1. termín zkoušky – MIN301 – podzim 2021 – 26. 1. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Uvažme funkci $z = f(x, y)$ zadanou implicitně vztahem

$$x^2 - 4z^2 + 2x - 8y + 8z = 0$$

na okolí bodu $(0, 0, 0)$.

a) Rozhodněte, zda tento vztah zadává funkci $z = f(x, y)$ i na okolí bodů $A_1 = [1, 1, 1]$ a bodu $A_2 = [2, 3/2, 1]$.

b) Určete první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

c) Určete matici druhých parciálních derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $(0, 0)$.

2. (5 bodů) Určete Taylorův polynom funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ v bodě $[0, 1, 2]$, kde

$$f(x, y, z) = \sin(xyz).$$

3. (5 bodů)

a) Popište všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + y' - 6y = 0$.

b) Najděte obecné řešení diferenciání rovnice $y'' + y' - 6y = (18 - 8x)\,\mathrm{e}^x$.

c) Určete řešení rovnice $y'' + y' - 6y = (18 - 8x)\,\mathrm{e}^x$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 4$ a $y'(0) = 8$.

4. (5 bodů) Podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ \ z \le 6,\ \ z \ge \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\},$$

je rotační oblast (tento fakt nedokazujte).

a) Určete osu rotace a načrtněte průnik množiny M s rovinou $y = 0$.

b) Určete objem oblasti M.

Řešení a bodování:

1. a) **[1b]** Označme zadaný vztah jako

$$\varphi(x,y,z) = x^2 - 4z^2 + 2x - 8y + 8z = 0.$$

Bod A_1 tento vztah vůbec nespňuje, neboť $\varphi(1,1,1) \neq 0$. Bod A_2 sice tento vztah splňuje, $\varphi(2,3/2,1) = 0$, ale derivace podle z je $\varphi_z(2,3/2,1) = 0$. Tedy vztah $\varphi(x,y,z) = 0$ nezadává funkci $z = f(x,y)$ v okolí bodů A_1 a A_2.

b) **[1.5b]** Zderivujeme $x^2 - 4z^2 + 2x - 8y + 8z = 0$ parciálně podle x a y, přičemž chápeme z jako funkci proměnných x a y. Dostaneme

$$4z_x(z-1) - (x+1) = 0 \quad \text{a} \quad z_y(z-1) + 1 = 0,$$

což v bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ znamená $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = 1$, [0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

c) **[2.5b]** Spočteme druhé parciální derivace. Další derivací $4z_x(z-1) - (x+1) = 0$ podle x a podle y a také derivací $z_y(z-1) + 1 = 0$ podle y postupně dostáváme

$$4z_{xx}(z-1) + 4(z_x)^2 - 1 = 0, \quad z_{xy}(z-1) + z_x z_y = 0 \quad \text{a} \quad z_{yy}(z-1) + (z_y)^2 = 0, \quad [1b].$$

V bodě $[x,y,z] = [0,0,0]$ a pro $z_x = -\frac{1}{4}$ a $z_y = 1$ tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad [1.5b].$$

2. **[5 bodů]** První parciální derivace jsou

$$f_x(x,y,z) = yz\cos(xyz), \quad f_y(x,y,z) = xz\cos(xyz) \quad \text{a} \quad f_z(x,y,z) = xy\cos(xyz), \quad [0.5b],$$

Tedy vektor parciálních derivací v bodě $[0,1,2]$ je $(2,0,0)$, [0.5b]. Dále se lehce spočte, že jediné dvě nenulové druhé parciální derivace v bodě $[0,1,2]$ jsou $f_{xy}(0,1,2) = 2$ a $f_{xz}(0,1,2) = 1$, [1b], tj.

$$d^2f(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0.5b].$$

Požadovaný Taylorův polynom je obecně tvaru

$$T_2(x,y,z) = f(0,1,2) + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y-1 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} =$$
$$= 2x + \tfrac{1}{2}[4x(y-1) + 2x(z-2)] = -2x + 2xy + xz, \quad [2.5b].$$

3. a) **[1.5b]** Diferenciální rovnice $y'' + y' - 6y = 0$ má charakteristický polynom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda-2)(\lambda+3)$, [0.5b], který má kořeny 2 a -3. Tedy řešení jsou tvaru $ae^{2x} + be^{-3x}$, $a, b \in \mathbb{R}$, [1b].

b) **[2.5b]** Partikulární řešení rovnice je $y'' + y' - 6y = (18 - 8x)\,\mathrm{e}^x$ hledáme ve tvaru $y_p(x) = (cx + d)\,\mathrm{e}^x$, [0.5b], tj. $y_p'(x) = (cx + c + d)\,\mathrm{e}^x$ a $y_p''(x) = (cx + 2c + d)\,\mathrm{e}^x$, což po dosazení do rovnice dává

$$(-4cx + 3c - 4d)\,\mathrm{e}^x = (18 - 8x)\,\mathrm{e}^x,$$

[0.5b]. Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme soustavu rovnic $-4c = -8$, $3c - 4d = 18$, [0.5b], která má řešení $c = 2$, $d = -3$, [0.5b]. Tedy hledané partikulární řešení je $y_p(x) = (2x - 3)\,\mathrm{e}^x$ a obecné řešení je, [0.5b],

$$y(x) = ae^{2x} + be^{-3x} + (2x - 3)\,\mathrm{e}^x, \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

c) **[1b]** Použitím počátečních podmínek dostaneme

$$y(0) = a + b - 3 = 4 \quad \text{a} \quad y'(0) = 2a - 3b - 1 = 8,$$

[0.5b]. Tato soustava rovnic má řešení $a = 6$ a $b = 1$, tedy hledané řešení je $y(x) = 6e^{2x} + \mathrm{e}^{-3x} + (2x - 3)e^x$, [0.5b].

4. a) **[1.5b]** Množina M je část válce s osou z o poloměrem 2, [0.5b], která je zespoda ohraničená paraboloidem $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a seshora ohraničená rovinou $z = 6$. Osa rotace je osa z, [0.5b], a průnik s rovinou $y = 0$ je oblast mezi přímkami $x = -2$ a $x = 2$ zespoda ohraničená parabolou $z = \frac{1}{2}x^2$ a seshora ohraničená přímkou $z = 6$, [0.5b].

b) **[3.5b]** Použijeme válcové souřadnice, tj. provedeme transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, přičemž z-tová souřadnice se nemění, [0.5b]. Tedy budeme integrovat přes oblast nových proměnných

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 6,$$

[1b]. Determinant z Jacobiho matice je r, [0.5b], takže hledaný objem V je

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=\frac{1}{2}r^2}^{6} r dzdrd\varphi = \Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\Big)\Big(\int_{r=0}^{2} r(6 - \tfrac{1}{2}r^2)dr\Big) =$$
$$= 2\pi\big[-\tfrac{1}{8}r^4 + 3r^2\big]_0^2 = 2\pi \cdot 10 = 20\pi,$$

[0.5b za správné pořadí integrace, 0.5b za postup integrování a 0.5b za správný výsledek].