\left(0, \sigma^2\right)$.

Definice 10.2. Stochastický proces W_t, kde $t \in [0, \infty)$, se nazývá ***standardní Wienerův proces***, jestliže platí:

1. $W_0 = 0$
2. (*spojitost*) S pravděpodobností 1 je trajektorie Wienerova procesu spojitá.
3. (*nezávislost*) Přírůstky Wienerova procesu jsou nezávislé, tj. pro $0 \leq t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq \ldots \leq t_n < s_n$ jsou přírůstky $W_{s_1} - W_{t_1}$, $W_{s_2} - W_{t_2}$, ..., $W_{s_n} - W_{t_n}$ navzájem nezávislé.
4. (*normalita přírůstků*) Přírůstky $W_s - W_t$ pro $s > t$ mají rozdělení $N(0,\, s - t)$.

Speciálně z vlastností 1 a 4 máme

$$W_t \sim N(0,\ t) \sim \sqrt{t} N(0,\ 1)\,.$$

Označme ΔW přírůstek Wienerova procesu za čas Δt. Máme

$$\Delta W = \sqrt{\Delta t}\varepsilon,$$

kde ε má standardní normální rozdělení $N(0,\ 1)$.

Pro očekávání a rozptyl ΔW dostaneme

$$E(\Delta W) = \sqrt{\Delta t} E(\varepsilon) = 0$$

$$Var(\Delta W) = E\left((\Delta W)^2\right) = \Delta t.$$

Zobecněný Wienerův proces můžeme definovat pomocí infinitezimálního přírůstku

$$dX = adt + bdW,$$

kde a, b jsou konstanty a W je standardní Wienerův proces. Koeficient a je ***koeficient driftu*** a b je ***koeficient volatility***. Opět máme

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

tedy

$$E(\Delta X) = a\Delta t$$

$$Var(\Delta X) = b^2\Delta t.$$

Pro $b = 0$ máme

$$dX = adt,$$

tedy $X_t = at$ je deterministický proces.

Další možné zobecnění: koeficienty a, b se mohou měnit a mohou záviset na t a případně i na hodnotách X.

Wienerův proces a model vývoje ceny akcie

Wienerův proces není vhodný pro popis vývoje ceny akcie z několika důvodů:

- Ceny akcie mohou nabývat i záporné hodnoty.
- Při Wienerově procesu je pravděpodobnost, že se cena zvýší o 1 Kč stejná je-li $S = 1$ Kč, nebo $S = 100\,000$ Kč.

  To co je důležité není absolutní změna (ta závisí na jednotkách v nichž cenu vyjadřujeme), ale relativní změna vůči ceně akcie.

Nechť

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

kde μ je drift a σ je volatilita. Tak je definován ***geometrický Wienerův proces***. Máme

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

a diskretizací dostaneme:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

kde $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

K vyřešení rovnice potřebujeme Itôovo lemma.

Itôovo lemma

Pro porovnání připomeňme nejdříve diferenciál deterministické funkce.

- 1 proměnná: $dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx$
- funkce 2 deterministických proměnných x, t:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dx.$$

V případě Wienerova procesu platí heuristický vztah

$$(dW)^2 = dt$$

proto budeme mít navíc člen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dX)^2.$$

Itôovo lemma je analogií pravidla pro diferenciál složené funkce a slouží k výpočtu přírůstků funkce stochastického procesu.

Nechť hodnota stochastického procesu X splňuje rovnici

$$dX = a\,(X,\ t)\,dt + b\,(X,\ t)\,dW,$$

kde W je standardní Wienerův proces a a, b jsou funkce X a t.

Nechť $G\,(x,\ t)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných x, t.

Jakou rovnici splňuje přírůstek procesu $G\,(X,\ t)$?

Itôovo lemma říká, že pro G platí

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (dX)^2$$

kde za dX dosadíme a $(dX)^2$ počítáme podle pravidel

$$dtdt = 0, \quad dtdW = 0, (dW)^2 = dt.$$

Tak dostaneme celkem

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 + a \frac{\partial G}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdW.$$

Odvození Black-Scholesovy rovnice

Black-Scholesova rovnice popisuje vývoj hodnoty evropské opce v Black-Scholesově modelu.

Předpokládejme, že pohyb ceny akcie je popsán geometrickým Wienerovým procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

neboli

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Použijeme Itôovo lemma na funkci $G(S, t) = lnS$.

Máme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}.$$

Tedy z Itôova lemmatu

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW$$

a

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Odtud plyne, že $\ln S_T - \ln S_0$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ a rozptylem $\sigma^2 T$.

Tedy

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T;\ \sigma^2 T\right).$$

S_T má tedy ***lognormální rozdělení***, tj. $\ln S_T$ má normální rozdělení.

Máme rovnici pro cenu akcie, která sleduje geometrický Wienerův proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{1}$$

Nechť f je cena evropské call opce s danou realizační cenou K a časem expirace T.

Zisk z takové opce v čase T je

$$(S_T - K)_+ \, .$$

f závisí na S a t a je tedy funkcí dvou proměnných, $f(S, t)$.

Hodnota $f(S, t)$ je cena opce v čase t a při ceně akcie rovné S.

Podle Itôova lemmatu platí pro změnu ceny opce

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 .$$

za dS dosadíme z 1, tedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\mu S dt + \sigma S dW)^2 .$$

Jelikož $(dt)^2$ a $dtdW$ jsou členy vyššího řádu a víme, že $(dW)^2 = dt$, dostáváme:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW \qquad (2)$$

Vhodnou kombinací 1 a 2 můžeme sestavit portfolio z akcií a opcí, jehož výnos je deterministický.

Jinak řečeno, můžeme eliminovat stochastický člen dW.

Označme Π hodnotu portfolia složeného z 1 opce a $-\frac{\partial f}{\partial S}$ akcie, tedy

$$\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S} S + 1f$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia za čas dt máme:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\right) dS + 1df.$$

Po dosazení z 1 dostaneme

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt,$$

stochastický člen se vyruší.

Přírůstek hodnoty portfolia $d\Pi$ se musí (z neexistence arbitráže) rovnat zisku z bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r, tj.

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Celkem dostaneme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = r\left(-\frac{\partial f}{\partial S}S + f\right) dt$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial S}Sr = rf$$

To je *Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice.*

Po transformaci (substitucích) dostaneme rovnici difuze (vedení tepla)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

Známe také koncovou podmínku – hodnotu $f(T) = (S_T - K)_+$

Řešením dostaneme Black-Scholesův vzorec.