1. termín zkoušky – MIN301 – podzim 2022 – 9. 1. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Mějme funkci $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y, z) = 4x^2 - z^2 + 2 + y^2 - 2z$$

a dále zkusme definovat funkci $z = f(x, y)$ vztahem $F(x, y, z) = 0$, kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Popište množinu bodů $[x, y, z]$, na jejichž okolí je funkce $f(x, y)$ skutečně definovaná.

b) Určete lokální extrémy funkce $f(x, y)$.

2. (5 bodů) Určete Taylorův polynom funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v bodě $[1, 1, 1]$ druhého stupně, kde

$$f(x, y, z) = \ln\big(x(y + z)\big).$$

3. (5 bodů) V $\mathbb{R}^3$ uvažujme množinu

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le 4,\ z \ge -4,\ z \le 0,\ z \le x^2 + y^2 - 1\}.$$

a) Načrtněte průnik množiny M s rovinou xz.

b) Určete objem množiny M.

4. (5 bodů)

a) Pro $x > 0$ najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{y^2}{x^2} = 0$.

b) Určete řešení této rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 2$ a maximální interval, na kterém je toto řešení definováno.

c) Určete řešení této rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 0$ a maximální interval, na kterém je toto řešení definováno.

Řešení a bodování:

1. – **[1.5b]** Body, kde funkce $f(x,y)$ není definovaná, jsou charakterizované vztahem $F_z = -2z - 2 = 0$. Tedy $z = -1$, ale rovnice $F(x,y,-1) = 4x^2 + y^2 + 3 = 0$ nemá řešení. Tedy $f(x,y)$ je definována ve všech bodech $[x,y,z]$ splňujících $F(x,y,z) = 0$.

– **[3.5b]** Derivací vztahu $F(x,y,z) = 0$, kde $z(x,y)$ chápeme jako funkci dvou proměnných, dostaneme

$$z_x = \tfrac{4x}{z+1} \quad \text{a} \quad z_y = \tfrac{y}{z+1}.$$

Stacionární body tedy splňují $x = y = 0$ a $F(0,0,z) = -z^2 - 2z + 2 = 0$, tj. $z = -1 \pm \sqrt{3}$. Tedy existují dva stacionární body: $[0,0,-1 \pm \sqrt{3}]$.

Dalšími derivacemi dostaneme

$$z_{xx} = \tfrac{4}{z+1}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = \tfrac{1}{z+1}.$$

Tedy v bodech $[0,0,-+\sqrt{3}]$ a $[0,0,-1-\sqrt{3}]$ jsou matice druhých parciálních derivací postupně

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \text{a} \qquad d^2 f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{pmatrix}.$$

Z (in)definitnosti těchto matic plyne, že v bodě $[0,0,-1+\sqrt{3}]$ je lokální minimum a v bodě $[0,0,-1-\sqrt{3}]$ lokální maximum.

2. [**5 bodů**] První parciální derivace jsou

$$f_x(x,y,z) = \tfrac{1}{x}, \quad f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \tfrac{1}{y+z}, \quad [1b].$$

Tedy vektor parciálních derivací v bodě $[1,1,1]$ je $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, [0.5b]. Nenulové druhé parciální derivace jsou

$$f_{xx}(x,y,z) = -\tfrac{1}{x^2} \quad \text{a} \quad f_{yy}(x,y,z) = f_{zz}(x,y,z) = f_{yz}(x,y,z) = -\tfrac{1}{(y+z)^2},$$

[1b]. Tedy matice druhých parciálních derivací v bodě $[1,1,1]$ je

$$d^2 f(1,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Požadovaný Taylorův polynom je tvaru

$$T_2(x,y,z) = f(1,1,1) + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ln 2 + (x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) + \tfrac{1}{2}(z-1) + \tfrac{1}{2}[-(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}(y-1)^2 - \tfrac{1}{4}(z-1)^2 - \tfrac{1}{2}(y-1)(z-1)], \quad [2b].$$

3. a) **[1.5b]** Průnik množiny M s rovinou xz je čtverec s vrcholy $[-2,0]$, $[2,0]$, $[-2,-4]$ a $[2,-4]$, ze které na horní straně „odřízne“ část parabola $z = x^2 - 1$ mezi body $[-1,0]$ a $[1,0]$.

b) **[3.5b]** M je rotační plocha, kde osa z je osa rotace. Použijeme válcové souřadnice (r,α), přitom buď

$$0 \le r \le 1, \quad -4 \le z \le r^2 - 1, \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

nebo

$$1 \le r \le 2, \quad -4 \le z \le 0, \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Objem množiny M je tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} M &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_M r \, dz \, dr \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-4}^{r^2-1} r \, dz \, dr \, d\alpha + \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-4}^0 r \, dz \, dr \, d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r^2+3) \, dr \, d\alpha + \int_0^{2\pi} \int_1^2 4r \, dr \, d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4} r^4 + \tfrac{3}{2} r^2\right]_0^1 d\alpha + \int_0^{2\pi} \left[2r^2\right]_1^2 d\alpha = 2\pi \cdot \tfrac{7}{4} + 2\pi \cdot 6 = \tfrac{31}{2}\pi. \end{aligned}$$

4. a) **[2.5b]** Diferenciální rovnici $y' - \frac{y^2}{x^2} = 0$ řešíme separací proměnných. Nejprve si ale uvědomíme, že jedno řešení je $y \equiv 0$. Body za to dáme až v c). Dále integrací

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2},$$

dostaneme

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Odtud již spočteme, že

$$y(x) = \frac{x}{cx+1}.$$

b) **[1.5b]** Počáteční podmínka $y(1) = 2$ znamená

$$\frac{1}{c+1} = 2,$$

tedy $c = -\frac{1}{2}$. Maximální interval, na kterém je toto řešení definováno pro $x > 0$, je $(0, 2)$.

c) **[1b]** Počáteční podmínka $y(1) = 0$ znamená, že $y \equiv 0$. Takové řešení je definováno na $(0, \infty)$.